This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 025 497 764

510.5
A672

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgeber:

Dr. **Johann August Grunert**

Königl. Geheimer Regierungs-Rath und ord. Professor an der Universität zu Greifswald. Ritter des rothen Adlerordens 3. Kl. mit der Schleife, Offizier des Ordens der Königl. italienischen Krone, Ritter des Kaiserl. österreichischen Franz-Josephs-Ordens, des Königl. Schwedischen Nordsternordens, des Königl. italienischen St. Mauritius- und Lazarus-Ordens, und des Grossherzogl. Badischen Ordens vom Zähringer Löwen.

Mitglied der Kaiserlichen und Königlichen Akademieen und Societäten der Wissenschaften in Wien, München, Stockholm, Upsala, Prag, Pest, Krakau, Erfurt und vieler anderen gelehrten Gesellschaften.

Dreiundfunfzigster Theil.

Mit neun lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1871.

162480

STANFORD LIBRARIES

Inhalts-Verzeichniss

des dreiundfunfzigsten Theils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite
	Arithmetik.		
I.	Note über die Integration von linearen Differentialgleichungen. Von Herrn Simon Spitzer, Professor am k. k. Polytechnikum in Wien	I.	1
III.	Zur Theorie des Maximums und Minimums. Von Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien	I.	15
IV.	Ueber eine Transformation des bestimmten Integrals $\int_0^{\alpha} \lg \frac{a+b\cos x}{a-b\cos x}\,dx.$ Von Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien	I.	27
XVII.	Integration der Gleichung $y'' = x(xy' - ny)$ für den Fall, wo n eine ganze positive Zahl ist. Von Herrn Professor Simon Spitzer am k. k. Polytechnikum in Wien	I.	117
XXXI.	Integration der linearen Differentialgleichung $y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy,$ in welcher n eine ganze positive Zahl, die grösser als 2 ist, und A, B, C constante Zahlen bezeichnen. Von Herrn Simon Spitzer, Professor am k. k. Polytechnikum in Wien	IV.	385

Nr der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XL.	Ueber die Gränze, welcher x^x sich nähert, wenn x von der Seite des Positiven her sich der Null nähert. Von dem Herausgeber. (Bezieht sich auf einen Aufsatz in der Tidskrift för Matematik och Fysik. Tredje Årgången, Häft. 2. 3. Mars—Mai 1870. p. 128. Von Herrn J. Åkerlund, elev vid Gefle elementarläroverk	IV.	510

Geometrie.

IX.	Propriété des coniques relative aux tangentes issues d'un même point. Par Monsieur Georges Dostor, Docteur ès sciences, Professeur de mathématiques à Paris	I.	90
X.	Surface du quadrilatère compris entre les deux tangentes menées du point (x, y) à une conique à centre, et les deux droites qui joignent le centre aux points de contact. Par Monsieur Georges Dostor, Docteur ès sciences, Professeur de mathématiques à Paris	I.	94
XI.	Propriété particulière à la parabole, relativement aux tangentes issues d'un même point. Par Monsieur Georges Dostor, Docteur ès sciences, Professeur de mathématiques à Paris	I.	98
XII.	Surface du triangle compris entre les deux droites qui joignent un point quelconque du plan à deux points arbitraires de la parabole. Par Monsieur Georges Dostor, Docteur ès sciences, Professeur de mathématiques à Paris	I.	100
XIX.	Ueber die Winkel, welche die von einem Punkte nach den Mitten der Seiten eines Polygons gezogenen Geraden mit den Polygonseiten bilden. Von Herrn Dr. R. Most, Lehrer an der Realschule I. Ordnung in Stettin	I.	126
XIX.	Einfache geometrische Ableitung der Relation zwischen den Radien der einem Dreieck ein- und umschriebenen Kreise und dem Abstande ihrer		

Nr der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Centra. Von Herrn Professor und Director Dr. F. Strehlke in Langfuhr bei Danzig . . .	I.	127
XX.	Beweis zweier Steinerschen Lehrsätze. Von Herrn Dr. Bermann zu Liegnitz	II.	129
XXI.	Applications des déterminants à l'algèbre et à la géométrie analytique. Par Monsieur J. Versluys, Professeur de Mathématiques à Groningue. (Pays-Bas)	II.	137
XXII. A.	Beschreibung eines Apparates zum Anschauungsunterricht in der descriptiven Geometrie. Von Herrn Prof. F. Hoza, Lehrer an der Oberrealschule in Königgrätz	II.	188
XXIII.	Das tetraedrische oder quadriplanare Coordinatensystem in allgemeiner analytischer Entwickelung. Von dem Herausgeber	II.	193
XXIV.	Der Flächeninhalt eines beliebigen ebenen Dreiecks im Raume und der körperliche Inhalt eines beliebigen Tetraeders im Raume durch die cartesischen Coordinaten und durch die tetraedrischen oder quadriplanaren Coordinaten der Ecken ausgedrückt. Von dem Herausgeber	III.	317
XXVI.	Ueber die windschiefe Fläche $z=\frac{Ay^2}{x^2}$. Von Herrn Dr. Adolf Hochheim, Lehrer an der höheren Gewerbeschule zu Magdeburg	III.	350
XXVIII.	Ueber die Bestimmung der Vielecke durch die Halbirungspunkte ihrer Seiten. Von Herrn Oberstudienrath Dr. Nagel in Ulm	III.	378
XXX.	Schreiben des Herrn Oberlehrers C. Hellwig an der Realschule I. Ordnung in Erfurt an den Herausgeber über innere und äussere Berührungskreise eines Dreiecks und den um das Dreieck beschriebenen Kreis	III.	382
XXXII.	Der Flächeninhalt der Ellipse durch die Coefficienten in ihrer allgemeinen Gleichung für cartesische und trimetrische Coordinaten ausgedrückt. Von dem Herausgeber	IV.	390
XXXIII.	Die allgemeinen Theoreme von Pascal, Desargues,		

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Pappus, Carnot und Chasles von den Kegelschnitten, mit Zugrundelegung des trimetrischen oder Dreilinien-Coordinatensystems entwickelt. Von dem Herausgeber	IV.	395
XXXIV.	Allgemeine Theorie der Berührenden, der Normalen und des Krümmungskreises der Curven mit Zugrundelegung des trimetrischen oder Dreilinien-Coordinatensystems. Die Theoreme von Brianchon und Chasles von den Berührenden der Kegelschnitte, mittelst desselben Coordinatensystems entwickelt. Von dem Herausgeber	IV.	443
XXXV.	Ueber einen Ausdruck für die Oberfläche eines Polyeders von beliebiger Seitenflächenzahl. Von dem Herausgeber	IV.	482
	Trigonometrie.		
XVI.	Formulae quaedam goniometricae propositae a Christiano Fr. Lindman, Lect. Strengn	I.	112
XXV.	Ueber das sphaerische Dreieck, in welchem ein Winkel gleich ist der Summe der beiden anderen. Von Herrn Franz Unferdinger, Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien	III.	344
	Geodäsie.		
XXVII.	Berechnung der geodätischen Coordinaten und der geographischen Position der Dreieckspunkte, gestützt auf die Bessel'schen sphäroidischen Umwandlungsformeln. Von Herrn Major Andres, Professor an der k. und k. Militair-Akademie zu Wiener-Neustadt	III.	364
	Mechanik.		
V.	Ueber das Gleichgewicht zwischen drei Kräften. Von dem Herausgeber	I.	30
VI.	Ueber das Gleichgewicht zwischen vier in einer Ebene wirkenden Kräften. Von dem Herausgeber	I.	42

Nr der Abhandlung.		Heft.	Seite
	Optik.		
VII.	Einführung der sphärischen Trigonometrie in die Optik. Von Herrn Dr. Josef Kudelka, k. k. Lyceal-Professor zu Linz in Ober-Oesterreich . .	I.	61
XXII. B.	Harmonische Beziehungen bei der Reflexion und Brechung des Lichtes. Von Herrn Professor Carl Albrich an der Realschule in Hermannstadt in Siebenbürgen	II.	191
	Astronomie.		
II.	Annähernde graphische Bestimmung der Tages- und Nachtlänge für einen gegebenen Ort der Erde zur gegebenen Zeit. Von Herrn Professor F. Hoza, Lehrer an der Oberrealschule in Königgrätz .	I.	10
XXXVI.	Graphische Darstellung der scheinbaren Bahn der Sonne am Himmel. Von Herrn Professor F. Hoza, Lehrer an der Oberrealschule in Königgrätz .	IV.	488
	Nautik.		
XIII.	Zur Reduction der Monddistanzen. Die Bestimmung der Distanz durch die Tangente der halben Distanz. Von Herrn Prof. Dr. Ligowski, an der Königl. Marineschule in Kiel	I.	103
XIV.	Näherungsweise Auflösung der Aufgabe: Aus zwei Höhen eines Sterns und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Breite und die Zeit zu bestimmen. Von Herrn Prof. Dr. Ligowski, an der Königl. Marineschule in Kiel	I.	107
XV.	Berechnung von Entfernungen auf der See. Von Herrn Prof. Dr. Ligowski, an der Königl. Marineschule in Kiel	I.	110
XXXVIII.	Verschiedene Bemerkungen zur Reduction der Monddistanzen. Von Herrn Prof. Dr. Ligowski, an der Königl. Marineschule in Kiel	IV.	498
	Physik.		
VIII.	Experimentelle magnetische Untersuchungen. (Zweiter Theil). Von Herrn Dr. Külp, Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt	I.	66

№ der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XXXVII.	Ueber eine Methode zur Füllung der Barometer-Röhren. Von Herrn Hr. Wild, Director des physikal. Central-Observatoriums zu St. Petersburg	IV.	494
	Uebungsaufgaben für Schüler.		
XVIII.	Vier geometrische Aufgaben. Von Herrn Dr. C. F. Lindman in Strengnäs (Schweden) . .	I.	124
XVIII.	Sieben algebraische Aufgaben von Paul Halcken. (Fortsetzung von Thl. LI. Nr. XXXIII. S. 384) .	I.	125
XXIX.	Geometrische Aufgabe v. Hrn. R. W. Genese, B. A.	III.	381
XXIX.	Arithmetische Aufgabe über Determinanten. Von Herrn J. Wolstenholme	III.	381
XXIX.	Man soll die Gleichung $(x^2+12x-10)^2=2(51x^2-102x+55)$ auflösen. Von Herrn Rev. N. J. Knisely . .	III.	381
XXXIX.	Einige Uebungsaufgaben aus der algebraischen Geometrie für Schüler. Von Hrn. Dr. Adolf Hochheim, Lehrer an der höheren Gewerbeschule in Magdeburg	IV.	507
XXXIX.	Geometrische Schüleraufgabe von Herrn Emil Hain, Lehrer am Communalrealgymnasium in der Leopoldstadt in Wien. (Betrifft ein Dreieck im Kreise, dessen Seiten bis zum Kreisumfange verlängert worden sind.)	IV.	508
XXXIX.	Lehrsatz. In Taf. IX. Fig. III. sei O der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises des Dreiecks $A_0A_1A_2$, und O_2 sei der Mittelpunkt des die Seite A_1A_2 berührenden äusseren Berührungskreises dieses Dreiecks; so ist: $A_0A_1 . A_2A_0 = A_0O . A_0O_0$. Von Herrn Rev. G. H. Hopkins, M. A. . . .	IV.	509
	Literarische Berichte*).		
CCIX.		I.	1
CCX.		II.	1
CCXI.		III.	1
CCXII.		IV.	1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

LIBRARY

I.

Note über die Integration von linearen Differentialgleichungen.

Von

Herrn ***Simon Spitzer,***
Professor am k. k. Polytechnikum in Wien.

Im 38. Bande des Archivs habe ich die Gleichung

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \xi\frac{d^2z}{d\xi^2} + \left(\frac{2}{3}-\xi\right)\frac{dz}{d\xi} - Az = 0$$

in welcher

$$\frac{2}{3} > A > 0$$

ist, mittelst der Formel

$$(2)$$

$$z = K_1\int_0^1 e^{u\xi}u^{A-1}(1-u)^{-A-\frac{1}{3}}du + K_2\sqrt[3]{\xi}\int_0^1 e^{u\xi}u^{A-\frac{1}{3}}(1-u)^{-A}du$$

integrirt. K_1 und K_2 bezeichnen willkürliche Constante.

Setzt man in (1) und (2)

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \xi = mx^3,$$

woselbst m eine beliebige positive oder negative Zahl bezeichnet, so erhält man:

$$(4) \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 3mx^2\frac{dz}{dx} + 9Amxz$$

und dieser Gleichung genügt nachstehender Werth von z:

$$(5)$$

$$z = K_1\int_0^1 e^{mux^3}u^{A-1}(1-u)^{-A-\frac{1}{3}}du + K_2x\int_0^1 e^{mux^3}u^{A-\frac{1}{3}}(1-u)^{-A}du.$$

Man kann das Integrale der Gleichung (4) noch auf anderem Wege bestimmen. Nach einem von mir gefundenen Satze stehen nämlich die zwei Differenzialgleichungen

$$(6) \quad z^{(n)} = x^m \quad (Axz' + Bz),$$

$$(7) \quad y^{(n+1)} = x^{m-1}(Axy' + By)$$

in folgendem Zusammenhange:

$$(8) \quad z = \int_0^\infty u^{m-1}e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}}\psi(ux)du,$$

wo $\psi(x)$ diejenige Function von x bezeichnet, welche in (7) statt y eingeführt, derselben genügt, falls nur zwischen den $n+1$ Constanten, die in $\psi(x)$ als willkürlich auftreten, eine gewisse Relation statuirt wird. (Siehe meine Studien über lineare Differentialgleichungen, 1. Fortsetzung, Seite 74.).

Die Integrale der zwei Gleichungen

$$(9) \quad z'' = x(3mxz' + 9Az)$$

$$(10) \quad y''' = 3mxy' + 9Ay$$

stehen demnach in folgendem Zusammenhange:

$$(11) \quad z = \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}}\psi(ux)du.$$

Die Gleichung (10) lässt sich mittelst der Laplace'schen Methode integriren, es ist nämlich:

$$(12) \quad y = \int_0^\infty u^{3A-1}e^{-\frac{u^3}{9m}}(C_1e^{\mu_1ux} + C_2e^{\mu_2ux} + C_3e^{\mu_3ux})du$$

woselbst C_1 C_2 C_3 willkürliche Constante und μ_1 μ_2 μ_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$\mu^3 = 1$$

bezeichnen. Man kann, wie leicht einzusehen, dem y auch folgende Gestalt geben:

$$(13) \ldots y = \int_0^\infty u^{3A-1} e^{-\frac{u^3}{3}} (C_1 e^{k_1 ux} + C_2 e^{k_2 ux} + C_3 e^{k_3 ux}) du;$$

alsdann bezeichnen wieder C_1 C_2 C_3 willkürliche Constante und k_1 k_2 k_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$k^3 = 3m.$$

Es ist demnach

$$(14)$$

$$z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{3A-1} (C_1 e^{k_1 uvx} + C_2 e^{k_2 uvx} + C_3 e^{k_3 uvx}) du dv$$

das Integrale der Gleichung (9). Zwischen den drei Constanten C_1 C_2 C_3 findet eine Bedingungsgleichung statt. Um diese zu finden, bemerke man dass die Gleichung (9) für $x = 0$ auf $z'' = 0$ führt, demnach muss auch die Gleichung (14) zweimal differenzirt und dann $x = 0$ gesetzt, auf $z'' = 0$ führen. Nun ist:

$$z'' = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{3A} v^2 (C_1 k_1^2 e^{k_1 uvx} + C_2 k_2^2 e^{k_2 uvx} + C_3 k_3^2 e^{k_3 uvx}) du dv;$$

für $x = 0$ wird $z'' = 0$ wenn

$$C_1 k_1^2 + C_2 k_2^2 + C_3 k_3^2 = 0$$

ist.

Der Differentialgleichung

$$(4) \ldots \ldots \ldots \frac{d^2 z}{dx^2} = 3mx^2 \frac{dz}{dx} + 9Amxz,$$

in welcher

$$\frac{2}{3} > A > 0$$

ist, genügt daher erstens

(5)

$$z = K_1 \int_0^1 e^{mux^3} u^{A-1}(1-u)^{-A-\frac{1}{3}} du + K_2 x \int_0^1 e^{mux^3} u^{A-\frac{1}{3}}(1-u)^{-A} du,$$

woselbst K_1 und K_2 willkürliche Constante sind, und zweitens genügt derselben auch

(14)

$$z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{3A-1}(C_1 e^{k_1 uvx} + C_2 e^{k_2 uvx} + C_3 e^{k_3 uvx}) du dv$$

in welcher C_1 C_2 C_3 willkürliche Constante bedeuten, zwischen denen die Relation

(15) . . . . . $C_1 k_1^2 + C_2 k_2^2 + C_3 k_3^2 = 0$

besteht, und woselbst k_1 k_2 k_3 die drei Wurzeln der Gleichung

(16) . . . . . $k^3 = 3m$

sind. Ich ziehe das in (5) gegebene Integrale der Differentialgleichung (4) dem in (14) gegebenen Integrale vor, und zwar aus dem Grunde, weil in (5) blos einfache bestimmte Integrale vorkommen, in (14) aber Doppel-Integrale erscheinen.

Differenzirt man die Gleichung (4) $\lambda + 1$ mal, unter $\lambda + 1$ eine ganze positive Zahl verstanden, so erhält man

$$\frac{d^{\lambda+3} z}{dx^{\lambda+3}} = 3mx^2 \frac{d^{\lambda+2} z}{dx^{\lambda+2}} + 3m(2\lambda+3A+2)x \frac{d^{\lambda+1} z}{dx^{\lambda+1}} + 3m(\lambda+1)(\lambda+3A) \frac{d^\lambda z}{dx^\lambda}$$

und setzt man

$$\frac{d^\lambda z}{dx^\lambda} = y$$

so erhält man die Gleichung:

(17) . $y''' = 3mx^2 y'' + 3m(2\lambda+3A+2) y' + 3m(\lambda+1)(\lambda+3A) y$

und derselben genügt nicht nur der Werth:

(18)

$$y = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\Big[K_1 \int_0^1 e^{mux^3} u^{A-1}(1-u)^{-A-\frac{1}{3}} du + K_2 x \int_0^1 e^{mux^3} u^{A-\frac{1}{3}}(1-u)^{-A} du \Big]$$

woselbst K_1 und K_2 willkürliche Constante bezeichnen, sondern auch folgender Werth von y

$$y = \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{3A-1} (C_1 e^{k_1 uvx} + C_2 e^{k_2 uvx} + C_3 e^{k_3 uvx}) du dv$$

der sich auch so schreiben lässt:

(19)

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\lambda+3A-1} v^\lambda (C_1 e^{k_1 uvx} + C_2 e^{k_2 uvx} + C_3 e^{k_3 uvx}) du dv$$

und zwar wie sich leicht nachweisen lässt für ganz willkürliche, an gar keine Bedingung gebundene Werthe von C_1 C_2 C_3, wenn nur k_1 k_2 k_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$k^3 = 3m$$

bezeichnen.

Die Differentialgleichung (17) ist von der dritten Ordnung, das in (18) stehende Integrale dieser Gleichung hat aber nur zwei *willkürliche* Constante und ist somit nicht das vollständige Integrale derselben. Das in (19) stehende y, welches ebenfalls der Gleichung (17) genügt, hat drei willkürliche Constante, es ist somit das vollständige Integrale der Gleichung (17) und merkwürdiger Weise genügt das in (19) stehende Integrale der Gleichung (17) nicht nur für ganze positive Werthe von λ, sondern für jeden positiven Werth von λ, mag dieser nun ganz oder gebrochen sein.

Wir haben bis jetzt eine Reihe von Differenzialgleichungen der Form

(20) . . . . . $y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy$

gefunden, denen durch ein Doppel-Integrale genügt wird, so nämlich im 52. Bande dieses Archivs Seite 12, wo wir die Gleichung

$$z''' = x^2z'' + 2(n+2)xz' + (n+1)(n+2)z,$$

in welcher n eine positive Zahl bezeichnet, mittelst der Formel

$$z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^4+v^4}{4}} u^n v^{n+1} (C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx} + C_4 e^{\lambda_4 uvx}) du dv$$

integrirten, wo $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ willkürliche Constante und $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ die vier Wurzeln der Gleichung $\lambda^4 = 1$ bezeichneten; so ferner im selben Bande des Archivs Seite 21, wo wir die Gleichung

$$z''' = 3mx^2z'' + 6m(\mu+2)xz' + 3m(\mu+2)(\mu+1)z,$$

in welcher μ eine beliebige positive Zahl bezeichnet, mittelst der Formel

$$z = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^\mu v^{\mu+1} (C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + C_3 e^{\lambda_3 uvx})\, du dv$$

integrirten, in welcher $C_1\ C_2\ C_3$ willkürliche Constante und $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ die drei Wurzeln der Gleichung $\lambda^3 = 3m$ repräsentiren; und so endlich in diesem Aufsatze, wo wir die Gleichung

$$y''' = 3mx^2y'' + 3m(2\lambda + 3A + 2)y' + 3m(\lambda+1)(\lambda+3A)y,$$

woselbst

$$\frac{2}{3} > A > 0$$

und λ eine positive Zahl bezeichnet, mittelst der Formel

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} u^{\lambda+3A-1} v^\lambda (C_1 e^{k_1 uvx} + C_2 e^{k_2 uvx} + C_3 e^{k_3 uvx})\, du dv$$

integrirten.

Die Resultate. zu denen ich bisher gelangt, veranlassten mich zu untersuchen ob man überhaupt Gleichungen der Form

(20) . . . . . $y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy$

genügen könne durch Integrale von nachstehender Gestalt:

(21)

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^\alpha v^\beta (C_1 e^{\lambda_1 uxx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + \ldots + C_n e^{\lambda_n uvx})\, du dv,$$

in welcher α und β bestimmte positive und constante Zahlen

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \ldots . \lambda_n$$

die n Wurzeln der Gleichung

(22) . . . . . $\lambda^n = A$

und $C_1\ C_2 \ldots . C_n$ willkürliche Constante bezeichnen, und diese meine Untersuchung war vom glücklichsten Erfolg.

Um diess zu beweisen fasse ich ein particuläres Integrale besonders ins Auge und setze

$$(23) \ldots\ldots y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda uvx}\, du dv.$$

Durch Differenziren dieses Ausdruckes erhält man:

$$y' = \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+1} v^{\beta+1} e^{\lambda uvx}\, du dv,$$

$$y'' = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+2} v^{\beta+2} e^{\lambda uvx}\, du dv,$$

$$y^{(n)} = \lambda^n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+n} e^{\lambda uvx}\, du dv.$$

Behandelt man nun das $y^{(n)}$ zweimal nacheinander mittelst der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man successive, da

$$\int e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+n} e^{\lambda uvx} dv = -\int e^{-\frac{u^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+1} e^{\lambda uvx} d\, e^{-\frac{v^n}{n}}$$

$$= -e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+1} e^{\lambda uvx} + \int e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} d(v^{\beta+1} e^{\lambda uvx})$$

$$= -e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+1} e^{\lambda uvx} + \int e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^\beta e^{\lambda uvx} (\lambda uvx+\beta+1) dv$$

ist, wenn man zu den Grenzen 0 und ∞ übergeht:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+n} e^{\lambda uvx}\, dv$$

$$= \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^\beta e^{\lambda uvx} (\lambda uvx+\beta+1) dv,$$

und folglich ist

$$y^{(n)} = \lambda^n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^\beta e^{\lambda uvx} (\lambda uvx+\beta+1)\, du dv.$$

Behandelt man nun auf gleiche Weise das Integrale

$$\int e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^\beta e^{\lambda uvx}(\lambda uvx+\beta+1)du$$

so sieht man, dass man selbes vorerst auf nachstehende Weise schreiben kann:

$$-\int e^{-\frac{v^n}{n}} u^{\alpha+1} v^\beta e^{\lambda uvx}(\lambda uvx+\beta+1)d\,e^{-\frac{u^n}{n}}$$

und diess gibt nach der Methode des theilweisen Integrirens:

$$-e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+1} v^\beta e^{\lambda uvx}(\lambda uvx+\beta+1)$$

$$+\int e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} v^\beta d[u^{\alpha+1} e^{\lambda uvx}(\lambda uvx+\beta+1)],$$

und diess ist gleich:

$$-e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+1} v^\beta e^{\lambda uvx}(\lambda uvx+\beta+1)$$

$$+\int e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda uvx}[(\alpha+1)(\beta+1)+\lambda(\alpha+\beta+3)uvx+\lambda^2u^2v^2x^2]du.$$

Geht man nun auch bei diesem Integrale zu den Grenzen 0 und ∞ über, so verschwindet das ausser dem Integralzeichen stehende und man erhält:

(24)

$$y^{(n)} = \lambda^n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda uvx}[(\alpha+1)(\beta+1)+\lambda(\alpha+\beta+3)uvx+\lambda^2u^2v^2x^2]dudv.$$

Substituirt man nun die früher aufgestellten Werthe von y, y' und y'' sowie den eben jetzt erhaltenen Werth von $y^{(n)}$ in die Gleichung (20) so erhält man:

$$\lambda^n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda uvx}[(\alpha+1)(\beta+1)+\lambda(\alpha+\beta+3)uvx+\lambda^2u^2v^2x^2]dudv$$

$$= A\lambda^2x^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+2} v^{\beta+2} e^{\lambda uvx} dudv$$

$$+ B\lambda x \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+1} v^{\beta+1} e^{\lambda uvx} dudv$$

$$+ C \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda uvx} dudv$$

und diese Gleichung wird identisch wenn

$$\lambda^n = A,$$
$$\lambda^n(\alpha+\beta+3) = B,$$
$$\lambda^n(\alpha+1)(\beta+1) = C$$

gesetzt wird. Es ist demnach wirklich der in (21) stehende Werth von y das Integrale der Gleichung

$$y^{(n)} = \lambda^n[x^2y'' + (\alpha+\beta+3)xy' + (\alpha+1)(\beta+1)y].$$

Der eben bewiesene Satz lässt sich nach zwei Richtungen erweitern, aber ich glaube es dürfte genügen diess blos anzudeuten.

Die erste Erweiterung bezieht sich auf Gleichungen der Form

$$y^{(n)} = Ax^3y''' + Bx^2y'' + Cxy' + Dy$$

denen man genügen kann durch Integrale der Gestalt

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n+w^n}{n}} u^\alpha v^\beta w^\gamma (C_1 e^{\lambda_1 uvwx} + C_2 e^{\lambda_2 uvwx} + \ldots + C_n e^{\lambda_n uvwx})\, du dv dw,$$

ferner auf Gleichungen der Form

$$y^{(n)} = Ax^4y'''' + Bx^3y''' + Cx^2y'' + Dxy' + Ey,$$

denen genügt wird durch eine aus n-Theilen bestehende Summe von vierfachen zwischen den Grenzen 0 und ∞ genommenen Integralen u. s. w.

Die zweite Erweiterung bezieht sich auf Gleichungen der Form

$$y^{(n)} = x^m(Ax^2y'' + Bxy' + Cy).$$

Mit Hülfe eines von mir herrührenden Satzes, der Seite 78 der ersten Fortsetzung meiner Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen veröffentlicht wurde, lässt sich nämlich zuerst die Gleichung

$$y^{(n-1)} = x[x^2y'' + (\alpha+\beta+3)xy' + (\alpha+1)(\beta+1)y]$$

integriren, dann mit Zuhülfenahme desselben Satzes die Gleichung

$$y^{(n-2)} = x^2[x^2y'' + (\alpha+\beta+3)xy' + (\alpha+1)(\beta+1)y]$$

u. s. w. u. s. w.

II.

Annähernde graphische Bestimmung der Tages- und Nachtlänge für einen gegebenen Ort der Erde zur gegebenen Zeit.

Von

Herrn Professor ***F. Hoza***,
Lehrer an der Oberrealschule in Königgrätz.

(Fig. s. Taf. I.)

Nehmen wir an, die Erdbahn sei eine Kreislinie, deren Mittelpunkt identisch ist mit dem Mittelpunkte der Sonne, und die Erdaxe sei stets parallel zu einer constanten Richtung, welche mit der Ebene der Erdbahn einen Winkel von $66\frac{1}{2}^0$ einschliesst.

Ferner betrachten wir die Erdoberfläche als eine vollkommene Kugelfläche, welche durch parallele Strahlen beleuchtet wird, so dass für einen gegebenen Zeitpunkt die jeweiligen Lichtstrahlen parallel sind zur geraden Verbindungslinie des beweglichen Erdmittelpunktes mit dem unbeweglichen Sonnenmittelpunkte.

Alsdann wird die Schattengrenze der Erdkugel eine grösste Kreislinie dieser Kugelfläche sein, deren Ebene zu den jeweiligen Parallelstrahlen senkrecht steht.

Denken wir uns die Erde sei im Frühlingspunkte angelangt, das heisst, die Ebene, durch welche die Erdaxe auf die Ebene der Erdbahn orthogonal projicirt wird, berühre die Erdbahn.

Dann liegt die Schattengrenze der Erde in der nämlichen

projicirenden Ebene, welche somit zur geraden Verbindungslinie des Mittelpunktes der Erde mit dem der Sonne für diese Lage der Erde senkrecht steht. Heissen wir diese Verbindungslinie der Kürze wegen den Frühlingsstrahl, während die übrigen schlechtweg Strahlen genannt werden sollen.

Bewegt sich die Erdkugel um einen Winkel α, welchen ihr folgender Strahl mit dem Frühlingsstrahle bildet, so dreht sich auch die Schattengrenze um einen gleichen Winkel von der Frühlingsschattengrenze in der nämlichen Richtung.

Die Axe dieser Drehung ist eine Gerade, welche durch den Mittelpunkt der Erde geht, und zur Ebene der Erdbahn senkrecht steht.

Projiciren wir die Erdkugelfläche erstens auf die Ebene der Erdbahn und zweitens auf die projicirende Ebene der Erdaxe, wobei sich also die beiden zu einander senkrechten Projectionsebenen in einer Geraden als Projectionsaxe schneiden, welche durch den Erdmittelpunkt geht, und identisch ist mit der orthogonalen Projection der Erdaxe auf die Ebene der Erdbahn.

In der Fig. 1. sind diese beiden Projectionen für jene Lage der Erde abgebildet, in welcher der Strahl einen Winkel α vom Frühlingsstrahl an zurückgelegt hat. Dieser Winkel α giebt den heliocentrischen Ort der Erde für einen bestimmten Zeitpunkt an, und ist aus Tabellen zu entnehmen.

Die beiden Projectionen der Erdkugelfläche sind concentrische Kreise, deren Radius gleich ist dem der Erdkugel, und werden daher durch einen einzigen Kreis abgebildet erscheinen.

Bezeichnen wir jede Projection auf die Ebene der Erdbahn mit dem Index $_1$ als erste und die andere mit $_2$ als zweite Projection, so stellen in der Fig. 1. dar:

A_1 die Projectionsaxe und zugleich erste Projection der Frühlingsschattengrenze,

$K_1 K_2$ die Projectionen der Erdkugelfläche,

o ihren Mittelpunkt,

$A_1 A_2$ die Erdaxe,

$S_1 S_2$ den diesweiligen Sonnenstrahl,

G_1 senkrecht zu S_1 die erste Projection der diesweiligen Lage der Ebene der Schattengrenze,

$B_1 B_2$ die zur ersten Projectionsebene senkrechte Drehaxe dieser Schattengrenze, wobei B_2 mit A_2 einen Winkel von $23\frac{1}{2}^0$ einschliesst.

Ferner stellt dar:

C_2 die zweite Projection des Aequators,

D_2 eines Parallelkreises der gemässigten Zone,

E_2 des nördlichen Wendekreises,

F_2 eines Parallelkreises der heissen Zone,

H_2 des nördlichen Polarkreises,

L_2 eines Parallelkreises der kalten Zone.

Auf der südlichen Hemisphäre sind die gleich weit vom Aequator abstehenden Parallelkreise mit den nämlichen Buchstaben bezeichnet, die aber mit einem Strich versehen sind.

Der Nord- und Südpol erscheinen in n_2 und s_2 entsprechend abgebildet.

Es handelt sich nun um die Construction der Schnittlinie, in welcher ein gegebener Parallelkreis D durch die Ebene der Schattengrenze G geschnitten wird. Zu diesem Ende construiren wir die Spuren beider Ebenen auf der ersten Projectionsebene; die des Parallelkreises ist in M_1 senkrecht zur Projectionsaxe und die der Schattengrenze in G_1 dargestellt.

Beide erzeugen einen Schnittpunkt a.

Da nun D_2, B_2 die Spuren der nämlichen Ebenen auf der zweiten Projektionsebene darstellen, und sich im Punkte b_2 schneiden, so wird die gerade Schnittlinie dieser Ebenen durch die beiden Punkte a, b vollkommen bestimmt.

Das nämliche geschieht auf der südlichen Hemisphäre mit dem Parallelkreise D', welcher eine gleiche geographische Breite südlich, wie D nördlich besitzt; die Schnittlinie der Ebenen von D' und G ist $a'b'$.

Ein Gleiches lässt sich von jedem der Paare Parallelkreise E, E', F, F', H, H', L, L' anführen, was aus der Zeichnung auch unmittelbar ersichtlich ist.

Projiciren wir nun sämmtliche Parallelkreise auf die Aequatorebene, und stellen die Projection von jedem Paar solcher Parallelkreise in einer eigenen Figur dar.

In Folge dessen erscheinen in der Fig. 2. die Projectionen der beiden Kreise DD' in einem einzigen Kreise abgebildet, wobei die einzelnen bekannten Punkte a, a', b, b', c, c' der Fig. 1. direkt entnommen wurden; ferner ist $a_2d = a_2'd' = a_2o = a_2'o$ gemacht worden.

Die Gerade ab schneidet nun den Parallelkreis D in den Punkten ef und die $a'b'$ ebenso den Kreis D' in $e'f'$.

Senkrecht zu ab ist S als Projection des Sonnenstrahls auf die Aequatorebene.

Hiermit ist für D durch den Bogen egf die Taglänge und in fhe die Nachtlänge construirt.

Ebenso gibt für D' der Bogen $e'gf'$ die Taglänge und $f'he'$ die Nachtlänge.

Somit ist für die nämliche geographische Breite die Taglänge der nördlichen Hemisphäre gleich der Nachtlänge auf der südlichen, und umgekehrt.

Den Punkt a kann man in Fig. 2. unmittelbar erhalten, indem man den Winkel $a_2ca = \alpha$ dem Winkel des jedesmaligen Strahls mit dem Frühlingsstrahle gleich macht. Uebrigens könnte man den Winkel α aus den Tabellen entnehmen und aus ihm mittelst der Formel

$$a_2b \,.\, \mathrm{tg}\,\beta = a_2d \,.\, \mathrm{tg}\,\alpha$$

den Winkel β berechnen.

Ist $\alpha = 0^0$ oder 180^0, so tritt Tag- und Nachtgleiche ein, das geschieht also im Frühlings- und Herbstpunkte.

Für $\alpha = 90^0$ wird auch $\beta = 90^0$, dann steht ef senkrecht zu a_2a_2' und es tritt die grösste Tag- und kleinste Nachtlänge ein, die Erde ist im Sommerpunkte angelangt.

Ebenso sieht man ein, dass wenn $\alpha = 270^0$ wird, d. h. wenn die Erde im Winterpunkte anlangt, die geringste Taglänge aber dafür die grösste Nachtlänge eintritt.

Was auf der nördlichen Hemisphäre von der Taglänge gefunden wurde, gilt für die südliche in Bezug auf Nachtlänge, und umgekehrt.

So entsprechen jeder geographischen Breite, sei es auf der oder jener Halbkugel, ganz bestimmte Tag- und Nachtlängen für jeden gegebenen Winkel α.

Die Fig. 3. stellt uns die Projection der Wendekreise EE' dar, und es sind die Punkte *abcdef* in der nämlichen Bedeutung zu nehmen wie früher.

S, senkrecht zu ab, ist wieder die Projection des Sonnenstrahls auf die Aequatorebene.

In der Fig. 4. sehen wir die nämlichen Verhältnisse für die Parallelkreise FF', nur ist hier zu bemerken, dass die Punkte b, b', d, d' sehr nahe dem Mittelpunkte c gerückt sind, daher: die Differenz der Tag- und Nachtlänge vermindert sich wenn die geographische Breite abnimmt. Am Aequator fallen sämmtliche vier Punkte in den Mittelpunkt desselben, es tritt da immerwährende Tag- und Nachtgleiche ein.

Anders gestalten sich jedoch die Verhältnisse in der kalten Zone. Wir sehen in der Fig. 5. eine ähnliche Darstellung für die Parallelkreise LL' vollzogen.

Die Differenz der Tag- und Nachtlänge wächst hier sehr schnell, und für einen bestimmten Winkel α' wird auf der nördlichen Zone die Nachtlänge, auf der südlichen die Taglänge gleich Null sein, und von da an ist auf der einen fortwährender Tag, auf der andern andauernde Nacht, bis der Strahl einen Winkel $360-2\alpha'$ zurücklegt.

Hierdurch ist die Dauer des langen Tages für jeden Parallelkreis der nördlichen und der langen Nacht der südlichen Polarzone leicht constructiv zu finden. An den Polen herrscht selbstverständlich das eine halbe Jahr Tag und das andere Nacht.

Aus dieser kurzen Darstellung ist ersichtlich, dass der constructive Weg in der Himmelskunde ungemein lehrreich ist und daher die gehörige Berücksichtigung von Fachmännern verdient.

III.

Zur Theorie des Maximums und Minimums.

Von

Franz Unferdinger.

Lehrer der Mathematik an der k. k. Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

In allen mir bisher bekannt gewordenen Lehrsystemen der Differenzialrechnung werden die Kriterien des Grössten und Kleinsten nur für Functionen einer oder zweier Variabeln in erschöpfender Weise entwickelt.

Für Functionen dreier oder mehr Veränderlichen finden sich hier und da nur Andeutungen, welche jedem Sachkenner das Unfertige der Darstellung fühlbar machen.

Dennoch hat bereits vor mehr als 22 Jahren Professor Petzval (als dessen Schüler wir uns dankbar bekennen) an hiesiger Universität in einer Reihe von Vorträgen über die Theorie der linearen Gleichungen diesen Gegenstand ganz allgemein erlediget und in W. v. Haidinger's naturwissenschaftlichen Abhandlungen (II. Bd. 1848) veröffentlicht *).

Sei uns erlaubt diese Theorie abgekürzt auf eine Function von drei Variabeln hier in Erinnerung zu bringen und ein von uns gewähltes Beispiel als Erläuterung derselben anzuschliessen.

---

*) Auch Dr. Herr in seinem Lehrbuch der höheren Mathematik (Wien 1857, 1864) hat von dieser schönen Arbeit keinen Gebrauch gemacht.

§. 1.

Es sei U eine Function der drei Variabeln x, y, z und es werden die Werthe dieser letzteren gesucht, die U zu einem Maximum oder Minimum machen.

Denkt man sich diese Werthe gefunden und in U substituirt, dann aber x, y, z in $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ verwandelt, so dass

(1) . . $U = f(x, y, z)$ in $U + \Delta = f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$

übergeht, so ist U nur dann ein Grösstes, wenn für noch so kleine positive oder negative Werthe von α, β, γ

(2) . . . . . $\Delta < 0$

und nur dann ein Kleinstes, wenn für eben solche α, β, γ

(3) . . . . . $\Delta > 0.$

Nach dem Taylor'schen Satze ist

$$\Delta = \frac{dU}{dx}\alpha + \frac{dU}{dy}\beta + \frac{dU}{dz}\gamma + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\alpha^2 + \frac{d^2U}{dy^2}\beta^2 + \frac{d^2U}{dz^2}\gamma^2\right) + \frac{d^2U}{dxdy}\alpha\beta + \frac{d^2U}{dxdz}\alpha\gamma + \frac{d^2U}{dydz}\beta\gamma \ldots;$$

soll nun eine der beiden Relationen (2), (3) stattfinden, so muss zunächst

$$\frac{dU}{dx}\alpha + \frac{dU}{dy}\beta + \frac{dU}{dz}\gamma = 0$$

sein, denn das Zeichen von Δ hängt ab vom Zeichen dieses Trinoms und kann für beliebige Werthe von α, β, γ beliebig positiv oder negativ gemacht werden, wenn nicht zugleich

(4) . . . . . $\frac{dU}{dx} = 0, \quad \frac{dU}{dy} = 0, \quad \frac{dU}{dz} = 0.$

§. 2.

Hieraus folgt nun weiter, dass für kleine, sonst aber beliebige α, β, γ der Ausdruck:

(5)

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2U}{dx^2}\alpha^2 + \frac{d^2U}{dy^2}\beta^2 + \frac{d^2U}{dz^2}\gamma^2\right) + \left(\frac{d^2U}{dxdy}\alpha\beta + \frac{d^2U}{dxdz}\alpha\gamma + \frac{d^2U}{dydz}\beta\gamma\right)$$

im Falle des Maximums nur negativer, im Falle des Minimums nur positiver Werthe fähig sei.

Der Kürze wegen bezeichnen wir die sechs zweiten Differenzialquotienten so: (11), (22), (33), (12), (13), (23) und führen statt der Variabeln α, β, γ neue ein a, b, c, r durch die Substitutionen $\alpha = ar$, $\beta = br$, $\gamma = cr$; hierdurch geht (5) über in:

$$r^2\{\tfrac{1}{2}(11)a^2 + \tfrac{1}{2}(22)b^2 + \tfrac{1}{2}(33)c^2 + (12)ab + (13)ac + (23)bc\};$$

da nun vier Variabeln vorhanden sind, so ist es gestattet, unbeschadet der Unabhängigkeit von α, β, γ folgende Beziehung unter a, b, c einzuführen:

$$(6) \ldots\ldots\ldots\ldots a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

und es ist nun erforderlich und hinreichend, dass für positive und negative Werthe von a, b, c, welche dieser Gleichung genügen, der Factor:

$$(7) \ldots A = \tfrac{1}{2}(11)a^2 + \tfrac{1}{2}(22)b^2 + \tfrac{1}{2}(33)c^2 + (12)ab + (13)ac + (23)bc$$

im Falle des Maximums nur negativer, im Falle des Minimums nur positiver Werthe fähig sei. r fällt ganz aus der Betrachtung, da es nur auf das Zeichen und nicht auf den Werth des Ausdrucks (5) ankommt. Die Kleinheit der Incremente α, β, γ wird füglich auf dieses r übertragen.

Da die Zahlenwerthe von a, b, c wegen (6) stets unter der Einheit bleiben, so kann A nicht in's Unendliche wachsen und hieraus folgt, dass im ersteren Falle alle Maxima und Minima von A negativ, im zweiten Falle aber positiv sein müssen.

§. 3.

Die Werthe von a, b, c, welche A zu einem relativen Maximum oder Minimum machen, müssen zunächst der Gleichung genügen:

$$(8) \ldots\ldots \left(\frac{dA}{da}\right)\delta a + \left(\frac{dA}{db}\right)\delta b + \left(\frac{dA}{dc}\right)\delta c = 0,$$

wobei aber zwischen δa, δb, δc nach (6) die Beziehung besteht:

$$(9) \ldots\ldots\ldots a\delta a + b\delta b + c\delta c = 0,$$

so dass δa, δb, δc nicht von einander unabhängig sind. Multipliciren wir die Gleichung (9) mit der noch unbestimmt gelassenen Grösse s und subtrahiren von (8), so entsteht:

$$\left\{\left(\frac{dA}{da}\right)-as\right\}da+\left\{\left(\frac{dA}{db}\right)-bs\right\}db+\left\{\left(\frac{dA}{dc}\right)-cs\right\}dc=0$$

und es wird da eliminirt, wenn s so gewählt ist, dass der Coefficient von da verschwindet. In den zwei übrigen Gliedern sind dann db, dc von einander unabhängig und die Gleichung kann nur bestehen, wenn auch die Coefficienten von db, dc je für sich zu Null werden. Alles dieses führt zu den drei Gleichungen:

$$\left(\frac{dA}{da}\right)=as,\quad \left(\frac{dA}{db}\right)=bs,\quad \left(\frac{dA}{dc}\right)=cs$$

oder in entwickelter Form nach (7) zu diesen:

$$(9)\ \ldots\ldots\ldots\ \begin{cases}(11)a+(12)b+(13)c=as,\\ (12)a+(22)b+(23)c=bs,\\ (13)a+(23)b+(33)c=cs;\end{cases}$$

welche in Verbindung mit (6) gerade hinreichen zur Bestimmung von s, und a, b, c jener Werthe, welche A zu einem Maximum oder Minimum machen.

§. 4.

Werden die Gleichungen (9) der Reihe nach mit a, b, c multiplicirt und addirt, so erhält man mit Rücksicht auf (6) und (7):

$$2A=s,\qquad A=\tfrac{1}{2}s,\ ^{*})$$

d. h. die aus den Gleichungen (9) durch Elimination von a, b, c gezogenen Werthe von s geben unmittelbar die Maxima und Minima der Function A. Sind alle s positiv, so hat A nur positive Werthe, sind alle s negativ, so hat A nur negative Werthe, etc. Im ersten Fall ist U ein Minimum, im zweiten Fall ist U ein Maximum.

§. 5.

Um a, b, c aus den Gleichungen (9) zu eliminiren oder genauer gesprochen um die Verhältnisse $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ zu eliminiren, schreiben wir dieselben in folgender Form:

---

*) Dass $A=\frac{1}{2}s$ wird, ist vornehmlich der Gleichung (6) beizumessen, welche zwar willkürlich aber so gewählt wurde, um die Werthe von A in endliche Grenzen einzuschliessen.

$$\{(11)-s\}a+(12)b+(13)c=0,$$
$$(12)a+\{(22)-s\}b+(23)c=0,$$
$$(13)a+(23)b+\{(33)-s\}c=0;\ ^*)$$

dividiren die erste durch (12) (13), die zweite durch (12) (23), die dritte durch (13) (23) und addiren beziehungsweise $\frac{a}{(23)}$, $\frac{b}{(13)}$, $\frac{c}{(12)}$; setzt man noch zur Kürze

$$\frac{a}{(23)}+\frac{b}{(13)}+\frac{c}{(12)}=g,$$

so folgt:

$$\frac{g}{a}=\frac{1}{(23)}+\frac{s-(11)}{(12)\,(13)},$$
$$\frac{g}{b}=\frac{1}{(13)}+\frac{s-(22)}{(12)\,(23)},$$
$$\frac{g}{c}=\frac{1}{(12)}+\frac{s-(33)}{(13)\,(23)};$$

multiplicirt man die erste Gleichung mit (23), die zweite und dritte mit (13) und (12) und addirt die reciproken Producte, so entsteht die Eliminationsgleichung:

$$1=\frac{\frac{(12)\,(13)}{(23)}}{s-\left\{(11)-\frac{(12)\,(13)}{(23)}\right\}}+\frac{\frac{(12)\,(23)}{(13)}}{s-\left\{(22)-\frac{(12)\,(23)}{(13)}\right\}}+\frac{\frac{(13)\,(23)}{(12)}}{s-\left\{(33)-\frac{(13)\,(23)}{(12)}\right\}},$$

und wenn zur Einfachheit die von s subtrahirten Complexe der Ordnung nach durch L, M, N bezeichnet werden, so erlangt dieselbe leicht die Form:

$$\frac{1}{(12)\,(13)\,(23)}(s-L)(s-M)(s-N)$$
$$-\frac{1}{(23)^2}(s-M)(s-N)-\frac{1}{(13)^2}(s-L)(s-N)-\frac{1}{(12)^2}(s-L)(s-M)=0. \quad (10)$$

*) Diese drei Gleichungen sind dieselben, welche in der Theorie der Flächen der zweiten Ordnung auftauchen und das folgende schöne Eliminationsverfahren wurde zuerst von Cauchy in Anwendung gebracht.

§. 6.

In dieser Form der cubischen Gleichung in s ist leicht zu erweisen, dass alle drei Wurzeln derselben reell sind. Bezeichnet P das Gleichungspolynom links, sei ferner um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, $L < M < N$, und substituiren wir in dasselbe der Reihe nach

$$s = -\infty,\ L,\ M,\ N,\ +\infty,$$

so ist die entsprechende Zeichenreihe von P entweder

$$--+-+ \quad \text{oder} \quad +-+--,$$

je nachdem das Product (12)(13)(23) positiv oder negativ ist.

Im ersten Fall liegt eine Wurzel zwischen L und M, die zweite zwischen M und N, die dritte zwischen N und $+\infty$. Im zweiten Fall liegt eine Wurzel zwischen $-\infty$ und L, die zweite zwischen L und M und die dritte zwischen M und N.

Ganz analog verhält sich die Sache, wenn zwischen L, M, N eine andere Beziehung besteht, als die hier benutzte $L < M < N$, da P nach diesen Grössen symmetrisch ist.

§. 7.

Da also sämmtliche Wurzeln der Gleichung (10) reell sind, so erschliessen wir nach einem bekannten Satze der Theorie der Gleichungen die positiven und negativen Wurzeln s aus der Anzahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen des geordneten Polynoms P.

Wird P entwickelt und geordnet nach s, so lautet die Gleichung (10) so:

(11)

$$s^3 - \{(11) + (22) + (33)\}s^2$$
$$-\{(12)^2 + (13)^2 + (23)^2 - (11)(22) - (11)(33) - (22)(33)\}s + \Delta = 0,$$

$$\Delta = (11)(23)^2 + (22)(13)^2 + (33)(12)^2 - (11)(22)(33) - 2(12)(13)(23).$$

Hat diese Gleichung nur Zeichenwechsel, so sind alle s positiv, A ist nur positiver Werthe fähig, dieses zeigt ein Minimum von U.

Hat diese Gleichung nur Zeichenfolgen, so sind alle s negativ, A ist nur negativer Werthe fähig, dieses zeigt ein Maximum von U.

Hat endlich die Gleichung (11) theils Zeichenwechsel, theils Zeichenfolgen, so ist hierfür U weder ein Maximum noch ein Minimum.

§. 8.

Aus der vorstehenden Theorie ergibt sich zur Untersuchung einer Function $U = f(x, y, z)$ bezüglich ihrer grössten und kleinsten Werthe folgendes Verfahren:

1. **Man löse die drei Gleichungen**

$$(1) = \frac{dU}{dx} = 0, \quad (2) = \frac{dU}{dy} = 0, \quad (3) = \frac{dU}{dz} = 0$$

nach x, y, z auf; sei x_1, y_1, z_1 ein System Genüge leistender Werthe.

2. **Mit diesen Werthen berechne man die entsprechenden sechs zweiten Differenzialquotienten (11), (22), (33), (12), (13), (23) und die Coefficienten der Kriteriumgleichung (11).**

3. **Hat die resultirende Gleichung nur Zeichenwechsel, so liefert das System x_1, y_1, z_1 in U eingesetzt ein Minimum.**

4. **Hat diese Gleichung nur Zeichenfolgen, so liefert das System x_1, y_1, z_1 für U ein Maximum.**

5. **Hat die Gleichung (11) theils Zeichenwechsel, theils Zeichenfolgen, so gehört das Werthsystem x_1, y_1, z_1 weder zu einem Maximum noch zu einem Minimum von U *).**

§. 9.

Soll z. B. untersucht werden, ob und für welche Werthe von x, y, z die Function

$$(12) \ldots\ldots U = \frac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)},$$

---

*) Die Kriterien des Grössten und Kleinsten für Functionen einer und zwei Variabelen, folgen aus den Gleichungen (9) als specielle Fälle, indem man beziehungsweise y, z und z constant voraussetzt. Für mehr als drei Veränderliche verweisen wir auf die in der Einleitung citirte Abhandlung Petzvals.

in welcher a, b reelle Constante bedeuten ein, Maximum oder Minimum wird, so erhält man unter Benutzung der bekannten Gleichung $dU = U.d(\lg U)$ nach (4):

$$(13)\ldots\ \begin{cases} (1) = U\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a+x} - \frac{1}{x+y}\right) = 0, \\ (2) = U\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} - \frac{1}{y+z}\right) = 0, \\ (3) = U\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{y+z} - \frac{1}{z+b}\right) = 0; \end{cases}$$

ferner:

$$(14)\ldots\ \begin{cases} (11) = U\left\{u^2 - \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(x+y)^2}\right)\right\} = 0, \\ (22) = U\left\{v^2 - \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(y+z)^2}\right)\right\} = 0, \\ (33) = U\left\{w^2 - \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{(y+z)^2} - \frac{1}{(z+b)^2}\right)\right\} = 0; \\ (12) = U\left\{uv + \frac{1}{(x+y)^2}\right\}, \\ (13) = Uvw, \\ (23) = U\left\{vw + \frac{1}{(y+z)^2}\right\}; \end{cases}$$

wenn die Factoren hinter U in (13) kurz mit u, v, w bezeichnet werden *).

§. 10.

Zur Erfüllung der drei Gleichungen (13) bietet sich zunächst die Annahme $U = 0$ dar und da diese Function auch in der Form:

$$U = \frac{1}{\left(1+\frac{a}{x}\right)\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{b}{z}\right)(y+z)}$$

geschrieben werden kann, so führt dieselbe zu folgenden Werthsystemen von x, y, z, unter h, k endliche Grössen verstanden:

---

*) Der Uebergang von U auf $\lg U$ ist in der Theorie des Maximums und Minimums nur dann gestattet, wenn die Function U keiner negativen Werthe fähig ist.

$$\begin{array}{lllllll} x=\pm\infty, & \pm\infty, & \pm\infty, & h, & \pm\infty, & h, & h, \\ y=\pm\infty, & \pm\infty, & h, & \pm\infty, & h, & \pm\infty, & k, \\ z=\pm\infty, & h, & \pm\infty, & \pm\infty, & k, & k, & \pm\infty \end{array}$$

in allen sieben Fällen erhalten die Factoren hinter U in (13) und (14) entweder den Werth Null oder endliche Werthe, also verschwinden die zweiten Differenzialquotienten.

Auch die sämmtlichen höheren Differenzialquotienten werden der Nulle gleich, d. h. für diese Werthsysteme von x, y, z bleibt U constant, wenn dieselben in $x+\alpha, y+\beta, z+\gamma$ übergehen.

Hieraus folgt, dass $U=0$ weder ein Grösstes noch ein Kleinstes ist.

§. 11.

Setzt man die zweiten Factoren in (13) der Nulle gleich und schliesst das Werthsystem $x=\pm\infty$, $y=\pm\infty$, $z=\pm\infty$, welches auch diesen Gleichungen genügt, wegen $U=0$ aus, so können dieselben auf folgende Form gebracht werden:

$$ay-x^2=0, \qquad xz-y^2=0, \qquad by-z^2=0$$

und ihre Auflösung nach x, y, z liefert die zwei Systeme:

$$(15)\ \ \begin{cases} 1.\ x=+\sqrt[4]{a^3b}, & 2.\ x=-\sqrt[4]{a^3b}, \\ \quad y=+\sqrt[4]{a^2b^2}, & \quad y=+\sqrt[4]{a^2b^2}, \\ \quad z=+\sqrt[4]{ab^3}, & \quad z=-\sqrt[4]{ab^3}; \end{cases}$$

worin von nun an die Wurzeln im absoluten Sinne zu nehmen sind. Dieselben in U substituirt erhält man:

$$U_1=\frac{1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4}, \qquad U_2=\frac{1}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^4};$$

und um zu entscheiden ob diese Werthe Maxima oder Minima bezeichnen, ist nothwendig die Werthe der Coefficienten in der cubischen Gleichung (11) mittelst jener (15) zu berechnen.

§. 12.

Es folgt zunächst, wenn zur Kürze

$$(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^2=\lambda, \qquad (\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^2=\mu$$

gesetzt wird, beziehungsweise:

$$U_1 = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad U_2 = \frac{1}{\mu^2};$$

$$(11) = -\frac{2}{\lambda^3\sqrt[4]{a^5b}}, \quad +\frac{2}{\mu^3\sqrt[4]{a^5b}}, \quad (12) = +\frac{1}{\lambda^3\sqrt[4]{a^4b^2}}, \quad +\frac{1}{\mu^3\sqrt[4]{a^4b^2}},$$

$$(22) = -\frac{2}{\lambda^3\sqrt[4]{a^3b^3}}, \quad +\frac{2}{\mu^3\sqrt[4]{a^3b^3}}. \quad (13) = \qquad 0, \qquad\qquad 0,$$

$$(33) = -\frac{2}{\lambda^3\sqrt[4]{ab^5}}, \quad +\frac{2}{\mu^3\sqrt[4]{ab^5}}, \quad (23) = +\frac{1}{\lambda^3\sqrt[4]{a^2b^4}}, \quad +\frac{1}{\mu^3\sqrt[4]{a^2b^4}}.$$

Hiermit erhält man als

$$(16)\text{....Coefficient von } s^2 \ldots. + \frac{2}{\lambda^3}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{a^5b}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^3b^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ab^5}}\right\},$$
$$- \frac{2}{\mu^3}\left\{\frac{1}{\sqrt[4]{a^5b}} + \frac{1}{\sqrt[4]{a^3b^3}} + \frac{1}{\sqrt[4]{ab^5}}\right\};$$

$$(17)\text{....Coefficient von } s \ldots. + \frac{1}{\lambda^6}\left\{\frac{3}{\sqrt[4]{a^8b^4}} + \frac{4}{\sqrt[4]{a^6b^6}} + \frac{3}{\sqrt[4]{a^4b^8}}\right\},$$
$$- \frac{1}{\mu^6}\left\{\frac{3}{\sqrt[4]{a^8b^4}} + \frac{4}{\sqrt[4]{a^6b^6}} + \frac{3}{\sqrt[4]{a^4b^8}}\right\};$$

$$\Delta = +\frac{4}{\lambda^9\sqrt[4]{a^9b^9}}, \qquad -\frac{4}{\mu^9\sqrt[4]{a^9b^9}}.$$

Sind a und b positiv, so sind λ und μ reell und positiv, die Zeichenreihe der Gleichung (11) ist daher beziehungsweise für U_1, U_2:

$$+ + + +,$$
$$+ - - -,$$

woraus man erkennt, dass U_1 ein Maximum, U_2 aber weder ein Maximum noch ein Minimum ist.

§. 13.

Sind hingegen a, b beide negativ, so verwandeln sich λ, μ beziehungsweise in

$$(\sqrt[4]{-a} + \sqrt[4]{-b})^2 i = \lambda i, \qquad (\sqrt[4]{-a} - \sqrt[4]{-b})^2 i = \mu i,$$

wenn i die imaginäre Einheit bezeichnet. Jedes Glied des Klammerausdrucks in (16) enthält jetzt den Factor:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{-1^6}} = -\frac{1}{i};$$

da λ^3, μ^3 in $-\lambda^3 i$, $-\mu^3 i$ übergehen, so bleibt der Coefficient von s^2 zwar reell, ändert aber sein Zeichen. Jedes Glied des Klammerausdrucks in (17) enthält jetzt den Factor:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{-1^{12}}} = -1,$$

da λ^6, μ^6 übergehen in $-\lambda^6$, $-\mu^6$, so bleibt der Coefficient von s reell und behält sein Vorzeichen.

Endlich entsteht in Δ der Factor

$$\frac{1}{\sqrt[4]{-1^{18}}} = \frac{1}{i}$$

und da λ^9, μ^9 sich in $\lambda^9 i$, $\mu^9 i$ verwandeln, so wird Δ zwar wieder reell, aber wechselt sein Vorzeichen.

Die Zeichenreihe der Gleichung (11) ist nun beziehungsweise für U_1, U_2:

$$+ - + -,$$
$$+ + - +,$$

woraus man erkennt, dass U_1 ein Minimum bezeichnet und zwar ist

$$(19) \ldots\ldots\ldots U_1 = -\frac{1}{(\sqrt[4]{-a} + \sqrt[4]{-b})^4},$$

U_2 aber ist weder ein Maximum noch ein Minimum.

Haben a, b entgegengesetzte Vorzeichen, so werden die x, y, z in (15) imaginär, λ, μ, U_1, U_2 werden complex und bezeichnen beide weder ein Maximum noch ein Minimum.

§. 14.

Dass die Function U für negative Werthe von a und b das Minimum (19) hat, kann noch auf folgende Art verificirt werden.

Gehen wir für positive a und b von folgender Function aus:

$$U = \frac{xyz}{(-a+x)(x+y)(y+z)(z-b)},$$

welche diesem Fall entspricht und führen neue Variabele u, v, w ein, durch die Substitutionen $x = -u$, $y = -v$, $z = -w$, so wird:

$$U = -\frac{uvw}{(a+u)(u+v)(v+w)(w+b)} = -V.$$

Die Function V entspricht nun dem ersten Falle, in welchem a und b positiv, und hat nach dem Vorhergehenden das Maximum:

$$V = \frac{1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4};$$

daher ist:

$$U = -\frac{1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4}$$

ein Minimum von U.

Das Ergebniss dieser Untersuchung ist nun folgendes: Die Function

$$U = \frac{xyz}{(a+x)(x+y)(y+z)(z+b)}$$

ist für $U = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimum. Wenn a und b positiv sind, so hat U das Maximum

$$\frac{1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4}$$

und kein Minimum. Sind a und b negativ, so hat U das Minimum

$$-\frac{1}{(\sqrt[4]{-a}+\sqrt[4]{-b})^4}$$

und kein Maximum. Haben a und b ungleiche Vorzeichen, so hat U weder ein Maximum noch ein Minimum *).

*) Studnička in seiner Einleitung zur Theorie der Determinanten (Prag, 1871) hat obige Function ebenfalls untersucht und kommt dabei zu dem falschen Resultat, das Maximum derselben sei

$$\frac{1}{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^4} \quad \text{und das Minimum} \quad \frac{1}{(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})^4}.$$

IV.

Ueber eine Transformation des bestimmten Integrals

$$\int_0^{\alpha} \lg \frac{a+b\cos x}{a-b\cos x}\,dx.$$

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,
Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

Durch gewöhnliche Integration mit $\sin x = z$ findet man leicht:

$$\int_0^{\alpha} \frac{\cos x}{1-y^2\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{y\sqrt{1-y^2}} \text{ arc. tg } \frac{y\sin\alpha}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \alpha \gtreqless \tfrac{1}{2}\pi$$

und der Ausdruck rechts erscheint in reeller Form mit der Bedingung $y < 1$; damit die Function unter dem Integralzeichen inner den Grenzen 0, α endlich und stetig bleibt ist die Bedingung $y\cos\alpha < 1$ nothwendig.

Wird beiderseits mit $2dy$ multiplicirt, nach y von 0 bis $\beta \gtrless 0 \lessgtr 1$ integrirt und links die Ordnung der Integration umgekehrt, was nach obiger Bedingung erlaubt ist, so folgt:

$$\int_0^{\alpha} \lg \frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x}\,dx = 2\int_0^{\beta} \frac{dy}{y\sqrt{1-y^2}} \text{ arc. tg } \frac{y\sin\alpha}{\sqrt{1-y^2}}, \quad \beta \gtrless 0 \lessgtr 1.$$

Führt man falls durch die Substitution $y = \sin x$ statt y die Variabele x ein, wodurch die Integrationsgrenzen 0, β in 0, $\arcsin\beta$ übergehen, so wird:

$$\text{1)}^{*)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg\frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x}\,dx = 2\int_0^{\arcsin\beta} \frac{\operatorname{arc.tg}(\sin\alpha\operatorname{tg}x)}{\sin x}\,dx, \quad \beta \gtrless 0$$

oder für $\beta = \frac{b}{a}$, wenn a, b positive Constante bezeichnen:

$$\text{2)}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg\frac{a+b\cos x}{a-b\cos x}\,dx = 2\int_0^{\arcsin\frac{b}{a}} \frac{\operatorname{arc.tg}(\sin\alpha\operatorname{tg}x)}{\sin x}\,dx, \quad b < a.$$

Speciell für $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ folgt aus 1):

$$\text{(3)} \ldots \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg\frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x}\,dx = 2\int_0^{\arcsin\beta} \frac{x}{\sin x}\,dx, \quad \beta \gtrless 0;$$

diese Gleichung kann leicht mit Hilfe der unendlichen Reihen verificirt werden auf folgende Art:

Für $\beta \overset{=}{<} 1$ ist immer

$$\lg\frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x} = 2\left\{\beta\cos x + \frac{\beta^3}{3}\cos^3 x + \frac{\beta^5}{5}\cos^5 x + \ldots\right\};$$

multiplicirt man mit dx, integrirt von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und benützt für die rechte Seite die bekannte Formel:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\cos x)^{2n+1}\,dx = \frac{2.4.6.\ldots(2n-2)2n}{3.5.7.\ldots(2n-1)(2n+1)},$$

so ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg\frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x}\,dx = 2\left\{\beta + \frac{2}{3}\frac{\beta^3}{3} + \frac{2.4}{3.5}\frac{\beta^5}{5} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{\beta^7}{7} + \ldots\right\}.$$

*) Diese bemerkenswerthe Transformation hat zuerst Professor Winckler [illegible] auf anderem Weg. S. Denkschriften der Wiener Akadem., Bd. 20, p. 175.

Bezeichnet man die Summe der für $\beta < 1$ convergenten Reihe mit B, so ist nach den Lehren der algebraischen Analysis:

$$\frac{dB}{d\beta} = 1 + \frac{2}{3}\beta^2 + \frac{2.4}{3.5}\beta^4 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\beta^6 + \ldots = \frac{\text{arc.sin}\,\beta}{\beta\sqrt{1-\beta^2}},$$

mithin auch:

(3)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \lg\frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x}\,dx = 2\int_0^{\beta} \frac{\text{arc.sin}\,\beta}{\beta\sqrt{1-\beta^2}}\,d\beta = 2\int_0^{\text{arc.sin}\,\beta} \frac{x}{\sin x}\,dx.$$

Wendet man auf das Integrale (1) die theilweise Integration an $\int u dv = uv - \int v du$, mit $dv = dx$, so wird:

$$\int_0^{\alpha} \lg\frac{1+\beta\cos x}{1-\beta\cos x}\,dx = \alpha\lg\frac{1+\beta\cos\alpha}{1-\beta\cos\alpha} + 2\beta\int_0^{\alpha} \frac{x\sin x}{1-\beta^2\cos^2 x}\,dx,$$

mithin ist auch:

$$\int_0^{\text{arc.sin}\,\beta} \frac{\text{arc.tg}\,(\sin\alpha\,\text{tg}\,x)}{\sin x}\,dx = \tfrac{1}{2}\alpha\,\lg\frac{1+\beta\cos\alpha}{1-\beta\cos\alpha} + \beta\int_0^{\alpha} \frac{x\sin x}{1-\beta^2\cos^2 x}\,dx,$$

oder für $\text{arc.sin}\,\beta = \lambda$, $\sin\alpha = k$:

(4)

$$\int_0^{\lambda} \frac{\text{arc.tg}\,(k\,\text{tg}\,x)}{\sin x}\,dx = \tfrac{1}{2}\text{arc.sin}\,k\lg\frac{1+\sqrt{1-k^2}\sin\lambda}{1-\sqrt{1-k^2}\sin\lambda} + \sin\lambda\int_0^{\text{arc.sin}\,k} \frac{x\sin x}{1-\sin^2\lambda\cos^2 x}\,dx, \quad k \gtreqless 1.$$

Hiernach wird z. B. für $\lambda = \frac{1}{2}\pi$:

(5)

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\text{arc.tg}\,(k\,\text{tg}\,x)}{\sin x}\,dx = \tfrac{1}{2}\text{arc.sin}\,k\lg\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{1-\sqrt{1-k^2}} + \int_0^{\text{arc.sin}\,k} \frac{x}{\sin x}\,dx$$

und für $k = 1$:

(6) . . . . $$\int_0^{\lambda} \frac{x}{\sin x}\,dx = \sin\lambda\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{x\sin x}{1-\sin^2\lambda\cos^2 x}\,dx.$$

V.

Ueber das Gleichgewicht zwischen drei Kräften.

Von

dem Herausgeber,

(Fig. s. Taf. II.)

§. 1.

In der Abhandlung Thl. XLVI. Nr. XIII. §. 5. ist bewiesen worden, dass, wenn drei Kräfte im Gleichgewichte sind, deren Richtungslinien immer in einer Ebene liegen müssen, so dass also zwischen drei Kräften Gleichgewicht nur dann Statt finden kann, wenn deren Richtungslinien in einer Ebene liegen, welche Ebene also als Ebene der xy angenommen werden kann.

Die Gleichungen der Richtungslinien dreier in der Ebene der xy wirkender Kräfte seien nun:

$$1)\ldots\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}\dfrac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\dfrac{y-y_0}{\cos\beta_0},\\[2ex]\dfrac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-y_1}{\cos\beta_1},\\[2ex]\dfrac{x-x_2}{\cos\alpha_2}=\dfrac{y-y_2}{\cos\beta_2}\end{array}\right.$$

oder:

$$2)\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l}x\cos\beta_0-y\cos\alpha_0=x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0,\\x\cos\beta_1-y\cos\alpha_1=x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1,\\x\cos\beta_2-y\cos\alpha_2=x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2;\end{array}\right.$$

wo wir die Punkte (x_0y_0), (x_1y_1), (x_2y_2) durch A_0, A_1, A_2 bezeichnen wollen.

Bekanntlich (m. s. a. a. O.) werden die positiven Richtungen der Richtungslinien durch die Winkel α_0, β_0; α_1, β_1; α_2, β_2 bestimmt, und die Kräfte werden als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem sie nach den positiven oder negativen Richtungen ihrer Richtungslinien wirken; mit Rücksicht hierauf sollen dieselben im Folgenden durch P_0, P_1, P_2 bezeichnet werden.

§. 2.

Die Bedingungsgleichung, dass überhaupt drei durch die Gleichungen:

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x\cos\beta_0 - y\cos\alpha_0 = x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0, \\ x\cos\beta_1 - y\cos\alpha_1 = x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1, \\ x\cos\beta_2 - y\cos\alpha_2 = x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2 \end{array} \right.$$

charakterisirte gerade Linien sich in einem Punkte schneiden, erhält man, wenn man aus diesen Gleichungen die Coordinaten x, y ganz eliminirt. Zu dem Ende multiplicire man die drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2,$$

$$\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0,$$

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1$$

und addire die dadurch entstehenden Gleichungen zu einander, so ergiebt sich auf der Stelle die Gleichung:

4)

$$\left. \begin{array}{l} (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\ + (\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ + (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \end{array} \right\} = 0$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung.

§. 3.

Die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der drei Kräfte sind nach Thl. XLVI. Nr. XIII. §. 11.:

5)... $\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0;$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$6)\ldots \begin{cases} a_0 = P_0\cos\alpha_0, & a_1 = P_1\cos\alpha_1, & a_2 = P_2\cos\alpha_2; \\ b_0 = P_0\cos\beta_0, & b_1 = P_1\cos\beta_1, & b_2 = P_2\cos\beta_2 \end{cases}$$

setzen:

7)

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad b_0 + b_1 + b_2 = 0,$$
$$(b_0x_0 - a_0y_0) + (b_1x_1 - a_1y_1) + (b_2x_2 - a_2y_2) = 0.$$

Wenn also, wie wir von jetzt an immer voraussetzen wollen, die drei Kräfte P_0, P_1, P_2 unter einander im Gleichgewichte sind, so sind diese drei Gleichungen 7) jederzeit erfüllt.

Nach 4) ist

$$\left.\begin{aligned} &(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\ +\ &(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ +\ &(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \end{aligned}\right\} = 0$$

die Bedingungsgleichung, dass die Richtungslinien der drei sich im Gleichgewichte befindenden Kräfte P_0, P_1, P_2 sich in einem Punkte schneiden. Unter der Voraussetzung, dass keine dieser drei Kräfte verschwindet, ist die vorstehende Bedingungsgleichung erfüllt, wenn die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &P_0P_1P_2(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\cos\alpha_2)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\ +\ &P_0P_1P_2(\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\beta_2\cos\alpha_0)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ +\ &P_0P_1P_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \end{aligned}\right\} = 0,$$

nämlich die Gleichung

$$\left.\begin{aligned} &(P_1\cos\alpha_1 . P_2\cos\beta_2 - P_1\cos\beta_1 . P_2\cos\alpha_2) . P_0(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\ +\ &(P_2\cos\alpha_2 . P_0\cos\beta_0 - P_2\cos\beta_2 . P_0\cos\alpha_0) . P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ +\ &(P_0\cos\alpha_0 . P_1\cos\beta_1 - P_0\cos\beta_0 . P_1\cos\alpha_1) . P_2(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \end{aligned}\right\} = 0$$

oder nach 6) die Gleichung

$$8)\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{aligned} &(a_1b_2 - b_1a_2)(b_0x_0 - a_0y_0) \\ +\ &(a_2b_0 - b_2a_0)(b_1x_1 - a_1y_1) \\ +\ &(a_0b_1 - b_0a_1)(b_2x_2 - a_2y_2) \end{aligned}\right\} = 0$$

erfüllt ist.

Nach 7) ist:

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0,$$
$$b_0 + b_1 + b_2 = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen nach der Reihe mit

$$\frac{b_0}{a_0}, \quad \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{b_2}{a_2};$$

und zieht sie dann von einander ab, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$(a_0b_1 - b_0a_1) - (a_2b_0 - b_2a_0) = 0,$$
$$(a_1b_2 - b_1a_2) - (a_0b_1 - b_0a_1) = 0,$$
$$(a_2b_0 - b_2a_0) - (a_1b_2 - b_1a_2) = 0;$$

und es ist also:

$$a_0b_1 - b_0a_1 = a_1b_2 - b_1a_2 = a_2b_0 - b_2a_0.$$

Setzen wir nun

$$G = a_0b_1 - b_0a_1 = a_1b_2 - b_1a_2 = a_2b_0 - b_2a_0,$$

so wird die Gleichung 8):

$$G(b_0x_0 - a_0y_0) + G(b_1x_1 - a_1y_1) + G(b_2x_2 - a_2y_2) = 0$$

oder:

$$G\{(b_0x_0 - a_0y_0) + (b_1x_1 - a_1y_1) + (b_2x_2 - a_2y_2)\} = 0,$$

und ist also unter der Voraussetzung, dass die drei Kräfte P_0, P_1, P_2 unter einander im Gleichgewichte sind, jederzeit erfüllt, weil nach 7) unter dieser Voraussetzung

$$(b_0x_0 - a_0y_0) + (b_1x_1 - a_1y_1) + (b_2x_2 - a_2y_2) = 0$$

ist.

Unter der Voraussetzung, dass die drei Kräfte P_0, P_1, P_2 unter einander im Gleichgewichte sind, ist also die Bedingungsgleichung, dass ihre drei Richtungslinien sich in einem Punkte schneiden, jederzeit erfüllt, und die drei Richtungslinien schneiden sich also unter der in Rede stehenden Voraussetzung in einem Punkte.

Angenommen haben wir jedoch, dass keine der drei Kräfte P_0, P_1, P_2 verschwinde. Verschwindet aber eine dieser drei Kräfte, so müssen im Falle des Gleichgewichts die beiden anderen

absolut gleich sein und nach direct entgegengesetzten Richtungen hin wirken, so dass also die Richtungslinien derselben zusammenfallen, in gewisser Rücksicht also auch als sich schneidend betrachtet werden können. Verschwinden zwei der drei gegebenen Kräfte, so muss im Falle des Gleichgewichts auch die dritte Kraft verschwinden.

Hiernach können wir also den folgenden Satz aussprechen:

Wenn drei in einer Ebene wirkende Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind *), so schneiden sich ihre drei Richtungslinien in einem Punkte, und drei in einer Ebene wirkende Kräfte können also nur dann unter einander im Gleichgewichte sein, wenn ihre drei Richtungslinien sich in einem Punkte schneiden.

§. 4.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Richtungslinien der drei sich im Gleichgewichte befindenden Kräfte P_0, P_1, P_2 durch X, Y; so finden zwischen denselben nach 2) die Gleichungen:

$$X\cos\beta_0 - Y\cos\alpha_0 = x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0,$$
$$X\cos\beta_1 - Y\cos\alpha_1 = x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1,$$
$$X\cos\beta_2 - Y\cos\alpha_2 = x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2;$$

also die Gleichungen:

$$X.P_0\cos\beta_0 - Y.P_0\cos\alpha_0 = x_0.P_0\cos\beta_0 - y_0.P_0\cos\alpha_0,$$
$$X.P_1\cos\beta_1 - Y.P_1\cos\alpha_1 = x_1.P_1\cos\beta_1 - y_1.P_1\cos\alpha_1,$$
$$X.P_2\cos\beta_2 - Y.P_2\cos\alpha_2 = x_2.P_2\cos\beta_2 - y_2.P_2\cos\alpha_2;$$

folglich nach 6) die Gleichungen:

$$b_0X - a_0Y = b_0x_0 - a_0y_0,$$
$$b_1X - a_1Y = b_1x_1 - a_1y_1,$$
$$b_2X - a_2Y = b_2x_2 - a_2y_2$$

Statt.

---

*) Dass drei nicht in einer Ebene wirkende Kräfte überhaupt nicht unter einander im Gleichgewichte sein können, wissen wir aus dem Obigen.

Multiplicirt man diese Gleichungen zuerst nach der Reihe mit

$$a_1 - a_2, \qquad a_2 - a_0, \qquad a_0 - a_1;$$

dann nach der Reihe mit

$$b_1 - b_2, \qquad b_2 - b_0, \qquad b_0 - b_1;$$

und addirt sie in beiden Fällen zu einander, so erhält man:

$$\begin{aligned} -\{(a_0b_1 - b_0a_1) + (a_1b_2 - b_1a_2) + (a_2b_0 - b_2a_0)\}X \\ = (a_1 - a_2)(b_0x_0 - a_0y_0) \\ + (a_2 - a_0)(b_1x_1 - a_1y_1) \\ + (a_0 - a_1)(b_2x_2 - a_2y_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\{(a_0b_1 - b_0a_1) + (a_1b_2 - b_1a_2) + (a_2b_0 - b_2a_0)\}Y \\ = (b_1 - b_2)(b_0x_0 - a_0y_0) \\ + (b_2 - b_0)(b_1x_1 - a_1y_1) \\ + (b_0 - b_1)(b_2x_2 - a_2y_2); \end{aligned}$$

also nach dem Obigen:

9) . . . . . $\begin{aligned} -3GX = (a_1 - a_2)(b_0x_0 - a_0y_0) \\ + (a_2 - a_0)(b_1x_1 - a_1y_1) \\ + (a_0 - a_1)(b_2x_2 - a_2y_2), \end{aligned}$

$$\begin{aligned} -3GY = (b_1 - b_2)(b_0x_0 - a_0y_0) \\ + (b_2 - b_0)(b_1x_1 - a_1y_1) \\ + (b_0 - b_1)(b_2x_2 - a_2y_2); \end{aligned}$$

wo bekanntlich

10) . . . $G = a_0b_1 - b_0a_1 = a_1b_2 - b_1a_2 = a_2b_0 - b_2a_0$

ist.

§. 5.

In dem Dreiecke $A_0A_1A_2$ wollen wir jetzt A_0 als den Anfang des Coordinatensystems der xy, die Seite A_0A_1 sls den positiven Theil der Axe der x annehmen; dann ist:

$$x_0 = 0, \qquad y_0 = 0, \qquad y_1 = 0;$$

und $x_1 = A_0A_1$.

Also ist nach 9):

$$\begin{aligned} -3GX &= (a_2 - a_0)b_1x_1 + (a_0 - a_1)(b_2x_2 - a_2y_2), \\ -3GY &= (b_2 - b_0)b_1x_1 + (b_0 - b_1)(b_2x_2 - a_2y_2); \end{aligned}$$

weil nun aber nach 7):

$$(b_0x_0 - a_0y_0) + (b_1x_1 - a_1y_1) + (b_2x_2 - a_2y_2) = 0$$

ist, so ist unter den gemachten Voraussetzungen:

$$b_1x_1 + (b_2x_2 - a_2y_2) = 0,$$

also:

$$b_2x_2 - a_2y_2 = -b_1x_1,$$

und folglich, wenn man dies in die obigen Ausdrücke von $-3GX$ und $-3GY$ einführt, wie man leicht findet:

$$-3GX = (-2a_0 + a_1 + a_2)b_1x_1,$$
$$-3GY = (-2b_0 + b_1 + b_2)b_1x_1;$$

also, weil nach 7):

$$a_1 + a_2 = -a_0, \qquad b_1 + b_2 = -b_0$$

ist, offenbar:

11) . . . . . $X = \frac{a_0b_1x_1}{G}, \qquad Y = \frac{b_0b_1x_1}{G}.$

Nach dem Obigen ist:

$$a_0b_1 = P_0P_1\cos\alpha_0\cos\beta_1, \qquad b_0b_1 = P_0P_1\cos\beta_0\cos\beta_1$$

und

$$G = a_0b_1 - b_0a_1 = P_0P_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1);$$

also ist:

12) . . . . . $\left\{\begin{array}{l} X = \frac{\cos\alpha_0\cos\beta_1}{\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1}x_1, \\ Y = \frac{\cos\beta_0\cos\beta_1}{\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1}x_1; \end{array}\right.$

folglich:

13) . . . . . $X : Y = \cos\alpha_0 : \cos\beta_0$

und

14) . . . . $X^2 + Y^2 = \frac{\cos\beta_1{}^2}{(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1)^2}x_1{}^2.$

Bezeichnet man durch α_0, α_1, α_2 die Winkel, welche die positiven Theile der Richtungslinien der Kräfte mit dem positiven Theile der Axe der x einschliessen, indem man diese Winkel

von dem positiven Theile der Axe der x an durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch oder nach dem positiven Theile der Axe der y hin, von 0 bis 360° zählt; so muss man bekanntlich für

$$\cos\alpha_0,\ \cos\beta_0;\quad \cos\alpha_1,\ \cos\beta_1;\quad \cos\alpha_2,\ \cos\beta_2$$

im Obigen beziehungsweise

$$\cos\alpha_0,\ \sin\alpha_0;\quad \cos\alpha_1,\ \sin\alpha_1;\quad \cos\alpha_2,\ \sin\alpha_2$$

setzen, und erhält dadurch sehr leicht:

$$15)\ \ldots\ldots\ \begin{cases} X = -\dfrac{\cos\alpha_0 \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_0-\alpha_1)}\, x_1, \\ Y = -\dfrac{\sin\alpha_0 \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_0-\alpha_1)}\, x_1; \end{cases}$$

ferner:

$$16)\ \ldots\ldots\ X : Y = \cos\alpha_0 : \sin\alpha_0$$

und

$$17)\ \ldots\ldots\ X^2 + Y^2 = \frac{\sin\alpha_1{}^2}{\sin(\alpha_0-\alpha_1)^2}\, x_1{}^2.$$

§. 6.

Wir wollen jetzt annehmen, dass der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt (XY) der Richtungslinien der drei sich im Gleichgewichte befindenden Kräfte P_0, P_1, P_2 der Schwerpunkt S des Dreiecks $A_0A_1A_2$ sei, und wollen dessen Entfernungen SA_0, SA_1, SA_2 von den drei Punkten A_0, A_1, A_2 beziehungsweise durch E_0, E_1, E_2 bezeichnen. Das rechtwinklige Coordinatensystem der xy nehmen wir ganz eben so wie im vorhergehenden Paragraphen an, und wollen zugleich die als von A_0, A_1, A_2 ausgehend gedachten Geraden A_0S, A_1S, A_2S als die positiven Richtungen der Kräfte P_0, P_1, P_2 annehmen; die Winkel α_0, α_1, α_2 nehmen wir ganz ebenso an wie im vorhergehenden Paragraphen.

Hiernach ist nun nach den Lehren der analytischen Geometrie allgemein:

$$X = E_0\cos\alpha_0; \qquad Y = E_0\sin\alpha_0.$$

Legen wir durch A_1 als Anfang ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der $x'y'$, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten des Schwerpunkts S durch X', Y'; so ist:

$$X' = E_1\cos\alpha_1, \qquad Y' = E_1\sin\alpha_1.$$

Weil aber x_1, 0 die primitiven Coordinaten von A_1 sind, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$X = x_1 + X', \qquad Y = Y';$$

also:

$$X' = X - x_1, \qquad Y' = Y;$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$X - x_1 = E_1 \cos\alpha_1, \qquad Y = E_1 \sin\alpha_1.$$

Legen wir durch A_2 als Anfang ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der $x''y''$, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten des Schwerpunkts S durch X'', Y''; so ist:

$$X'' = E_2 \cos\alpha_2, \qquad Y'' = E_2 \sin\alpha_2.$$

Weil aber x_2, y_2 die primitiven Coordinaten von A_2 sind, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$X = x_2 + X'', \qquad Y = y_2 + Y'';$$

also:

$$X'' = X - x_2, \qquad Y'' = Y - y_2;$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$X - x_2 = E_2 \cos\alpha_2, \qquad Y - y_2 = E_2 \sin\alpha_2.$$

Nach der Lehre vom Schwerpunkte ist bekanntlich:

$$X = \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2), \qquad Y = \tfrac{1}{3}y_2;$$

also:

$$X = \tfrac{1}{3}(x_1 + x_2), \qquad Y = \tfrac{1}{3}y_2;$$

$$X - x_1 = \tfrac{1}{3}(x_2 - 2x_1), \qquad Y = \tfrac{1}{3}y_2;$$

$$X - x_2 = \tfrac{1}{3}(x_1 - 2x_2), \qquad Y - y_2 = -\tfrac{2}{3}y_2;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\cos\alpha_0 = \frac{x_1 + x_2}{3E_0}, \qquad \sin\alpha_0 = \frac{y_2}{3E_0};$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_2 - 2x_1}{3E_1}, \qquad \sin\alpha_1 = \frac{y_2}{3E_1};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{x_1 - 2x_2}{3E_2}, \qquad \sin\alpha_2 = -\frac{2y_2}{3E_2}.$$

Weil nach der Voraussetzung die Kräfte P_0, P_1, P_2 unter einander im Gleichgewichte sind, so ist:

$$P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 = 0,$$

$$P_0 \sin\alpha_0 + P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 = 0;$$

also:

$$P_0(\cos\alpha_0 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_0 \cos\alpha_2) + P_1(\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 - \sin\alpha_1 \cos\alpha_2) = 0,$$

$$P_0(\cos\alpha_0 \sin\alpha_1 - \sin\alpha_0 \cos\alpha_1) + P_2(\cos\alpha_2 \sin\alpha_1 - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1) = 0;$$

oder:

$$P_0 \sin(\alpha_2 - \alpha_0) - P_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0,$$

$$P_0 \sin(\alpha_0 - \alpha_1) - P_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) = 0;$$

folglich:

$$\frac{P_0}{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{P_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha_0)} = \frac{P_2}{\sin(\alpha_0 - \alpha_1)}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha_0 - \alpha_1) &= \sin\alpha_0 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \sin\alpha_1 \\
&= \frac{y_2(x_2 - 2x_1) - (x_1 + x_2)y_2}{9E_0E_1} \\
&= -\frac{x_1 y_2}{3E_0E_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha_1 - \alpha_2) &= \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \\
&= \frac{y_2(x_1 - 2x_2) + 2(x_2 - 2x_1)y_2}{9E_1E_2} \\
&= -\frac{x_1 y_2}{3E_1E_2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha_2 - \alpha_0) &= \sin\alpha_2 \cos\alpha_0 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_0 \\
&= \frac{-2y_2(x_1 + x_2) - (x_1 - 2x_2)y_2}{9E_2E_0} \\
&= -\frac{x_1 y_2}{3E_2E_0};
\end{aligned}$$

also nach den obigen Gleichungen offenbar:

$$P_0E_1E_2 = P_1E_2E_0 = P_2E_0E_1,$$

und folglich, wenn man mit $E_0E_1E_2$ dividirt:

$$\frac{P_0}{E_0} = \frac{P_1}{E_1} = \frac{P_2}{E_2},$$

also:

$$P_0 : P_1 : P_2 = E_0 : E_1 : E_2.$$

Aus dem Bisherigen ergiebt sich der folgende Satz:

Wenn in dem Schwerpunkte S eines Dreiecks $A_0A_1A_2$ drei Kräfte wirken, deren Richtungslinien durch die Spitzen A_0, A_1, A_2 dieses Dreiecks gehen, und diese drei Kräfte unter einander im Gleichgewichte sind; so verhalten sich diese Kräfte zu einander jederzeit wie die Entfernungen SA_0, SA_1, SA_2 des Schwerpunkts S von den drei Spitzen A_0, A_1, A_2 des Dreiecks.

Anmerkung. Hieraus ergiebt sich auch, dass unter den gemachten Voraussetzungen die drei Kräfte immer entweder sämmtlich positiv oder sämmtlich negativ sind, also nur auf eine der beiden in Fig. 1. und Fig. 2. dargestellten Arten an dem Schwerpunkte S wirken können.

Wir wollen jetzt umgekehrt annehmen, dass in dem Schwerpunkte S eines Dreiecks $A_0A_1A_2$ drei sich zu einander wie die Entfernungen SA_0, SA_1, SA_2 des Schwerpunkts S von den Spitzen A_0, A_1, A_2 des Dreiecks zu einander verhaltende Kräfte P_0, P_1, P_2 wirken, deren Richtungslinien durch die Spitzen A_0, A_1, A_2 des Dreiecks gehen.

Behalten wir alle vorher gebrauchten Bezeichnungen bei, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$3E_0\cos\alpha_0 = x_1 + x_2, \qquad 3E_0\sin\alpha_0 = y_2;$$
$$3E_1\cos\alpha_1 = x_2 - 2x_1, \qquad 3E_1\sin\alpha_1 = y_2;$$
$$3E_2\cos\alpha_2 = x_1 - 2x_2, \qquad 3E_2\sin\alpha_2 = 2y_2;$$

also, wenn man addirt:

$$3(E_0\cos\alpha_0 + E_1\cos\alpha_1 + E_2\cos\alpha_2) = 0,$$
$$3(E_0\sin\alpha_0 + E_1\sin\alpha_1 + E_2\sin\alpha_2) = 0;$$

folglich:

$$E_0\cos\alpha_0 + E_1\cos\alpha_1 + E_2\cos\alpha_2 = 0,$$
$$E_0\sin\alpha_0 + E_1\sin\alpha_1 + E_2\sin\alpha_2 = 0.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$3E_1x_1\sin\alpha_1 + 3E_2(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)$$
$$= x_1y_2 - 2x_2y_2 - (x_1 - 2x_2)y_2 = 0,$$

also:

$$E_1 x_1 \sin\alpha_1 + E_2(x_2 \sin\alpha_2 - y_2 \cos\alpha_2) = 0,$$

und folglich unter den wegen des Coordinatensystems gemachten Voraussetzungen:

$$\left.\begin{aligned} &E_0(x_0 \sin\alpha_0 - y_0 \cos\alpha_0) \\ +\,&E_1(x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1) \\ +\,&E_2(x_2 \sin\alpha_2 - y_2 \cos\alpha_2) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Also haben wir die drei folgenden Gleichungen:

$$E_0 \cos\alpha_0 + E_1 \cos\alpha_1 + E_2 \cos\alpha_2 = 0,$$

$$E_0 \sin\alpha_0 + E_1 \sin\alpha_1 + E_2 \sin\alpha_2 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &E_0(x_0 \sin\alpha_0 - y_0 \cos\alpha_0) \\ +\,&E_1(x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1) \\ +\,&E_2(x_2 \sin\alpha_2 - y_2 \cos\alpha_2) \end{aligned}\right\} = 0;$$

folglich, weil nach der Voraussetzung

$$E_0 : E_1 : E_2 = P_0 : P_1 : P_2$$

ist, die drei Gleichungen:

$$P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 = 0,$$

$$P_0 \sin\alpha_0 + P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &P_0(x_0 \sin\alpha_0 - y_0 \cos\alpha_0) \\ +\,&P_1(x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1) \\ +\,&P_2(x_2 \sin\alpha_2 - y_2 \cos\alpha_2) \end{aligned}\right\} = 0$$

oder:

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \qquad \Sigma P \sin\alpha = 0, \qquad \Sigma P(x \sin\alpha - y \cos\alpha) = 0;$$

woraus bekanntlich folgt, dass unter den gemachten Voraussetzungen die drei Kräfte P_0, P_1, P_2 unter einander im Gleichgewichte sind, und sich daher der folgende Satz ergiebt:

Wenn in dem Schwerpunkte S eines Dreiecks $A_0A_1A_2$ drei Kräfte wirken, deren Richtungslinien durch die Spitzen A_0, A_1, A_2 dieses Dreiecks gehen, und die sich wie die Entfernungen SA_0, SA_1, SA_2 des Schwerpunkts S von den drei Spitzen A_0, A_1, A_2 des Dreiecks zu einander verhalten; so sind diese Kräfte jederzeit unter einander im Gleichgewichte.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen ergiebt sich aber unmittelbar der folgende Satz·

Wenn in dem Schwerpunkte S eines Dreiecks $A_0A_1A_2$ drei Kräfte wirken, deren Richtungslinien durch die Spitzen A_0, A_1, A_2 dieses Dreiecks gehen; so wird das Gleichgewicht zwischen diesen drei Kräften dadurch nothwendig und vollständig bedingt, dass diese drei Kräfte sich zu einander wie die Entfernungen SA_0, SA_1, SA_2 des Schwerpunkts S von den drei Spitzen des Dreiecks verhalten.

VI.

Ueber das Gleichgewicht zwischen vier in einer Ebene wirkenden Kräften.

Von

dem Herausgeber.

(Fig. s. Taf. II.)

---

§. 1.

Vier in einer Ebene, die wir als Ebene der rechtwinkligen xy annehmen, liegende Punkte seien

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3;$$

die Coordinaten dieser Punkte seien beziehungsweise:

$$x_0, y_0; \quad x_1, y_1; \quad x_2, y_2; \quad x_3, y_3.$$

Die Gleichungen der durch die Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

gehenden Richtungslinien (m. s. hier und überall im Folgenden meine Abhandlung über die Grundlehren der Statik in Thl. XLVI. Nr. XIII.) von vier in der in Rede stehenden Ebene wirkenden Kräfte seien:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{\cos\alpha_0} = \dfrac{y-y_0}{\cos\beta_0}, \\ \dfrac{x-x_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{y-y_1}{\cos\beta_1}, \\ \dfrac{x-x_2}{\cos\alpha_2} = \dfrac{y-y_2}{\cos\beta_2}, \\ \dfrac{x-x_3}{\cos\alpha_3} = \dfrac{y-y_3}{\cos\beta_3} \end{array} \right.$$

oder:

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (x-x_0)\cos\beta_0 = (y-y_0)\cos\alpha_0, \\ (x-x_1)\cos\beta_1 = (y-y_1)\cos\alpha_1, \\ (x-x_2)\cos\beta_2 = (y-y_2)\cos\alpha_2, \\ (x-x_3)\cos\beta_3 = (y-y_3)\cos\alpha_3. \end{array} \right.$$

Die in diesen Richtungslinien wirkenden Kräfte, die bekanntlich als positiv oder als negativ betrachtet werden, jenachdem sie nach den positiven oder negativen Richtungen, welche bekanntlich durch die Winkel

$$\alpha_0, \beta_0; \quad \alpha_1, \beta_1; \quad \alpha_2, \beta_2; \quad \alpha_3, \beta_3$$

und:

$$180^0-\alpha_0,\ 180^0-\beta_0; \quad 180^0-\alpha_1,\ 180^0-\beta_1; \quad 180^0-\alpha_2,\ 180^0-\beta_2;$$
$$180^0-\alpha_3,\ 180^0-\beta_3$$

bestimmt werden, wirken, seien beziehungsweise:

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3.$$

Unter diesen Voraussetzungen sind nach Thl. XLVI. Nr. XIII. §. 11. die nothwendigen Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts dieser in der in Rede stehenden Ebene wirkenden Kräfte:

3)

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0.$$

§. 2.

Setzen wir nun voraus, dass die vier Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

in der in Rede stehenden Ebene sich im Gleichgewichte befinden, so finden nach dem vorhergehenden Paragraphen die Gleichungen:

4)

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \quad \Sigma P \cos\beta = 0, \quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0;$$

also die Gleichungen:

5)

$$P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 = 0,$$

$$P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\ P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ P_2(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\ P_3(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3) \end{array}\right\} = 0$$

Statt.

Wenn nun zwischen vier beliebigen Grössen

$$x, \quad y, \quad z, \quad u$$

die drei Gleichungen:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d\,u = 0,$$

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0$$

Statt finden, so folgt aus diesen drei Gleichungen, wenn λ einen beliebigen Factor bezeichnet:

$$a\,.\lambda x + b\,.\lambda y + c\,.\lambda z + d\,.\lambda u = 0,$$

$$a_1.\lambda x + b_1.\lambda y + c_1.\lambda z + d_1.\lambda u = 0,$$

$$a_2.\lambda x + b_2.\lambda y + c_2.\lambda z + d_2.\lambda u = 0;$$

und multiplicirt man nun diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$b_1c_2 - c_1b_2, \quad b_2c - c_2b, \quad bc_1 - cb_1;$$

$$c_1a_2 - a_1c_2, \quad c_2a - a_2c, \quad ca_1 - ac_1;$$

$$a_1b_2 - b_1a_2, \quad a_2b - b_2a, \quad ab_1 - ba_1;$$

...d addirt dieselben in jedem Falle zu einander; so erhält man ...le drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\{a(b_1c_2-c_1b_2)+a_1(b_2c-c_2b)+a_2(bc_1-cb_1)\}.\lambda x\\ +\{d(b_1c_2-c_1b_2)+d_1(b_2c-c_2b)+d_2(bc_1-cb_1)\}.\lambda u\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{b(c_1a_2-a_1c_2)+b_1(c_2a-a_2c)+b_2(ca_1-ac_1)\}.\lambda y\\ +\{d(c_1a_2-a_1c_2)+d_1(c_2a-a_2c)+d_2(ca_1-ac_1)\}.\lambda u\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}\{c(a_1b_2-b_1a_2)+c_1(a_2b-b_2a)+c_2(ab_1-ba_1)\}.\lambda z\\ +\{d(a_1b_2-b_1a_2)+d_1(a_2b-b_2a)+d_2(ab_1-ba_1)\}.\lambda u\end{array}\right\}=0;$$

oder, weil

$$\begin{array}{l}a(b_1c_2-c_1b_2)+a_1(b_2c-c_2b)+a_2(bc_1-cb_1)\\ =b(c_1a_2-a_1c_2)+b_1(c_2a-a_2c)+b_2(ca_1-ac_1)\\ =c(a_1b_2-b_1a_2)+c_1(a_2b-b_2a)+c_2(ab_1-ba_1)\end{array}$$

ist, wenn wir diese Grössen der Kürze wegen durch μ bezeichnen:

$$\mu.\lambda x+\{d(b_1c_2-c_1b_2)+d_1(b_2c-c_2b)+d_2(bc_1-cb_1)\}.\lambda u=0,$$

$$\mu.\lambda y+\{d(c_1a_2-a_1c_2)+d_1(c_2a-a_2c)+d_2(ca_1-ac_1)\}.\lambda u=0,$$

$$\mu.\lambda z+\{d(a_1b_2-b_1a_2)+d_1(a_2b-b_2a)+d_2(ab_1-ba_1)\}.\lambda u=0.$$

Wenden wir nun diese Gleichungen auf die Gleichungen 5) an, so erhalten wir für

$$\begin{array}{rl}\mu=&(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\ &+(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_2)(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\ &+(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\end{array}$$

leicht die folgenden Gleichungen:

$$\mu.\lambda P_0+\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2)(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\ +(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3)(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\\ +(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)(x_3\cos\beta_3-y_3\cos\alpha_3)\end{array}\right\}.\lambda P_3=0,$$

$$\mu.\lambda P_1+\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_3\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_3)(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\ +(\cos\alpha_0\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_0)(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\\ +(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_2)(x_3\cos\beta_3-y_3\cos\alpha_3)\end{array}\right\}.\lambda P_3=0,$$

$$\mu.\lambda P_2+\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\ +(\cos\alpha_3\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_3)(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\ +(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)(x_3\cos\beta_3-y_3\cos\alpha_3)\end{array}\right\}.\lambda P_3=0,$$

§. 2.

Setzen wir nun voraus, dass die vier Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

in der in Rede stehenden Ebene sich im Gleichgewichte befinden, so finden nach dem vorhergehenden Paragraphen die Gleichungen:

4)

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0;$$

also die Gleichungen:

5)

$$P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 = 0,$$

$$P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\ P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ P_2(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\ P_3(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3) \end{array}\right\} = 0$$

Statt.

Wenn nun zwischen vier beliebigen Grössen

$$x, \quad y, \quad z, \quad u$$

die drei Gleichungen:

$$a\,x + b\,y + c\,z + d\,u = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1u = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2u = 0$$

Statt finden, so folgt aus diesen drei Gleichungen, wenn λ einen beliebigen Factor bezeichnet:

$$a\,.\lambda x + b\,.\lambda y + c\,.\lambda z + d\,.\lambda u = 0,$$
$$a_1.\lambda x + b_1.\lambda y + c_1.\lambda z + d_1.\lambda u = 0,$$
$$a_2.\lambda x + b_2.\lambda y + c_2.\lambda z + d_2.\lambda u = 0;$$

und multiplicirt man nun diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$b_1c_2 - c_1b_2, \quad b_2c - c_2b, \quad bc_1 - cb_1;$$
$$c_1a_2 - a_1c_2, \quad c_2a - a_2c, \quad ca_1 - ac_1;$$
$$a_1b_2 - b_1a_2, \quad a_2b - b_2a, \quad ab_1 - ba_1;$$

und addirt dieselben in jedem Falle zu einander; so erhält man die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\{a(b_1c_2-c_1b_2)+a_1(b_2c-c_2b)+a_2(bc_1-cb_1)\}.\lambda x\\+&\{d(b_1c_2-c_1b_2)+d_1(b_2c-c_2b)+d_2(bc_1-cb_1)\}.\lambda u\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\{b(c_1a_2-a_1c_2)+b_1(c_2a-a_2c)+b_2(ca_1-ac_1)\}.\lambda y\\+&\{d(c_1a_2-a_1c_2)+d_1(c_2a-a_2c)+d_2(ca_1-ac_1)\}.\lambda u\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\{c(a_1b_2-b_1a_2)+c_1(a_2b-b_2a)+c_2(ab_1-ba_1)\}.\lambda z\\+&\{d(a_1b_2-b_1a_2)+d_1(a_2b-b_2a)+d_2(ab_1-ba_1)\}.\lambda u\end{aligned}\right\}=0;$$

oder, weil

$$\begin{aligned}&a(b_1c_2-c_1b_2)+a_1(b_2c-c_2b)+a_2(bc_1-cb_1)\\=&\,b(c_1a_2-a_1c_2)+b_1(c_2a-a_2c)+b_2(ca_1-ac_1)\\=&\,c(a_1b_2-b_1a_2)+c_1(a_2b-b_2a)+c_2(ab_1-ba_1)\end{aligned}$$

ist, wenn wir diese Grössen der Kürze wegen durch μ bezeichnen:

$$\mu.\lambda x+\{d(b_1c_2-c_1b_2)+d_1(b_2c-c_2b)+d_2(bc_1-cb_1)\}.\lambda u=0,$$

$$\mu.\lambda y+\{d(c_1a_2-a_1c_2)+d_1(c_2a-a_2c)+d_2(ca_1-ac_1)\}.\lambda u=0,$$

$$\mu.\lambda z+\{d(a_1b_2-b_1a_2)+d_1(a_2b-b_2a)+d_2(ab_1-ba_1)\}.\lambda u=0.$$

Wenden wir nun diese Gleichungen auf die Gleichungen 5) an, so erhalten wir für

$$\begin{aligned}\mu=&\,(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\&+(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_2)(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\&+(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\end{aligned}$$

leicht die folgenden Gleichungen:

$$\mu.\lambda P_0+\left\{\begin{aligned}&(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_2)(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\+&(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_3)(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\\+&(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_1)(x_3\cos\beta_3-y_3\cos\alpha_3)\end{aligned}\right\}.\lambda P_3=0,$$

$$\mu.\lambda P_1+\left\{\begin{aligned}&(\cos\alpha_3\cos\beta_2-\cos\alpha_2\cos\beta_3)(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\+&(\cos\alpha_0\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_0)(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\\+&(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_2)(x_3\cos\beta_3-y_3\cos\alpha_3)\end{aligned}\right\}.\lambda P_3=0,$$

$$\mu.\lambda P_2+\left\{\begin{aligned}&(\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\alpha_3\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\+&(\cos\alpha_3\cos\beta_0-\cos\alpha_0\cos\beta_3)(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\+&(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\alpha_1\cos\beta_0)(x_3\cos\beta_3-y_3\cos\alpha_3)\end{aligned}\right\}.\lambda P_3=0.$$

Hieraus erhellet, dass, wenn λ einen beliebigen Factor bezeichnet, aus der Voraussetzung, dass die vier Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

in der gegebenen Ebene im Gleichgewichte sind, sich die vier folgenden Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 = {} & (\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + (\cos\alpha_3\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_3)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\
& + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_1 = {} & (\cos\alpha_3\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_3)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + (\cos\alpha_0\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_0)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\
& + (\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_2)(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_2 = {} & (\cos\alpha_1\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + (\cos\alpha_3\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_3)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0)(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_3 = {} & -(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& - (\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_2)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& - (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2).
\end{aligned}$$

Mittelst sehr leichter Rechnung überzeugt man sich aber auf der Stelle, dass, wenn umgekehrt diese vier Gleichungen als erfüllt vorausgesetzt werden, daraus unmittelbar die drei Gleichungen:

$$\lambda P_0\cos\alpha_0 + \lambda P_1\cos\alpha_1 + \lambda P_2\cos\alpha_2 + \lambda P_3\cos\alpha_3 = 0,$$

$$\lambda P_0\cos\beta_0 + \lambda P_1\cos\beta_1 + \lambda P_2\cos\beta_2 + \lambda P_3\cos\beta_3 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
& \lambda P_0(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + \lambda P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + \lambda P_2(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\
& + \lambda P_3(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3)
\end{aligned}\right\} = 0;$$

also die drei Gleichungen:

$$P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 = 0,$$

$$P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 + P_3\cos\beta_3 = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}
& P_0(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + P_2(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\
& + P_3(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3)
\end{aligned}\right\} = 0$$

oder:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0$$

folgen, daher nach dem Obigen die vier Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

unter einander im Gleichgewichte sind.

Hieraus ergiebt sich nun, dass die nothwendigen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts der vier Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

auch unter der Form:

6)

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 = \quad & (\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + (\cos\alpha_3\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_3)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\
& + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_1 = \quad & (\cos\alpha_3\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_3)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + (\cos\alpha_0\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_0)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \\
& + (\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_2)(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_2 = \quad & (\cos\alpha_1\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + (\cos\alpha_3\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_3)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0)(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_3 = \quad & (\cos\alpha_2\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_2)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + (\cos\alpha_0\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_0)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + (\cos\alpha_1\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_1)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2)
\end{aligned}$$

dargestellt werden können.

Bestimmen wir die positiven Richtungen der Richtungslinien der Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

durch die von ihnen mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel

$$\alpha_0, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3$$

indem wir diese Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch oder nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° zählen; so müssen wir im Obigen bekanntlich für

$\cos\alpha_0$, $\cos\beta_0$; $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$; $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$; $\cos\alpha_3$, $\cos\beta_3$

beziehungsweise:

$\cos\alpha_0$, $\sin\alpha_0$; $\cos\alpha_1$, $\sin\alpha_1$; $\cos\alpha_2$, $\sin\alpha_2$; $\cos\alpha_3$, $\sin\alpha_3$

setzen, wodurch die obigen Bedingungsgleichungen 6) die folgende Gestalt erhalten:

7)

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 = {} & \sin(\alpha_3-\alpha_2)(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + \sin(\alpha_1-\alpha_3)(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2) \\
& + \sin(\alpha_2-\alpha_1)(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_1 = {} & \sin(\alpha_2-\alpha_3)(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + \sin(\alpha_3-\alpha_0)(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2) \\
& + \sin(\alpha_0-\alpha_2)(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_2 = {} & \sin(\alpha_3-\alpha_1)(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + \sin(\alpha_0-\alpha_3)(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + \sin(\alpha_1-\alpha_0)(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3), \\
\lambda P_3 = {} & \sin(\alpha_1-\alpha_2)(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0) \\
& + \sin(\alpha_2-\alpha_0)(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) \\
& + \sin(\alpha_0-\alpha_1)(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2).
\end{aligned}$$

§. 3.

Nehmen wir jetzt die als von

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

ausgehend gedachten Geraden

$$A_0A_1, \quad A_1A_2, \quad A_2A_3, \quad A_3A_0$$

als die positiven Richtungen der Richtungslinien der Kräfte

$$P_0 \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

an; so ist nach 2) offenbar:

$$\begin{aligned}
(x_1-x_0)\cos\beta_0 &= (y_1-y_0)\cos\alpha_0, \\
(x_2-x_1)\cos\beta_1 &= (y_2-y_1)\cos\alpha_1, \\
(x_3-x_2)\cos\beta_2 &= (y_3-y_2)\cos\alpha_2, \\
(x_0-x_3)\cos\beta_3 &= (y_0-y_3)\cos\alpha_3;
\end{aligned}$$

also:

$$x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0 = x_1\cos\beta_0 - y_1\cos\alpha_0,$$
$$x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1 = x_2\cos\beta_1 - y_2\cos\alpha_1,$$
$$x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2 = x_3\cos\beta_2 - y_3\cos\alpha_2,$$
$$x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3 = x_0\cos\beta_3 - y_0\cos\alpha_3;$$

folglich sind die Bedingungsgleichungen 6) des Gleichgewichts:

$$\begin{aligned}\lambda P_0 = {} & (\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2)(x_2\cos\beta_1 - y_2\cos\alpha_1)\\ & + (\cos\alpha_3\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_3)(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2)\\ & + (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_3 - y_0\cos\alpha_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda P_1 = {} & (\cos\alpha_3\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_3)(x_1\cos\beta_0 - y_1\cos\alpha_0)\\ & + (\cos\alpha_0\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_0)(x_3\cos\beta_2 - y_3\cos\alpha_2)\\ & + (\cos\alpha_2\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_2)(x_3\cos\beta_3 - y_3\cos\alpha_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda P_2 = {} & (\cos\alpha_1\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_1)(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0)\\ & + (\cos\alpha_3\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_3)(x_2\cos\beta_1 - y_2\cos\alpha_1)\\ & + (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0)(x_0\cos\beta_3 - y_0\cos\alpha_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda P_3 = {} & (\cos\alpha_2\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_2)(x_1\cos\beta_0 - y_1\cos\alpha_0)\\ & + (\cos\alpha_0\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_0)(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1)\\ & + (\cos\alpha_1\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_1)(x_3\cos\beta_2 - y_3\cos\alpha_2);\end{aligned}$$

welche man mittelst leichter Rechnung auf die folgende Form bringt:

8)

$$\lambda P_0 = (\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)\{(x_0-x_2)\cos\beta_3 - (y_0-y_2)\cos\alpha_3\},$$
$$\lambda P_1 = (\cos\alpha_3\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_3)\{(x_1-x_3)\cos\beta_0 - (y_1-y_3)\cos\alpha_0\},$$
$$\lambda P_2 = (\cos\alpha_0\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_0)\{(x_0-x_2)\cos\beta_1 - (y_0-y_2)\cos\alpha_1\},$$
$$\lambda P_3 = (\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0)\{(x_1-x_3)\cos\beta_2 - (y_1-y_3)\cos\alpha_2\};$$

und für die zweite Bnstimmungsweise der positiven Richtungen der Richtungslinien:

9)

$$\lambda P_0 = \sin(\alpha_2-\alpha_1)\{(x_0-x_2)\sin\alpha_3 - (y_0-y_2)\cos\alpha_3\},$$
$$\lambda P_1 = \sin(\alpha_2-\alpha_3)\{(x_1-x_3)\sin\alpha_0 - (y_1-y_3)\cos\alpha_0\},$$
$$\lambda P_2 = \sin(\alpha_3-\alpha_0)\{(x_0-x_2)\sin\alpha_1 - (y_0-y_2)\cos\alpha_1\},$$
$$\lambda P_3 = \sin(\alpha_1-\alpha_0)\{(x_1-x_3)\sin\alpha_2 - (y_1-y_3)\cos\alpha_2\}.$$

§. 4.

Bezeichnen wir die Geraden

$$A_0A_1, \quad A_1A_2, \quad A_2A_3, \quad A_3A_0$$

beziehungsweise durch

$$r_{01}, \quad r_{12}, \quad r_{23}, \quad r_{30};$$

so haben wir die vier folgendeu Systeme von Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_3 + r_{30}\cos\alpha_3, & y_0 &= y_3 + r_{30}\cos\beta_3; \\ x_2 &= x_3 - r_{23}\cos\alpha_2, & y_2 &= y_3 - r_{23}\cos\beta_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + r_{01}\cos\alpha_0, & y_1 &= y_0 + r_{01}\cos\beta_0; \\ x_3 &= x_0 - r_{30}\cos\alpha_3, & y_3 &= y_0 - r_{30}\cos\beta_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1 - r_{01}\cos\alpha_0, & y_0 &= y_1 - r_{01}\cos\beta_0; \\ x_2 &= x_1 + r_{12}\cos\alpha_1, & y_2 &= y_1 + r_{12}\cos\beta_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 - r_{12}\cos\alpha_1, & y_1 &= y_2 - r_{12}\cos\beta_1; \\ x_3 &= x_2 + r_{23}\cos\alpha_2, & y_3 &= y_2 + r_{23}\cos\beta_2; \end{aligned}$$

aus denen durch Subtraction die folgenden Gleichungen erhalten werden:

$$\begin{aligned} x_0 - x_2 &= r_{30}\cos\alpha_3 + r_{23}\cos\alpha_2, & y_0 - y_2 &= r_{30}\cos\beta_3 + r_{23}\cos\beta_2; \\ x_1 - x_3 &= r_{01}\cos\alpha_0 + r_{30}\cos\alpha_3, & y_1 - y_3 &= r_{01}\cos\beta_0 + r_{30}\cos\beta_3; \\ x_0 - x_2 &= -r_{01}\cos\alpha_0 - r_{12}\cos\alpha_1, & y_0 - y_2 &= -r_{01}\cos\beta_0 - r_{12}\cos\beta_1; \\ x_1 - x_3 &= -r_{12}\cos\alpha_1 - r_{23}\cos\alpha_2, & y_1 - y_3 &= -r_{12}\cos\beta_1 - r_{23}\cos\beta_2; \end{aligned}$$

woraus sich ferner die folgenden Gleichungen ergeben:

$$\begin{aligned} (x_0 - x_2)\cos\beta_3 - (y_0 - y_2)\cos\alpha_3 &= r_{23}(\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2), \\ (x_1 - x_3)\cos\beta_0 - (y_1 - y_3)\cos\alpha_0 &= r_{30}(\cos\alpha_3\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_3), \\ (x_0 - x_2)\cos\beta_1 - (y_0 - y_2)\cos\alpha_1 &= -r_{01}(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0), \\ (x_1 - x_3)\cos\beta_2 - (y_1 - y_3)\cos\alpha_2 &= -r_{12}(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1). \end{aligned}$$

Also sind die Bedingungsgleichungen 8) des Gleichgewichts:

10)

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= r_{23}(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1)(\cos\alpha_2\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_2), \\ \lambda P_1 &= r_{30}(\cos\alpha_3\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_3)(\cos\alpha_3\cos\beta_0 - \cos\alpha_0\cos\beta_3), \\ \lambda P_2 &= -r_{01}(\cos\alpha_0\cos\beta_3 - \cos\alpha_3\cos\beta_0)(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0), \\ \lambda P_3 &= -r_{12}(\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\alpha_1\cos\beta_0)(\cos\alpha_1\cos\beta_2 - \cos\alpha_2\cos\beta_1); \end{aligned}$$

oder, wenn man die zweite Bestimmungsweise der positiven Richtungen der Richtungslinien der Kräfte gebraucht:

11)

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 &= \quad r_{23}\sin(\alpha_2-\alpha_1)\sin(\alpha_3-\alpha_2),\\
\lambda P_1 &= \quad r_{30}\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_0-\alpha_3),\\
\lambda P_2 &= -r_{01}\sin(\alpha_3-\alpha_0)\sin(\alpha_1-\alpha_0),\\
\lambda P_3 &= -r_{12}\sin(\alpha_1-\alpha_0)\sin(\alpha_2-\alpha_1);
\end{aligned}$$

oder:

12)

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 &= \quad r_{23}\sin(\alpha_2-\alpha_3)\sin(\alpha_1-\alpha_2),\\
\lambda P_1 &= -r_{30}\sin(\alpha_3-\alpha_0)\sin(\alpha_2-\alpha_3),\\
\lambda P_2 &= \quad r_{01}\sin(\alpha_0-\alpha_1)\sin(\alpha_3-\alpha_0),\\
\lambda P_3 &= -r_{12}\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_0-\alpha_1).
\end{aligned}$$

Wenn die Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

im Gleichgewichte und also die vorstehenden Gleichungen erfüllt sind, so ist, wie aus denselben sogleich folgt:

13) . . . . . $\left\{\begin{aligned}
\frac{P_0}{P_1} &= -\frac{r_{23}}{r_{30}}\cdot\frac{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}{\sin(\alpha_3-\alpha_0)},\\
\frac{P_1}{P_2} &= -\frac{r_{30}}{r_{01}}\cdot\frac{\sin(\alpha_2-\alpha_3)}{\sin(\alpha_0-\alpha_1)},\\
\frac{P_2}{P_3} &= -\frac{r_{01}}{r_{12}}\cdot\frac{\sin(\alpha_3-\alpha_0)}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)},\\
\frac{P_3}{P_0} &= -\frac{r_{12}}{r_{22}}\cdot\frac{\sin(\alpha_0-\alpha_1)}{\sin(\alpha_2-\alpha_3)};
\end{aligned}\right.$

und es findet dann also jederzeit die merkwürdige Gleichung:

14) . . . . . $\frac{P_0P_2}{P_1P_3} = \frac{r_{01}r_{23}}{r_{12}r_{30}}$,

oder:

15) . . . . . $r_{12}r_{30}\cdot P_0P_2 = r_{01}r_{23}\cdot P_1P_3$,

oder die Proportion:

16) . . . . . $P_0P_2 : P_1P_3 = r_{01}r_{23} : r_{12}r_{30}$,

oder:

$$17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{P_0}{P_1} : \frac{P_3}{P_2} = \frac{r_{01}}{r_{12}} : \frac{r_{30}}{r_{23}}$$

Statt.

§. 5.

Wir wollen jetzt die als von A_0 ausgehend gedachte Gerade A_0A_1 als den positiven Theil der Axe der x annehmen, und in den nachher zur Betrachtung kommenden Figuren die Winkel α_0, α_1, α_2, α_3 von A_0A_1 an nach oben hin zählen.

In dem Vierecke $A_0A_1A_2A_3$ in Fig. 3., dessen innere Winkel wir durch A_0, A_1, A_2, A_3 bezeichnen wollen, ist offenbar:

$$\alpha_0 = 0,$$
$$\alpha_1 = 180^0 + A_1,$$
$$\alpha_2 = A_1 + A_2,$$
$$\alpha_3 = 180^0 - A_0;$$

also:

$$\begin{aligned}
\alpha_2 - \alpha_3 &= A_0 + A_1 + A_2 - 180^0 = 180^0 - A_3,\\
\alpha_3 - \alpha_0 &= 180^0 - A_0,\\
\alpha_0 - \alpha_1 &= -180^0 - A_1,\\
\alpha_1 - \alpha_2 &= 180^0 - A_2
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 - \alpha_2 &= 180^0 - A_2,\\
\alpha_2 - \alpha_3 &= A_0 + A_1 + A_2 - 180^0 = 180^0 - A_3,\\
\alpha_3 - \alpha_0 &= 180^0 - A_0,\\
\alpha_0 - \alpha_1 &= -180^0 - A_1;
\end{aligned}$$

folglich:

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3) = \sin A_3,$$
$$\sin(\alpha_3 - \alpha_0) = \sin A_0,$$
$$\sin(\alpha_0 - \alpha_1) = \sin A_1,$$
$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin A_2$$

und:

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin A_2,$$
$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3) = \sin A_3,$$
$$\sin(\alpha_3 - \alpha_0) = \sin A_0,$$
$$\sin(\alpha_0 - \alpha_1) = \sin A_1.$$

Wären die Geraden A_0A_1 und A_2A_3 einander parallel, so wäre offenbar $\alpha_2 = 180^0$ zu setzen, und da nun in diesem Falle $A_1 + A_2 = 180^0$ ist, so ist auch jetzt wie oben $\alpha_2 = A_1 + A_2$, und es wird also in den obigen Schlüssen durchaus nichts geändert.

Also sind nach 12) die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$\lambda P_0 = \quad r_{23} \sin A_2 \sin A_3,$$
$$\lambda P_1 = -r_{30} \sin A_3 \sin A_0,$$
$$\lambda P_2 = \quad r_{01} \sin A_0 \sin A_1,$$
$$\lambda P_3 = -r_{12} \sin A_1 \sin A_2.$$

In dem Vierecke A_0, A_1, A_2, A_3 in Fig. 4., dessen innere Winkel wir wieder durch A_0, A_1, A_2, A_3 bezeichnen wollen, ist offenbar:

$$\alpha_0 = 0,$$
$$\alpha_1 = 180^0 + A_1,$$
$$\alpha_2 = A_1 + A_2,$$
$$\alpha_3 = 360^0 - (A_0 - 180^0) = 540^0 - A_0;$$

also:

$$\alpha_2 - \alpha_3 = \quad A_0 + A_1 + A_2 - 540^0 = -180^0 - A_3,$$
$$\alpha_3 - \alpha_0 = \quad 540^0 - A_0,$$
$$\alpha_0 - \alpha_1 = -180^0 - A_1,$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 = \quad 180^0 - A_2$$

und:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \quad 180^0 - A_2,$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = \quad A_0 + A_1 + A_2 - 540^0 = -180^0 - A_3,$$
$$\alpha_3 - \alpha_0 = \quad 540^0 - A_0,$$
$$\alpha_0 - \alpha_1 = -180^0 - A_1;$$

folglich:

$$\sin(\alpha_2-\alpha_3) = \sin A_3,$$
$$\sin(\alpha_3-\alpha_0) = \sin A_0,$$
$$\sin(\alpha_0-\alpha_1) = \sin A_1,$$
$$\sin(\alpha_1-\alpha_2) = \sin A_2$$

und:

$$\sin(\alpha_1-\alpha_2) = \sin A_2,$$
$$\sin(\alpha_2-\alpha_3) = \sin A_3,$$
$$\sin(\alpha_3-\alpha_0) = \sin A_0,$$
$$\sin(\alpha_0-\alpha_1) = \sin A_1.$$

Also sind nach 12) die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$\lambda P_0 = \quad r_{23}\sin A_2 \sin A_3,$$
$$\lambda P_1 = -r_{30}\sin A_3 \sin A_0,$$
$$\lambda P_2 = \quad r_{01}\sin A_0 \sin A_1,$$
$$\lambda P_3 = -r_{12}\sin A_1 \sin A_2.$$

In dem Vierecke $A_0A_1A_2A_3$ in Fig. 5. seien an den Punkten A_0, A_1, A_2, A_3 die concaven Winkel A_0', A_1', A_2', A_3', wo dann offenbar:

$$A_0' + A_3' = A_1' + A_2',$$

also:

$$-A_0' + A_1' + A_2' = A_3'$$

ist.

Es ist nun in diesem Falle:

$$\alpha_0 = 0,$$
$$\alpha_1 = 180^0 + A_1',$$
$$\alpha_2 = A_1' + A_2',$$
$$\alpha_3 = 180^0 + A_0';$$

also:

$$\alpha_2-\alpha_3 = -180^0 - A_0' + A_1' + A_2' = -180^0 + A_3',$$
$$\alpha_3-\alpha_0 = \quad 180^0 + A_0',$$
$$\alpha_0-\alpha_1 = -180^0 - A_1',$$
$$\alpha_1-\alpha_2 = \quad 180^0 - A_2'$$

und:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \quad 180^0 - A_2',$$
$$\alpha_2 - \alpha_3 = -180^0 - A_0' + A_1' + A_2' = -180^0 + A_3',$$
$$\alpha_3 - \alpha_0 = \quad 180^0 + A_0',$$
$$\alpha_0 - \alpha_1 = -180^0 - A_1';$$

folglich:

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3) = -\sin A_3',$$
$$\sin(\alpha_3 - \alpha_0) = -\sin A_0',$$
$$\sin(\alpha_0 - \alpha_1) = \quad \sin A_1',$$
$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \quad \sin A_2'$$

und:

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \quad \sin A_2',$$
$$\sin(\alpha_2 - \alpha_3) = -\sin A_3',$$
$$\sin(\alpha_3 - \alpha_0) = -\sin A_0',$$
$$\sin(\alpha_0 - \alpha_1) = \quad \sin A_1'.$$

Also sind nach 12) die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$\lambda P_0 = -r_{23} \sin A_2' \sin A_3',$$
$$\lambda P_1 = -r_{30} \sin A_3' \sin A_0',$$
$$\lambda P_2 = -r_{01} \sin A_0' \sin A_1',$$
$$\lambda P_3 = -r_{12} \sin A_1' \sin A_2'.$$

Verstehen wir aber unter

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

die

convexen, concaven, concaven, convexen

Winkel an den eben so bezeichneten Punkten, so ist für

$$A_0', \quad A_1', \quad A_2', \quad A_3'$$

beziehungsweise zu setzen:

$$360^0 - A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad 360^0 - A_3;$$

also für:

$$\sin A_0', \quad \sin A_1', \quad \sin A_2', \quad \sin A_3'$$

beziehungsweise:

$$-\sin A_0, \quad \sin A_1, \quad \sin A_2, \quad -\sin A_3;$$

und die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts sind folglich:

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 &= \quad r_{23} \sin A_2 \sin A_3, \\
\lambda P_1 &= -r_{30} \sin A_3 \sin A_0, \\
\lambda P_2 &= \quad r_{01} \sin A_0 \sin A_1, \\
\lambda P_3 &= -r_{12} \sin A_1 \sin A_2.
\end{aligned}$$

Hiernach sind also in allen Fällen mit völliger Allgemeinheit die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts unter den vorher gemachten Voraussetzungen:

$$18) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \lambda P_0 = \quad r_{23} \sin A_2 \sin A_3, \\ \lambda P_1 = -r_{30} \sin A_3 \sin A_0, \\ \lambda P_2 = \quad r_{01} \sin A_0 \sin A_1, \\ \lambda P_3 = -r_{12} \sin A_1 \sin A_2. \end{cases}$$

Aus diesen merkwürdigen Gleichungen folgt, wenn zwischen den Kräften P_0, P_1, P_2, P_3 Gleichgewicht Statt findet, und diese Gleichungen also erfüllt sind:

$$\begin{aligned}
\lambda^2 P_0 P_2 &= r_{01} r_{23} \sin A_0 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3, \\
\lambda^2 P_1 P_3 &= r_{12} r_{30} \sin A_0 \sin A_1 \sin A_2 \sin A_3;
\end{aligned}$$

folglich, wie schon in 14) gefunden:

$$\frac{P_0 P_2}{P_1 P_3} = \frac{r_{01} r_{23}}{r_{12} r_{30}}.$$

§. 6.

Wenn das Viereck $A_0 A_1 A_2 A_3$ ein Parallelogramm ist, so ist $A_0 = A_2$ und $A_1 = A_3$, so wie $r_{01} = r_{23}$ und $r_{12} = r_{30}$. Also sind die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$\begin{aligned}
\lambda P_0 &= \quad r_{01} \sin A_0 \sin A_1, \\
\lambda P_1 &= -r_{12} \sin A_0 \sin A_1, \\
\lambda P_2 &= \quad r_{01} \sin A_0 \sin A_1, \\
\lambda P_3 &= -r_{12} \sin A_0 \sin A_1;
\end{aligned}$$

also, wenn ν einen gewissen Factor bezeichnet:

$$19) \quad \begin{cases} \nu P_0 = \nu P_2 = \quad r_{01}, \\ \nu P_1 = \nu P_3 = -r_{12}. \end{cases}$$

Wenn das Viereck $A_0A_1A_2A_3$ ein gewöhnliches Trapezium mit den parallelen Seiten A_0A_1 und A_2A_3 ist, so ist

$$A_0 + A_3 = 180^0, \qquad A_1 + A_2 = 180^0;$$

also:

$$\sin A_3 = \sin A_0, \qquad \sin A_2 = \sin A_1;$$

folglich sind die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$20) \quad \begin{cases} \lambda P_0 = \quad r_{23} \sin A_2 \sin A_1, \\ \lambda P_1 = -r_{30} \sin A_0 \sin A_0, \\ \lambda P_2 = \quad r_{01} \sin A_0 \sin A_1, \\ \lambda P_3 = -r_{12} \sin A_1 \sin A_1. \end{cases}$$

Wenn sich um das Viereck $A_0A_1A_2A_3$ ein Kreis beschreiben lässt, so ist:

$$A_0 + A_2 = 180^0, \qquad A_1 + A_3 = 180^0;$$

also:

$$\sin A_2 = \sin A_0, \qquad \sin A_3 = \sin A_1;$$

folglich sind die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$21) \quad \begin{cases} \lambda P_0 = \quad r_{23} \sin A_0 \sin A_1, \\ \lambda P_1 = -r_{30} \sin A_0 \sin A_1, \\ \lambda P_2 = \quad r_{01} \sin A_0 \sin A_1, \\ \lambda P_3 = -r_{12} \sin A_0 \sin A_1; \end{cases}$$

oder:

$$22) \ldots. \nu P_0 = r_{23}, \quad \nu P_1 = -r_{30}, \quad \nu P_2 = r_{01}, \quad \nu P_3 = -r_{12};$$

oder:

$$23) \ldots\ldots P_0 : P_1 : P_2 : P_3 = r_{23} : -r_{30} : r_{01} : -r_{12};$$

oder:

$$24) \ldots\ldots P_0 : -P_1 : P_2 : -P_3 = r_{23} : r_{30} : r_{01} : r_{12}.$$

Nach einem bekannten geometrischen Satze ist in diesem Falle:

$$A_0A_2 : A_1A_3 = A_0A_1 \cdot A_3A_0 + A_1A_2 \cdot A_2A_3 : A_0A_1 \cdot A_1A_2 + A_2A_3 \cdot A_3A_0,$$

also:

$$A_0A_2 : A_1A_3 = r_{01}r_{30} + r_{12}r_{23} \cdot r_{01}r_{12} + r_{23}r_{30}$$

oder:

$$A_0A_2 : A_1A_3 = \frac{r_{30}}{r_{23}} + \frac{r_{12}}{r_{01}} : \frac{r_{12}}{r_{23}} + \frac{r_{30}}{r_{01}}.$$

Sind nun die Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3 unter einander im Gleichgewichte, so finden die Gleichungen 21) oder 22) Statt, und es ist also:

$$\frac{r_{30}}{r_{23}} = -\frac{P_1}{P_0},$$

$$\frac{r_{12}}{r_{01}} = -\frac{P_3}{P_2},$$

$$\frac{r_{12}}{r_{23}} = -\frac{P_3}{P_0},$$

$$\frac{r_{30}}{r_{01}} = -\frac{P_1}{P_2};$$

also nach dem Obigen:

25) . . . . . $A_0A_2 : A_1A_3 = \frac{P_1}{P_0} + \frac{P_3}{P_2} : \frac{P_3}{P_0} + \frac{P_1}{P_2}$

oder:

26) . . . . $A_0A_2 : A_1A_3 = P_1P_2 + P_0P_3 : P_2P_3 + P_0P_1.$

Ferner ist in diesem Falle nach dem ptolemäischen Satze:

$$A_0A_2 \cdot A_1A_3 = A_0A_1 \cdot A_2A_3 + A_1A_2 \cdot A_3A_0,$$

also:

$$A_0A_2 \cdot A_1A_3 = r_{01}r_{23} + r_{12}r_{30}.$$

Sind nun die Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3 unter einander im Gleichgewichte, so finden für ein gewisses ν die Gleichungen 22) Statt, und es ist also für dieses ν:

$$r_{01}r_{23} = \nu^2 P_0P_2, \qquad r_{12}r_{30} = \nu^2 P_1P_3;$$

also nach dem Obigen:

27) . . . . . $A_0A_2 \cdot A_1A_3 = \nu^2(P_0P_2 + P_1P_3)$

oder:

28) . . . . . $\frac{A_0A_2}{\nu} \cdot \frac{A_1A_3}{\nu} = P_0P_2 + P_1P_3.$

Wenn sich in das Viereck $A_0A_1A_2A_3$ ein Kreis beschreiben lässt, so ist bekanntlich:

$$A_0A_1 + A_2A_3 = A_1A_2 + A_3A_0,$$

also:

$$r_{01} + r_{23} = r_{12} + r_{30}.$$

Sind nun die Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3 unter einander im Gleichgewichte, so finden die Gleichungen 18) Statt, und es ist also:

$$\frac{\lambda P_2}{\sin A_0 \sin A_1} + \frac{\lambda P_0}{\sin A_2 \sin A_3} = -\frac{\lambda P_3}{\sin A_1 \sin A_2} - \frac{\lambda P_1}{\sin A_3 \sin A_0},$$

also:

29)

$$\frac{P_0}{\sin A_2 \sin A_3} + \frac{P_1}{\sin A_3 \sin A_0} + \frac{P_2}{\sin A_0 \sin A_1} + \frac{P_3}{\sin A_1 \sin A_2} = 0$$

oder:

30)

$$\left.\begin{aligned} P_0 \sin A_0 \sin A_1 + P_1 \sin A_1 \sin A_2 + P_2 \sin A_2 \sin A_3 \\ + P_3 \sin A_3 \sin A_0 \end{aligned}\right\} = 0.$$

So merkwürdig mir auch alle diese Relationen zu sein scheinen, will ich doch diese Betrachtungen jetzt nicht weiter fortsetzen.

Allgemeine Bemerkung zu den beiden vorhergehenden Abhandlungen.

In meiner „Neue analytische Entwickelung der allgemeinen Gesetze der Statik" überschriebenen Abhandlung in Thl. XLVI. Nr. XIII. habe ich die Grundlehren dieser Wissenschaft auf eine von der jetzt meistens gewöhnlichen in nicht wenigen Beziehungen wesentlich abweichende Weise dargestellt. Ausser verschiedenen anderen Punkten *) ist vorzüglich und zunächst

*) Z. B. die Darstellung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten für unveränderliche Systeme, um nur Eins, worauf ich (ausser dem Folgenden) auch besonderen Werth zu legen mir erlauben möchte, zu erwähnen.

zu bemerken, dass ich es jetzt für durchaus nöthig halte, nicht, wie bisher fast durchgängig geschieht, nicht parallele Kräfte bloss positiv oder absolut aufzufassen, sondern vielmehr überall und in allen Fällen **Richtungslinien** und in denselben **positive und negative Richtungen**, so wie — im unmittelbaren Zusammenhange hiermit — durchgängig, **also bei parallelen und nicht parallelen Kräften**, positive und negative Kräfte zu unterscheiden. Eine ziemlich grosse Anzahl seit der Veröffentlichung jener Abhandlung, in welcher die so eben erwähnten Principien überall ganz streng festgehalten worden sind, von mir durchgeführter specieller statischer Untersuchungen hat mich wiederholt vollkommen überzeugt, dass nur **diese** Methode auf den Namen einer wahrhaft wissenschaftlichen, vor Fehlschlüssen am Besten sichernden Methode Anspruch machen darf, was ich mit dieser Bestimmtheit hier auszusprechen keinen Anstand nehme und kein Bedenken trage. Die beiden vorstehenden Abhandlungen habe ich aus dem weiten Kreise der erwähnten statischen Untersuchungen jetzt namentlich auch deshalb hier veröffentlicht, weil ich der Meinung bin, dass die in denselben gebrauchte, ganz der Abhandlung Thl. XLVI. Nr. XIII. sich anschliessende Methode für alle Diejenigen, welche wirklichen Sinn und wirkliches Verständniss für wahrhaft strenge mathematische Untersuchungen besitzen und mitbringen, wohl einen Beweis für die Richtigkeit meiner oben ausgesprochenen Behauptungen zu liefern einigermaassen geeignet sein dürfte, wobei übrigens meinetwegen jeder Andere seinen vielleicht vorgefassten Meinungen von mir ganz unbeirrt folgen möge.

Berichtigung. Auf S. 46. Z. 1. setze man „gewissen" für „beliebigen"

VII.

Einführung der sphärischen Trigonometrie in die Optik.

Von

Herrn Dr. *Josef Kudelka*,
k. k. Lyceal-Professor zu Linz in Ober-Oesterreich.

(Figuren s. Taf. III.)

Es sei O (Fig. 1.) ein leuchtender Punkt, und OC einer der Lichtstrahlen, die er dem Prisma pFr zusendet. Dieser Strahl wird in der Richtung CE gebrochen. Verlängert man diese Richtung nach aufwärts, bis sie das Perpendikel OA, welches man von O auf die obere Prismenfläche pq gefällt hat, in B schneidet, so wird man BE als den einfallenden Strahl bezüglich der unteren Prismenfläche rs zu betrachten haben.

Unter diesen Voraussetzungen ist der Brechungswinkel an der Eintrittsfläche $= ECx = ABC = \beta$ und der Einfallswinkel an der Austrittsfläche $= CEy = EBD = \gamma$, wenn Cx und Ey die respektiven Einfallslothe sind und wenn auch BD normal gegen die Austrittsfläche rs gedacht wird. Nimmt man an, dass der einfallende Strahl OC im Hauptschnitte des Prisma liege, d. i. in der Ebene, welche durch den leuchtenden Punkt O senkrecht gegen die brechende Kante desselben gelegt wird, so ist es, so viel mir bekannt ist, immer nur dieser Fall, der, so oft man Lichtstrahlen durch ein Prisma leitet, in Betracht gezogen wird.

Da der Hauptschnitt des Prisma mit der Ebene ABD, in

welcher die von B auf die Prismenflächen gefällten Senkrechten BA und BD liegen, zusammenfällt, so befindet sich demgemäss der einfallende Strahl OC in dieser Ebene ABD.

Allein dieser Fall ist nur ein ganz spezieller und ich will daher versuchen ihn zu verallgemeinern.

Zu diesem Behufe lassen wir den einfallenden Strahl OC um das Perpendikel OA rotiren, so wird er den Mantel eines Kegels beschreiben, dessen Axe das gedachte Perpendikel OA ist. Der Einfachheit wegen wollen wir bei dieser Rotation den Winkel $AOC = a$, d. i. den Einfallswinkel des rotirenden Strahles OC als konstant annehmen.

Unter diesen Umständen wird auch der gebrochene Strahl BC, da er gemäss dem Gesetze des Snellius stets in der Einfallsebene des Strahles OC liegen muss, in demselben Sinne und um das nemliche Perpendikel rotiren und somit auch einen Kegel beschreiben, dessen Scheitel B ist. Der Winkel $ABC = \beta$ wird bei dieser Drehung sich nicht ändern, weil a als konstant vorausgesetzt wurde.

In Folge einer solchen Drehung wird der einfallende Strahl OC und somit auch der ihm entsprechende gebrochene BC aus der Ebene des Hauptschnittes ABD, dessen Lage unveränderlich zu denken ist, heraustreten.

Da nun aber B eines von den Bildern ist, welche von dem leuchtenden Punkte O in Folge der Brechung an der oberen Prismenfläche pq entstehen, und da von diesem Bilde B in der That unzählige Lichtstrahlen ausgehen, die jedoch alle in der Mantelfläche des Kegels BJC liegen; so können wir, statt den Strahl BC zu drehen, unsere Vorstellung auch in der Art abändern, dass wir von dem gebrochenen Strahle BC successive zu immer anderen Strahlen dieses kegelförmigen Strahlenmantels übergehen. (Siehe: Gesetze der Lichtbrechung §. 17.) *).

Gehen wir nun aber von dem gebrochenen Strahle BC zu einem andern BG über, welcher dem einfallenden OG entspricht, so erhalten wir, da BG nicht mehr im Hauptschnitte des Prisma liegt, sofort drei Ebenen, die ein Körpereck bilden, nemlich:

1. Die Ebene des Hauptschnitts ABD.
2. Die Ebene ABG, welche, da sie den gebrochenen Strahl BG und das Loth BA enthält, als Brechungsebene in Bezug auf die obere Prismenfläche pq zu betrachten ist.

*) Archiv. Thl. L. S. 134.

3. Die Ebene GBD (oder HBD), welche die Einfallsebene in Bezug auf die untere Prismenfläche rs vorstellt, denn darin liegt wiederum das Loth BD und der Strahl BH, den wir jetzt als einfallenden bezüglich der unteren Prismenfläche zu betrachten haben.

Die Kanten dieses Körpereckes sind die beiden Lothe BA und BD und dann die Richtung BH, welche dem gebrochenen Strahle an der oberen Prismenfläche und dem einfallenden an der unteren gemeinschaftlich zukommt.

Die drei Kantenwinkel sind nacheinander: 1) der Brechungswinkel $ABG = \beta$ an der Eintrittsfläche, den wir als konstant vorausgesetzt haben; 2) der Einfallswinkel $HBD = \gamma$ an der Austrittsfläche, der veränderlich ist; und 3) der Winkel ABD, den die beiden Lothe BA und BD einschliessen. Dieser Winkel ist offenbar $= pFr$ d. i gleich dem brechenden Winkel des Prisma. Er ist wiederum konstant und wir wollen ihn der Einfachheit wegen mit π bezeichnen.

Da alle Elemente dieses Körpereckes, die Kanten, Winkel und die es einschliessenden Ebenen optische Begriffe sind, so kann man es ein optisches Körpereck nennen.

Bezeichnet man die den drei Kantenwinkeln β, γ und π gegenüberliegenden Flächenwinkel mit den lateinischen Buchstaben B, C und P, so hat man für den veränderlichen Kantenwinkel γ sofort die Formel:

$$\cos\gamma = \cos\beta\cos\pi + \sin\beta\sin\pi\cos C,$$

wo gemäss dem Vorhergehenden unter C der Neigungswinkel der Brechungsebene ABG gegen den Hauptschnitt ABD des Prisma zu verstehen ist.

Setzt man $C = 0$ oder $C = 180^0$, so erhält man für diese speziellen Fälle, wo die besagte Brechungsebene mit dem Hauptschnitte zusammenfällt:

$$\cos\gamma = \cos\beta\cos\pi \mp \sin\beta\sin\pi,$$

$$\cos\gamma = \cos(\pi \mp \beta);$$

also:

$$\gamma = \pi \mp \beta.$$

Man kann ferner auch die Richtung des gebrochenen Strahles BC als konstant annehmen und eines der beiden Lothe BA oder BD um dieselbe drehen. Drehet man demnach z. B. das Loth

BD, so wird es wiederum einen Kegel beschreiben, dessen Axe BC ist und wir wollen voraussetzen, dass bei dieser Drehung der Winkel γ sich nicht ändert.

Es ist nun aber leicht einzusehen, dass eine Drehung des Lothes BD nicht erfolgen kann ohne eine entsprechende Rotation der unteren Prismenfläche rs. Wollen wir also dieses Loth in Rotation versetzen, so müssen wir eigentlich rs um die fixe Richtung BE herumdrehen und es muss dabei auch, da wir γ als konstant voraussetzen, der Neigungswinkel BED, welchen die fixe Richtung BE oder was dasselbe ist, der einfallende Strahl mit rs einschliesst, ungeändert verbleiben.

Es wird also bei dieser Art der Drehung das Loth BD seine Lage bezüglich des anderen Lothes verändern und dadurch wird nicht bloss der Winkel, den beide Lothe einschliessen, d. i. der brechende Winkel π, seiner Grösse nach geändert, sondern es wird auch der Hauptschnitt des Prisma beständig andere Lagen annehmen.

Während also einerseits die Einfallsebene an der unteren Prismenfläche, nemlich EBD um die BE rotiret, drehet sich gleichzeitig der Hauptschnitt ABD um BA und zwar derart, dass der Winkel $ABD = \pi$ als variabel auftritt.

Die Lage der Brechungsebene ABC erleidet hiebei natürlich keine Aenderung, da die obere Prismenfläche und auch der einfallende Strahl OC ihre Lagen beibehalten. Wir haben also für diesen Fall wiederum die folgende Formel:

$$\cos\pi = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos P,$$

wo also P den Neigungswinkel bezeichnet, den die beiden Einfallsebenen an der oberen und unteren Prismenfläche einschliessen.

Eine Drehung der einen oder der anderen Prismenfläche in der angedeuteten Weise lässt sich natürlich nur dann ausführen, wenn das Prisma aus einer Flüssigkeit bestehet. Das folgende Arrangement dürfte dem Zwecke entsprechen.

$MRSN$ (Fig. 2.) stellt ein Glasgefäss vor, dessen genau ebener Boden RS die darauf fallenden Lichtstrahlen wie eine gewöhnliche Glasplatte durchlässt. In dieses Gefäss wird nun eine Flüssigkeit eingefüllt, deren Oberfläche MN hierauf durch ein anderes, ähnliches, jedoch weit kleineres Gefäss $mrsn$ eingedrückt

wird. Ist O ein leuchtender Punkt und OC ein einfallender Strahl, so sei CE die Richtung des gebrochenen, welche nach abwärts verlängert, die ebenfalls verlängerte Normale OA in B trifft. Hat man nun Anfangs $rs \parallel RS$ eingestellt, so ist das Ergebniss dasselbe, wie bei einem Medium, das von parallelen Ebenen eingeschlossen ist.

Lässt man aber das in E errichtete Einfallsloth Ey um die Richtung des gebrochenen Strahles BE in der Art rotiren, dass es den Mantel eines Kegels beschreibt, was durch eine entsprechende Drehung des kleineren Gefässes ermöglicht wird, so wird die zwischen den beiden Böden enthaltene Flüssigkeit schon ein Prisma vorstellen, dessen brechender Winkel nach Massgabe der Drehung verschiedene Grössen annehmen wird. Da wir hier zuerst $rs \parallel RS$ angenommen, so ist $\gamma = \beta$ und die letzte Formel geht für diesen speziellen Fall in die folgende über:

$$\cos\pi = \cos^2\beta + \sin^2\beta\cos P.$$

VIII.

Experimentelle magnetische Untersuchungen.

(Zweiter Theil.)

Von

Herrn Dr. ***Külp***,

Assistenten der Physik am grossherzogl. Polytechnikum in Darmstadt.

(Fig. s. Taf. III.)

V. Ein Beitrag zur „magnetischen Compensationsmethode" langer Magnetstäbe.

a) Schwingungsmethode.

Die „magnetische Compensationsmethode" mittelst Schwingungen für lange Magnetstäbe zur Bestimmung ihrer Intensitäten ist bekannt, da ihre Ausführung jedoch einige Geschicklichkeit im Experimentiren voraussetzt, so kann auch das leichtere Verfahren unter b) dafür an die Stelle treten.

Vier Magnetstäbe, 30 ^{cm} lang, 7 ^{mm} breit und 4 ^{mm} dick, wurden ausgewählt, und ihre relativen magnetischen Intensitäten durch das schon bekannte Schwingungsverfahren ermittelt. Die Normallamelle, welche obige Dimensionen hatte, war von der Nadel 10^{cm} entfernt, und unter ihrem Einflusse und der Erde machte die Nadel 20 Schwingungen in 9,96 Secunden; während dieselbe unter dem Einflusse der Erde 21,89 Secunden zu 20 Schwingungen nöthig hatte. In nachstehendem Täfelchen sind nun die Abstände

aufgezeichnet, in welchen die durch die Normallamelle beschleunigten Schwingungen der Nadel wieder so durch die verschiedenen Magnetstäbe verzögert wurden, dass dieselbe jedesmal zu 20 Schwingungen nahezu 21,89 Secunden gebrauchte, ihre Schwingungen sonach gerade so verrichtete als wenn die Erde nur allein wirksam wäre.

Bezeichnung der Stäbe.	Zahl der vollbrachten Schwingungen	Erforderliche Zeit in Secunden.	Abstand von der Nadel in cm.
I.	20	21,89	11,7
II.	20	21,84	15,0
III.	20	21,94	14,9
IV.	20	21,90	6,5

Bezeichnen m_I, m_{II}, m_{III} und m_{IV} die entsprechenden unipolaren magnetischen Actionen der 4 Magnetstäbe und m diejenige der Normallamelle, so hat man für ihre Intensitäten nachstehende Gleichungen und Werthe:

$$m_I = \frac{11{,}7^2}{10^2} \times m = 1{,}368\, m,$$

$$m_{II} = \frac{15^2}{10^2} \times m = 2{,}250\, m,$$

$$m_{III} = \frac{14{,}9^2}{10^2} \times m = 2{,}220\, m \text{ und}$$

$$m_{IV} = \frac{6{,}5^2}{10^2} \times m = 0{,}422\, m.$$

Die so erhaltenen Werthe für ihre Intensitäten sind auch durch die zweite Methode unter b) gefunden worden.

b) Ablenkungsmethode.

Das Wesen dieser Methode besteht in Folgendem. Die Normallamelle *a* Fig. 1 ist hier so lang, dass man die Wirkung des von der Nadel entfernten Poles ausser Acht lassen kann; ihre Längenrichtung stehe senkrecht auf der Längenrichtung der Nadel der Declinationsbussole. Sie bewirkt eine Ablenkung von n^0 an der Nadel der Bussole, welche nun durch die zu vergleichende Lamelle *b* und durch denselben Pol in der Entfernung r_1 von der anderen Seite her, wieder der Nulllage zugeführt wird. In diesen Entfernungen sind nun die Resultirenden der magnetischen Actionen einander gleich, man hat die Gleichung:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{r^2}{r_1^2},$$

wenn m und m_1 die unipolaren magnetischen Intensitäten und r und r_1 die entsprechenden Entfernungen von der Nadel bedeuten.

Um dieses Verfahren, sowie die Uebereinstimmung beider Methoden darzuthun, wurden dieselben Magnetstäbe und Normallamelle wie unter a) ausgewählt und die Messungen vorgenommen. Die nachstehende Tabelle enthält die Entfernungen und Intensitäten der 4 Stäbe, ausgedrückt in die unipolare Action m der Normallamelle, welche 16^{cm} von der Nadel entfernt und eine Ablenkung von 48° hervorbrachte.

Bezeichnung der Stäbe.	Abstände von der Nadel in *cm*.	Unipolare magnetische Intensitäten.
I.	18,3	$1{,}322_m$
II.	23,8	$2{,}212_m$
III.	23,5	$2{,}157_m$
IV.	10,2	$0{,}406_m$

Vergleichen wir die gefundenen Werthe der Intensitäten nach den zwei Methoden, so ergeben sich nur kleine Unterschiede; man ist daher berechtigt beide Verfahren zu gebrauchen. In kommendem Täfelchen findet die Vergleichung statt:

Bezeichnung der Stäbe.	Intensitäten nach dem Schwingungsverfahren.	Intensitäten nach dem Ablenkungsverfahren.	Unterschiede zwischen beiden.
I.	$1{,}368_m$	$1{,}322_m$	$0{,}046_m$
II.	$2{,}250_m$	$2{,}212_m$	$0{,}038_m$
III.	$2{,}220_m$	$2{,}157_m$	$0{,}063_m$
IV.	$0{,}422_m$	$0{,}406_m$	$0{,}016_m$

Die Unterschiede zeigen sich erst in den zweiten Decimalstellen; die relativen unipolaren magnetischen Intensitäten der Stäbe stimmen daher nach meinen Versuchen bei beiden Verfahren bis auf die Zehntel genau mit einander überein.

VI. Bipolare und unipolare magnetische Actionen.

α) Bipolare Actionen.

Es besteht die schon bekannte Relation:

$$m = R^3 . H . \operatorname{tg} w,$$

wo m die bipolare magnetische Action des kurzen Magnetstabes, R ihre Entfernung von der Bussole, H die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus und w den zugehörigen Ablenkungswinkel bezeichnen. Für eine zweite bipolare magnetische Action in derselben Entfernung ist analog:

$$m_1 = R^3 . H . \operatorname{tg} w_1 ;$$

hiernach erhält man durch Division für beide bipolare Actionen die Gleichung:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} w_1},$$

d. h. die beiden bipolaren magnetischen Actionen verhalten sich wie die Tangenten der Ablenkungswinkel, welche dieselben in der gleichen Entfernung von der Bussole geben.

Nach der magnetischen Nullmethode für kurze Stäbe ist aber auch:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{r^3}{r_1{}^3},$$

wo m und m_1 wieder die bipolaren Actionen, r und r_1 die Entfernungen bedeuten, bei denen die Nadel der Bussole auf Null verblieb. Sonach müsste auch der Ausdruck:

$$\frac{r^3}{r_1{}^3} = \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} w_1}$$

bestehen, d. h. das Verhältniss der Kuben der Abstände zweier bipolaren Actionen, wo die Nadel der Bussole auf Null gehalten wurde, ist gleich dem Verhältnisse der Tangenten der ablenkenden Winkel, genommen in der nämlichen Entfernung von der Bussole.

Um dieses nachzuweisen wurden sechs kurze und gut gehärtete Stahlstücke durch geeignete Behandlungsweise in verschiedene magnetische Erregungen versetzt, und die betreffenden Intensitäten nach der magnetischen Nullmethode bestimmt, und stets mit einem und demselben Normalstabe verglichen. Alsdann wurden diese magnetischen Stücke nebst Normalstab nach und nach in die gleiche Entfernung von der Bussole gelegt, und die Ablenkungswinkel derselben abgelesen. Bei Anwendung der Nullmethode lag der Normalstab in dem Abstande 20^{cm}, und bei Bestimmung der Ablenkungswinkel waren die Stücke 17^{cm} von der Bussole entfernt. Der Normalstab gab daselbst eine Ablenkung von $18^0\,15'$. In kommender Tabelle sind die Abstände von der Nadel, die

Ablenkungswinkel, die relativen Intensitäten nach der Nullmethode und die Verhältnisse der Tangenten der ablenkenden Winkel in gleichem Abstande übersichtlich zusammengestellt.

Bezeichnung der vorhandenen bipolaren magnetischen Actionen.	Entfernungen von der Nadel in *cm*.	Ablenkungswinkel in der gleichen Entfernung von der Bussole.	Relative Intensitäten nach der Nullmethode.	Verhältnisse der Tangenten der Ablenkungswinkel.	Unterschiede.
I.	12,8	5° 30′	0,2821	0,2920	0,0099
II.	15,5	9° 15′	0,4654	0,4635	0,0019
III.	17,2	12° 15′	0,6360	0,6584	0,0224
IV.	17,7	13° 15′	0,6931	0,7104	0,0173
V.	18,2	15° 0′	0,7535	0,8125	0,0590
VI.	19,7	18° 0′	0,9556	0,9853	0,0297

Aus der Tabelle folgt wegen der geringen Unterschiede die Richtigkeit obigen Schlusses *).

β) Unipolare Actionen.

Für unipolare magnetische Actionen wurde diese Untersuchung wie unter α) gleichfalls ausgedehnt. Nach der „magnetischen Compensationsmethode“ für lange Stäbe hat man hier für zwei unipolare magnetische Actionen vorerst das Verhältniss:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{r^2}{r_1^2},$$

und ferner für dieselben Actionen hinsichtlich der Ablenkungswinkel in der nämlichen Entfernung von der Bussole das weitere Verhältniss:

*) Wenn durch kurze Magnetstäbe in derselben Entfernung von der Declinationsbussole die ablenkenden Winkel nicht mehr grösser werden, so sind dieselben magnetisch gesättigt. Diese Methode als Erkennungsmittel der magnetischen Sättigung ist eine sehr einfache. Auch kann man leicht wie folgt zeigen, dass wenn zwei kurze Stäbe in gleichem Sinne aufeinander gelegt werden, die dadurch entstandene Action nicht gleich der Summe der einzelnen vorhandenen Actionen ist. Man nehme einen kurzen Magnetstab lege ihn in eine solche Entfernung, dass die Nadel nur wenige Grade abgelenkt wird, etwa um 4°, nun lege man einen zweiten solchen Stab in dieselbe Entfernung und bemerke wieder seine Ablenkung; beide Stäbe aufeinander gelegt, werden alsdann eine geringere Ablenkung liefern, als die Summe der beiden einzelnen Ablenkungen anzeigt.

$$\frac{m}{m_1} = \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} w_1},$$

folglich:

$$\frac{r^2}{r_1^2} = \frac{\operatorname{tg} w}{\operatorname{tg} w_1},$$

d. h. das Verhältniss der Quadrate der Abstände, wo die Nadel der Bussole durch die unipolaren magnetischen Actionen auf Null verblieb, ist gleich dem Verhältniss der Tangenten der ablenkenden Winkel, genommen in gleicher Entfernung von der Bussole.

Fünf lange und harte Stahllamellen hatten verschiedene magnetische Intensitäten, dieselben wurden mit der nämlichen Normallamelle verglichen, und ihre ablenkenden Winkel alsdann in derselben Entfernung von der Bussole bestimmt. In der beigefügten Tabelle sind die betreffenden Werthe auf dieselbe Weise wie unter α) aufgezeichnet worden.

Bezeichnung der vorhandenen unipolaren magnetisch. Actionen.	Entfernungen von der Nadel in *cm.*	Ablenkungswinkel in der gleichen Entfernung von der Bussole.	Relative Intensitäten nach der Nullmethode.	Verhältnisse der Tangenten der Ablenkungswinkel.	Unterschiede.
I.	12,3	12° 0′	0,2420	0,2488	0,0068
II.	14,6	16° 30′	0,3410	0,3468	0,0058
III.	16,5	19° 30′	0,4356	0,4146	0,0210
IV.	18,4	25° 30′	0,5415	0,5584	0,0169
V.	19,6	27° 0′	0,6146	0,5965	0,0181

Nach den in der Tabelle vorkommenden Zahlen, geht gleichfalls die Richtigkeit des obigen Schlusses hervor.

Anmerkung. Ziehe auch hier die Note unter α) in Betracht.

VII. Experimenteller Nachweis der Häcker'schen Formel:

$$T = \varrho \sqrt[3]{Q} . \sqrt[6]{l}$$

mit Hülfe der magnetischen Sättigungsmethode langer Magnetstäbe.

Häcker fand für die Schwingungszeit eines gradlinigen, gesättigten Magnetstabes die empirische Formel:

$$T = \varrho \sqrt[3]{Q} . \sqrt[6]{l}$$

wo T die Schwingungsdauer in Sekunden, Q das Gewicht in gr, l die Länge des Stabes in Centimeter und ϱ einen von der Natur des Materials abhängenden constanten Factor, die Schwingungsdauer — das Schwingungsverhältniss — des Stabes dessen Dimensionen der Einheitslänge und dem Einheitsgewichte gleich sind, bedeuten. Die Richtigkeit dieser Formel wurde, wie folgt, nachgewiesen:

Da der in obiger Gleichung vorkommende Factor ϱ von dem Material, aus dem der betreffende Stab besteht, abhängig ist, so hat man auch für Stäbe aus gleichem Materiale den gleichen Factor ϱ in obige Formel zu setzen. Hiernach bestehen für zwei gesättigte Magnetstäbe aus gleichem Materiale die beiden folgenden Gleichungen für deren Schwingungszeiten:

$$T = \varrho \sqrt[3]{Q} . \sqrt[6]{l}$$

und

$$T_1 = \varrho \sqrt[3]{Q_1} . \sqrt[6]{l_1}.$$

Durch Division beider entsteht:

$$\text{I.} \quad \frac{T}{T_1} = \frac{\sqrt[3]{Q}}{\sqrt[3]{Q_1}} \times \frac{\sqrt[6]{l}}{\sqrt[6]{l_1}},$$

d. h. die Schwingungszeiten besagter Magnetstäbe verhalten sich wie die dritten Wurzeln aus den Gewichten und zugleich wie die sechsten Wurzeln aus den Längen. Für den experimentellen Nachweis dieses Satzes verschaffte ich mir vier gesättigte Magnetstäbe A, B, C und D, bestimmte an denselben alle in Gleichung I. vorkommenden Grössen, indem zugleich auch die Werthe für ϱ aus der Formel:

$$\varrho = \frac{T}{\sqrt[3]{Q} . \sqrt[6]{l}}$$

berechnet wurden. Die gefundenen Werthe sind in nachstehender Tabelle zusammengestellt.

Bezeichnung der Stäbe.	Gewicht der Stäbe in gr.	Länge der Stäbe in *cm*.	Schwingungszeiten der Stäbe in Secunden.	Werthe für ϱ.
A	156	30	11,83	1,246
B	159	30	11,92	1,248
C	161	30	12,52	1,305
D	127	25	10,82	1,258

Aus der Tabelle geht die geringe Verschiedenheit der Werthe für ϱ hervor, sie können als gleich angenommen werden, und obige Stäbe sind hiernach für die Untersuchungen zu gebrauchen. Bildet man nun zwischen den Stäben die Combinationen A und D, B und D sowie C und D, so findet man dass beide Seiten der Relation I. einander gleich sind, oder doch nur um sehr kleine Differenzen von einander abweichen. Die erhaltenen Resultate sind für A und D: $1{,}093 = 1{,}104$; für B und D: $1{,}101 = 1{,}111$ und für C und D: $1{,}157 = 1{,}115$.

Setzt man in dem Ausdrucke I. $l = l_1$, so folgt:

$$\text{II.} \quad \frac{T}{T_1} = \frac{\sqrt[3]{Q}}{\sqrt[3]{Q_1}},$$

d. h. die Schwingungszeiten zweier Magnetstäbe von gleicher Länge verhalten sich wie die Kubikwurzeln aus den Gewichten. Um dieses Gesetz nachzuweisen, nahm ich 6 Magnetstäbe, von denen A und B, C und D, E und F gleiche Länge hatten, und auch aus gleichem Materiale gefertigt waren. Die vorkommenden Werthe wurden wie oben, in nachstehender Tabelle zusammengestellt:

Bezeichnung der Stäbe.	Gewicht der Stäbe in gr.	Länge der Stäbe in gr.	Schwingungszeiten der Stäbe in Secunden.	Werthe für ϱ.
A	156	30	11,83	1,246
B	161	30	12,52	1,305
C	111	25	8,93	1,086
D	123	25	9,63	1,132
E	110	24	8,86	1,088
F	85	24	7,80	1,044

Die betreffenden Werthe der Combinationen AB, CD und EF in Gleichung II. eingesetzt genügen derselben. Die Resultate sind für A und B: $0{,}944 = 0{,}989$; für C und D: $0{,}927 = 0{,}966$ und für E und F: $1{,}135 = 1{,}089$.

Wird ferner in dem Ausdrucke I. $Q = Q_1$, so geht derselbe über in:

$$\text{III.} \quad \frac{T}{T_1} = \frac{\sqrt[6]{l}}{\sqrt[6]{l_1}}$$

d. h. die Schwingungszeiten zweier Stäbe von gleichem Gewichte verhalten sich wie die sechsten Wurzeln aus den Längen.

Zum Nachweis dieses Satzes waren zwei Stäbe von gleichem Gewichte und gleichem Materiale vorhanden, der erste Magnetstab hatte eine Schwingungszeit von 9,82 Secunden und eine Länge von 35,8^{cm}, der zweite Stab dagegen eine Schwingungszeit von 8,83 Secunden und eine Länge von 24,9^{cm}. Diese Werthe genügen sehr annähernd der Gleichung, die Rechnung liefert 1,112 = 1,062. Noch andere angestellte Untersuchungen bestätigten gleichfalls die Richtigkeit des Ausdruckes III. Aus den soeben beschriebenen Versuchen geht die Richtigkeit der Häcker'schen Formel hervor.

Nach dem Vorhergehenden müssen Magnetstäbe von gleichem Gewichte, gleicher Länge und gleichem Materiale eine gleiche Schwingungsdauer haben.

Nach der Formel:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{\sqrt[6]{Q^2 l}}{\sqrt[6]{Q_1{}^2 l_1}}$$

haben lange Magnetstäbe allgemein eine gleiche Schwingungsdauer, wenn sie von gleichem Materiale, und die Producte aus den Quadraten der Gewichte und der Längen gleich sind.

Die vorhergehenden Versuche gehen von der Annahme aus, dass man es mit vollkommen gesättigten Magnetstäben zu thun hat. Um lange Stäbe mittelst eines starken Electromagneten zu sättigen, legt man vorerst einen Normalstab, dessen magnetische Action während der Dauer der Versuche constant blieb, in eine bestimmte Entfernung, so senkrecht auf die Richtung einer Deklinationsnadel, dass der eine Pol dieses Stabes nach der Mitte der Nadel zeigte, die Nadel erfuhr hierdurch eine Ablenkung. Alsdann wurde der zu sättigende Stab auf die andere Seite gegen die Mitte der Nadel gelegt, und man bemerkte sich die Entfernung in welcher diese wieder in ihre normale Lage (auf Null) zurückkehrte. Nun wurde der betreffende Stab mit dem Electromagneten so lange bearbeitet bis diese fragliche zweite Entfernung endlich einen constanten Maximalwerth erlangte. Ist dieser Fall eingetreten, so ist der Stab magnetisch gesättigt. Hierbei ist zu bemerken, dass bei einer weichen Stahlsorte der Sättigungspunkt nicht constant bleibt, sondern schon nach sehr kurzer Zeit auf einen geringeren Grad herabsinkt. Dieses zwar schon bekannte

Resultat fand ich auch durch die magnetische Compensationsmethode bestätigt.

Es mag hier noch Einiges über die Darstellung astatischer Nadelpaare erwähnt werden. Das astatische Nadelpaar besteht aus zwei kleinen Ersatzmagneten. Um ein solches Paar darzustellen verschaffe man sich einige vollkommen harte Stahlnadeln, sättige dieselben mittelst eines Electromagneten unter Beihülfe der magnetischen Sättigungsmethode durch Compensation für kurze Magnetstäbe, untersuche alsdann welche zwei von den Nadeln, auf eine kleine empfindliche Declinationsnadel in gleicher Entfernung auf zwei verschiedenen Seiten derselben wirkend, die Nadel der Bussole auf Null hielten. Fanden sich zwei Solche, so kann man stets versichert sein, dass diese beiden Nadeln ein gut astatisches Nadelpaar abgeben werden.

VIII. Die bipolaren und unipolaren Tragkräfte nach dem ersten Abfalle des Ankers.

a) Bipolare Tragkräfte.

Bei Magneten hängt die Tragkraft von der Intensität des Streichmagneten, von der Quantität und Qualität der Materie ab. Dieselbe erreicht ein Maximum, über das sie nicht hinausgeht und hier wenn beide Pole tragen, die primäre bipolare Tragkraft — Maximaltragkraft — genannt werden soll. Wird genannte Tragkraft überschritten, so fällt der Anker ab, der Magnet ist alsdann nicht wieder sogleich im Stande sämmtliches Gewicht beim Anhalten des Ankers zu tragen, eine Schwächung des fraglichen Magneten hat sonach stattgefunden. Es ist die Frage, welches nun die Tragkraft des Magneten nach dem ersten Abfalle des Ankers, wenn nach und nach Gewichte in gr. aufgegeben werden, bis wieder ein Abfallen des Ankers statt habe, oder wie gross die secundäre bipolare Tragkraft ist.

Diese Versuche wurden nicht allein mit kurzen Transversalmagneten, sondern auch mit Hufeisenlamellen angestellt. Sechs Transversalmagnete und fünf Hufeisenmagnete gut gehärtet standen zur Verfügung. Dieselben wurden magnetisch gesättigt mit Anker versehen und die betreffenden Tragkräfte bestimmt. In der beigegebenen Tabelle sind die Resultate zusammengestellt, und die secundären bipolaren Tragkräfte in Procenten der „Maximaltragkräfte“ ausgedrückt worden.

Bezeichnung der Transversalmagnete.	Dimensionen. Länge in mm.	Breite in mm.	Dicke in mm.	Primäre Tragkräfte in gr.	Secundäre Tragkräfte in gr.	Secundäre Tragkräfte in Procenten der primären Tragkräfte.	Bezeichnung der Hufeisenmagnete.	Dimensionen. Innere Weite in mm.	Aeussere Weite in mm.	Primäre Tragkräfte in gr.	Secundäre Tragkräfte in gr.	Secundäre Tragkräfte in Procenten der primären Tragkräfte.
A_t	40	17	5	666	596	89	A_h	32	56	684	575	84
B_t	„	„	„	696	626	89	B_h	30	56	770	707	91
C_t	60	„	„	703	610	86	C_h	30	56	926	926	100
D_t	„	„	„	743	573	75	D_h	31	59	1777	1769	99
E_t	80	„	„	760	610	80	E_h	30	58	2192	1552	70
F_t	„	„	„	850	590	69	—	—	—	—	—	—

Bei Betrachtung der vorstehenden Tabelle folgt der Schluss: Haben Transversalmagnete oder Hufeisenmagnete ihre Maximaltragkräfte erreicht, so sind die secundären bipolaren Tragkräfte im Grenzfalle 31% kleiner als erstere; doch bleibt hier der Fall, wo beide gleich, nicht ausgeschlossen.

Berechnet man nach der Relation:

$$\varrho = \frac{T}{Ql},$$

die Maximaltragkräfte der Gewichtseinheiten der Transversalmagnete A_t, D_t und F_t, ermittelt ferner die Verhältnisse der Gewichte zu den Tragkräften, so entsteht folgendes Täfelchen:

Bezeichnung der Stäbe.	Gewichte in gr.	Maximaltragkräfte.	Verhältnisse der Gewichte zu den Maximaltragkräften.	Die Maximaltragkräften der Gewichtseinheiten.
A_t	30	666	22,2	68,9
D_t	45,2	743	16,4	58,9
F_t	61	850	13,9	69,05

Es wird ersichtlich: dass bei kleinen Magneten (A_t) bezüglich ihrer Wirkung nach Aussen hin, die Materie viel besser benutzt wird, als bei grösseren Transversalmagneten. Auch geht weiter hervor, dass die Tragkräfte der Gewichtseinheiten nicht von den Dimensionen der Magnete, sondern nur von der Qualität der Materie abhängen, und dass bei einer gleichen Qualität die Maximaltragkräfte der Gewichtseinheiten gleich sind, wie es bei den Magneten A_t und F_t der Fall war.

b) Unipolare Tragkräfte.

Die gleichen Versuche bei unipolarer Wirkung wurden ebenfalls vorgenommen. Zwei Hufeisenlamellen A und B wurden ausgewählt, magnetisch gesättigt und die betreffenden unipolaren Tragkräfte bestimmt. Das folgende Täfelchen enthält die betreffenden Resultate.

Bezeichnung der unipolaren Tragkräfte.	Lamelle A.		Lamelle B.	
	Tragkräfte in gr.	In Procenten der Maximaltragkraft.	Tragkräfte in gr.	In Procenten der Maximaltragkraft.
Maximaltragkräfte.	430	100	580	100
Tragkräfte nach dem 1ten Abfalle.	420	97	393	67

Es folgt der Schluss: Hat der Pol einer stahlharten Hufeisenlamelle die Maximaltragkraft erreicht, so ist die secundäre unipolare Tragkraft im Grenzfalle 33% kleiner als erstere.

IX. Einwirkung magnetischer Actionen auf verschiedene noch unmagnetische Stahlhärten.

Um hierüber Aufschluss zu erhalten, wurden vier Stahlstücke angefertigt, deren Dimensionen gleich, deren Oxydationsfarben jedoch, da sie nicht gleich hart, verschieden waren. Diese vier Stahlhärten sind nach der Stahltabelle des Herrn Pfnor dargestellt. Genannte Tabelle ist eine verdienstliche Zusammenstellung, enthält die Reihenfolge der auf den Flächen gehärteten Stahles, bei allmählich zunehmender Erwärmung nach und nach sich erzeugenden Oxydationsfarben, und kann als Hülfsmittel zur Erzielung der den verschiedenen Stahlwerkzeugen dienlichen Härtegraden gebraucht werden. Die hierzu gehörigen Werthe sind in dem folgenden Täfelchen zusammengestellt:

Farbe der Stahlstücke.	Dimensionen der Stahlstücke in cm.			Gewichte in gr.	Mischung aus		Schmelztemperatur der Metallmischung n. C.	Härtebezeichnung.
	Länge.	Breite.	Dicke.		Blei.	Zinn.		
Dunkelblau C_b.	5,8	1,2	0,6	33	12	1	287,7	Weich.
Dunkelbraunroth C_r.	—	—	—	33,6	19	4	265	Weniger weich.
Strohgelb C_s.	—	—	—	33,2	17	8	232,2	Hart.
Farblos C_f.	—	—	—	32,9	—	—	—	Vollkommene Härte.

Mit diesen noch unmagnetischen Stahlstücken wurden folgende Versuche angestellt:

Versuch I. Zunächst wurde die Einwirkung eines langen Vertheilungsstabes auf die Stahlhärten C_b, C_r, C_s und C_f einer näheren Prüfung unterworfen. Hierzu wurde ein langer Normalstab *A* (Fig. 2.) so mit dem einen Pol gegen die Mitte einer Deklinationsnadel gelegt, dass dessen Länge auf der ursprünglichen Richtung der Nadel senkrecht war und in einer gewissen Entfernung noch eine Ablenkung hervorbrachte. Von der entgegengesetzten Seite brachte man alsdann den Vertheilungsstab *B*

hinzu, an dessen Ende, das der Nadel zugekehrt, die verschiedenen noch unmagnetischen Stahlhärten nach einander angestossen wurden, auf welche der Stab B magnetisch vertheilend einwirkte. Das Ganze (Vertheilungsstab und Stahlstück) wurde nun so lange jedesmal auf der, dem Normalstab A entgegengesetzten Seite der Nadel hin und her geschoben, bis die von letzterem bewirkte Ablenkung aufgehoben wurde.

Bezeichnet man die unipolare magnetische Action an dem einen Ende des langen Normalstabes A mit M, diejenige am Ende der Stahlhärte C_b mit M_1, und mit r und r_1 die Entfernungen von der Nadel, so hat man nach der Relation:

$$\frac{M}{M_1} = \frac{r^2}{r_1^2}$$

für M_1 den Werth:

$$M_1 = \frac{r_1^2}{r^2} \times M.$$

Für meine Versuche war die Entfernung des Normalstabes $r = 20^{cm}$, und die Entfernungen der mit B nach und nach verbundenen Stahlhärten betrugen in der obigen Reihenfolge genommen:

$$18{,}5^{cm};\ 18{,}8^{cm};\ 18{,}2^{cm} \text{ und } 18{,}4^{cm};$$

hiernach waren die zugehörigen Actionen:

$$0{,}855M;\ 0{,}858M;\ 0{,}828M \text{ und } 0{,}846M.$$

Man sieht hieraus, dass bei den weniger harten Stahlhärten C_b und C_f die magnetische Vertheilung des Stabes B stärker war, als bei den harten Stahlhärten C_a und C_f.

Versuch II. Die im vorhergehenden Versuche durch Vertheilung magnetisirten Stahlhärten untersuchte ich nun hinsichtlich der magnetischen Quantitäten, welche ihnen noch nach dem Abzuge des Vertheilungsstabes geblieben waren. Zu dem Ende wurde ein Transversalmagnet von gleichen Dimensionen mit den Stahlhärten in eine Entfernung von 20^{cm} von der Mitte der Nadel gelegt und hierauf die vier Stahlhärten in obiger Reihenfolge von der anderen Seite gegen die Nadel gebracht, so dass diese jedesmal auf Null zurückgeführt wurde. Die Entfernungen wurden wie folgt gefunden:

$$7{,}5^{cm};\ 6{,}8^{cm};\ 6{,}8^{cm} \text{ und } 6{,}6^{cm}.$$

Nach der Relation:

$$\frac{m}{m_1} = \frac{r^3}{r_1^3}$$

wurden nun die gemeinschaftlichen magnetischen Quantitäten der vier Stahlhärten in die Quantität m des Normalmagneten ausgedrückt, und folgende Werthe erhalten:

$$0{,}052_m;\ 0{,}039_m;\ 0{,}039_m \text{ und } 0{,}035_m.$$

Hiernach waren die härteren Stahlstücken schwächer erregt.

Versuch III. Wie die vier Stahlhärten zuerst mit dem langen Vertheilungsstab B behandelt wurden, so nahm man jetzt einen kleinen sehr starken Transversalmagneten und untersuchte nach dem Abzuge von diesem Stabe wie in Versuch II. die den Stahlhärten nun weiter gebliebenen magnetischen Quantitäten, indem der in genanntem Versuche gebrauchte Normalmagnet, — dessen magnetische Action m — wieder in derselben Entfernung lag. Für die vier Stahlhärten wurden folgende magnetische Erregungen gefunden:

$$0{,}057_m;\ 0{,}042_m;\ 0{,}042_m \text{ und } 0{,}041_m.$$

Auch hier waren die härteren Stahlstücke schwächer erregt, als das weiche Stahlstück C_b.

Versuch IV. Hier wurden die vier Stahlhärten C_b, C_r, C_e und C_f nach und nach der Wirkung zweier kurzen sehr starken Transversalmagneten ausgesetzt, welche in entgegengesetztem Sinne an die Stahlhärten gleichzeitig angestossen und nach kurzer Zeit auch wieder abgezogen wurden. Die magnetischen Quantitäten der vier verschiedenen Stahlhärten bei demselben Normalstabe, und in derselben Entfernung von der Nadel wie unter II. und III. waren:

$$0{,}132_m;\ 0{,}107_m;\ 0{,}101_m \text{ und } 0{,}125_m.$$

Im Allgemeinen gilt der Schluss des vorhergehenden Versuches auch hier.

Versuch V. Endlich wurden die vier Stahlhärten mit Hülfe eines starken Electromagneten ihren magnetischen Sättigungszuständen zugeführt. Auch hier lag wie früher derselbe Normalmagnet — dessen magnetische Quantität m — in der Entfernung 20^{cm} von der Nadel. Die grössten Entfernungen, wo die vier

Stahlhärten die abgelenkte Nadel nach einander auf Null wieder zurückbrachten, waren:

$$18{,}8^{cm};\ 20^{cm};\ 22{,}7^{cm} \text{ und } 23{,}4^{cm};$$

hiernach hatten die magnetischen Quantitäten die Werthe:

$$0{,}830_m;\ 1{,}000_m;\ 1{,}462_m \text{ und } 1{,}601_m.$$

Hieraus geht deutlich hervor, das mit der Härte der Stahlstücke die erregte magnetische Quantität wächst.

Versuch VI. Die im vorhergehenden Versuche ermittelten Werthe für die Sättigungszustände der Stahlhärten werden indessen von denselben nicht beibehalten, sondern nach Ablauf einer kurzen Zeit nehmen diese Werthe ab, die Erregungen werden schwächer. Um diese Schwächungen der Zahl nach zu bestimmen, dehnte ich diese Zeit bis zu drei Monaten aus, und legte die vier gesättigten Stahlhärten während dieser Periode an einen sicheren Ort. Nach Ablauf dieser Zeit wurden zunächst die noch vorhandenen magnetischen Quantitäten bestimmt, alsdann die vier Stahlhärten wie früher ihren magnetischen Sättigungszuständen zugeführt und abermals die gemeinschaftlichen Quantitäten der erregten Magnetismen gemessen; beide Resultate mit einander verglichen ergaben nach der Reihe die Gewinne der magnetischen Erregungen:

$$4{,}9\%;\ 6{,}1\%;\ 1{,}2\% \text{ und } 0\%.$$

Diese Werthe sind aber auch die Beträge, um die sich die gesättigten Stahlhärten innerhalb der drei Monate geändert hatten.

Die zu ziehenden Schlüsse beim Rückblick der voranstehenden Untersuchungen sind folgende:

a) Aus Versuch I. geht hervor, dass die magnetische Vertheilung bei einer weicheren Stahlsorte besser vor sich geht, als bei einer härteren; hiernach ist die Coërcitivkraft bei der Trennung des magnetischen Gleichgewichts schwächer bei weicherem und stärker bei härterem Stahle.

b) Nach den Versuchen II., III. und IV. sind die nach der Vertheilung an einem Stahlstücke noch gebliebenen magnetischen Quantitäten bei einer weicheren Stahlsorte im Allgemeinen grösser als bei einer härteren Sorte.

c) Nach Versuch V. liegt der magnetische Sättigungspunkt eines Magneten um so höher je härter der Stahl ist, aus dem er

gefertigt; es wachsen die aufgenommenen magnetischen Quantitäten ebenfalls mit der Härte des Stahles.

d) Nach demselben Versuche ist die Quantität des erregten Magnetismus in der weicheren Stahlsorte (dunkelblau) nur die Hälfte von der in der harten Stahlsorte (farblos) enthaltenen Quantität.

e) Nach d) ist überhaupt auch bei einem vollkommen harten Stahle (farblos) nur das eigentliche Maximum der magnetischen Erregung möglich.

f) Nach Versuch VI. sind die Aenderungen, welche Magnete hinsichtlich der in ihnen erregten magnetischen Quantitäten nach kurzer Zeit erleiden, von der Härte des Stahles abhängig; sie nehmen mit der Härte des Stahles ab und haben bei einer vollkommen harten Stahlsorte den Werth Null.

Note. Aus dem Vorhergehenden folgt, wie man zu verfahren hat um möglichst gute Magnete zu erhalten.

Anmerkung. An vier langen gesättigten Magnetstäben, deren Oxydationsfarben dunkelblau, wurden gleichfalls — unter Anwendung der Ablenkungsmethode — die Entfernungen von der Nadel, in denen die Magnete lagen, schon nach kurzer Zeit kleiner. Näher eingehend ergab es sich, dass die Abnahme der unipolaren magnetischen Quantitäten bei weichen Stahlstäben bis zu 30% der ursprünglichen Stärke betrug, dass aber, nachdem die Abnahme stattgefunden, ihre Intensitäten alsdann längere Zeit constant blieben. Das Weitere war, dass acht lange Magnetstäbe dargestellt wurden, mit der Weisung dieselben so viel als nur immer möglich zu härten. Als diese nun magnetisch gesättigt, zeigte es sich, dass die betreffenden Stäbe alle nur um ein Geringes, im äussersten Falle bis zu 5,6% der ursprünglichen Stärke, sich änderten, bei zweien waren diese Abnahmen sogar kaum merklich und betrugen noch nicht 1% der ursprünglichen unipolaren magnetischen Action. Mit Sicherheit kann man daher sagen, dass sehr harte lange Stäbe in kurzer Zeit nur um Weniges in ihren Sättigungszuständen sich ändern. Berücksichtigt man die Versuche der Stahlhärten und bedenkt weiter, dass es ungemein schwierig ist, lange Stahlstäbe durchgängig vollkommen zu härten, so kommt man zu dem Schlusse: dass Magnete verschiedener Formen, welche aus einer vollkommen harten Stahlsorte gefertigt sind, eine Zeit lang magnetisch gesättigt bleiben, und diesen Zustand nicht gleich zu ändern suchen.

V. Aenderungen magnetischer Actionen beim Aufeinanderlegen von Magnetstäben im entgegengesetzten Sinne.

Werden Magnetstäbe in gleichem Sinne auf einander gelegt, so finden bekanntlich Schwächungen der Actionen statt, erfolgt indessen das Aufeinanderlegen in ungleichem Sinne, so ergeben sich Stärkungen. Diese Stärkungen nachzuweisen, ist der Zweck dieser Abhandlung. Es ist jedoch nicht meine Absicht, alle die darüber angestellten Versuche zu veröffentlichen, da es zu weit führen würde, und ich theile daher nur das Wichtigste in Nachstehendem mit.

Die Kenntniss der magnetischen Compensationsmethode wird als bekannt angenommen. Weiter wird bemerkt, dass die magnetische Quantität der Normallamelle jedesmal mit m bezeichnet, und in dieser Quantität nach der Formel:

$$\frac{m_1}{m} = \frac{r_1^3}{r^3},$$

die verschiedenen magnetischen Quantitäten der zu untersuchenden Lamellen jedesmal ausgedrückt werden. Die Versuche sind sowohl mit kurzen Transversalmagneten, als auch mit Hufeisenlamellen angestellt worden. Es folgen die Untersuchungen:

I. Zwei nicht gesättigte kurze Transversalmagnete wurden in die gleiche magnetische Erregung $= 0{,}729_m$ versetzt, alsdann im entgegengesetzten Sinne aufeinander gelegt. Nach kurzer Zeit wieder getrennt, zeigten dieselben keine Aenderungen in ihren magnetischen Erregungen.

II. An zwei Ersatzlamellen in Hufeisenform, welche gleichfalls ungesättigt und von gleichen Dimensionen waren, wurde die vorhergehende Untersuchung wiederholt. Nach dem Abheben waren auch hier die magnetischen Erregungen noch dieselben.

III. Hier wurden zwei kurze Transversalstäbe genommen, von denen der eine magnetisch gesättigt $= 2{,}460_m$ und der andere ungesättigt $= 0{,}729_m$ stark war. Nach dem Aufeinanderlegen und Abheben zeigte sich, dass der erste Stab unverändert geblieben, während der zweite Stab nun $1{,}061_m$ stark war, oder um 40% des ursprünglich erregten Magnetismus zugenommen hatte.

IV. Von zwei Hufeisenlamellen hatte die gesättigte Action den Werth $= 9{,}663_m$ und die ungesättigte die Stärke $= 0{,}300_m$. Auch hier blieb die gesättigte Action unverändert, dagegen ging

die magnetische Erregung der andern Lamelle in die Quantität $1{,}520_m$ über. Dem zu Folge ist die schwache Action viermal so stark magnetisch erregt worden, als sie es ursprünglich war.

V. Von zwei Hufeisenlamellen, welche beide ungesättigt waren, hatte die eine die Stärke $m_1 = 1{,}520_m$ und die andere $m_2 = 0{,}314_m$. Nach dem Abheben war m_1 noch unverändert, m_2 ging aber in $0{,}531_m$ über, oder nahm an Intensität um 68% der ursprünglichen Quantität zu.

VI. Drei gleich starke ungesättigte Transversalmagnete und eben solche in Hufeisenform hatten ihre magnetische Actionen nach dem Aufeinanderlegen in entgegengesetztem Sinne nicht geändert.

VII. Von drei Transversalmagneten war m_2 gesättigt $= 2{,}460_m$ und $m_1 = m_3 = 0{,}857_m$ ungesättigt. Das Aufeinanderlegen erfolgte in der Reihe der Indices. Nach dem Abheben zeigte sich, dass m_2 noch unverändert war, während m_1 und m_3 sich in $1{,}157_m$ umgeändert, also an Intensität um 35% der ursprünglich erregten Magnetismen zugenommen hatten.

VIII. Für drei Hufeisenlamellen waren $m_2 = 9{,}663_m$ die gesättigte und $m_1 = m_3 = 1{,}953_m$ die ungesättigte magnetische Actionen. Nach der Einwirkung aufeinander zeigte sich m_2 unverändert, dagegen war nun $m_1 = m_3 = 2{,}299_m$. Es fand sonach bei beiden Ersatzlamellen eine Zunahme von 17% der ursprünglichen magnetischen Erregungen statt.

IX. Von drei Transversalmagneten war m_2 gesättigt, $m_2 = 2{,}460_m$, $m_1 = 0{,}125_m$ und $m_3 = 0{,}857_m$ hingegen waren magnetisch ungesättigt. Nach dem Aufeinanderlegen dieser drei Magnete in der Reihe der Indices, war m_2 noch unverändert geblieben, dagegen waren nun die magnetischen Erregungen von $m_1 = 0{,}884_m$ und von $m_3 = 1{,}442_m$. Der Gewinn von m_1 war bei diesem Versuche sehr bedeutend, die Lamelle war 6 mal stärker als anfänglich erregt; bei m_3 hingegen betrug derselbe 68% der ursprünglichen gemeinschaftlichen Quantität des erregten Magnetismus.

X. Unter ähnlichen Verhältnissen wie unter IX. waren drei Hufeisenlamellen $m_2 = 9{,}663_m$, $m_1 = 0{,}389_m$ und $m_3 = 1{,}953_m$ vorhanden, nach dem Abheben wurde m_2 unverändert vorgefunden, m_1 und m_3 dagegen änderten ihre Actionen, m_1 war $= 1{,}404_m$ und $m_3 = 2{,}146_m$. Die Stärkung von m_1 war auch hier sehr bedeutend, die Lamelle war mehr als zweimal stärker als anfänglich

erregt worden, diejenige von m_3 hingegen betrug nur 9% der ursprünglichen Erregung.

XI. Endlich waren vier magnetische Actionen in Form von Transversalmagneten vorhanden, nämlich: $m_1 = m =$ gesättigte Action, $m_2 = 0{,}456_m$, $m_3 = 0{,}125_m$ und $m_4 = 0{,}034_m$. Die drei letzten Actionen waren sämmtlich magnetisch ungesättigt. Das Aufeinanderlegen erfolgte wieder, wie früher, in der Reihe der Indices, die magnetischen Erregungen nach der Trennung waren: $m_1 = m$ (unverändert), $m_2 = 0{,}474_m$ (4% Stärkung), $m_3 = 0{,}226_m$ (80% Stärkung) und endlich die letzte Action $m_4 = 0{,}100_m$ war gut noch einmal so stark erregt, als es vor dem Aufeinanderlegen der Fall war.

XII. Vier Hufeisenlamellen hatten nachstehende gemeinschaftliche Quantitäten der erregten Magnetismen: $m_1 = 9{,}663_m$, $m_2 = 2{,}744_m$, $m_3 = 1{,}259_m$ und $m_4 = 0{,}238_m$. Nach dem Auseinandernehmen hatte sich m_2 in $2{,}863_m$ (4,7% Stärkung) m_3 in $1{,}404_m$ (11% Stärkung) und endlich m_4 in $0{,}884_m$ umgewandelt. Die Stärkung der letzteren Action m_4 war auch hier bedeutend, sie betrug über das Doppelte der anfänglichen Stärke.

Anmerkung. Zur Beleuchtung der beiden letzten Untersuchungen (XI. und XII.) wurden noch einige Zwischenversuche angestellt, welche ergaben, dass m_1 nur auf m_2 einwirkte, hierauf das gestärkte m_2 nur auf m_3 u. s. f. ihre Einwirkungen zu äussern suchten.

Aus den vorhergehenden Versuchen sind folgende Schlüsse zu ziehen bezüglich der Stärkungen magnetischer Actionen von kleinen Transversalmagneten oder Hufeisenlamellen beim Aufeinanderlegen im entgegengesetzten Sinne:

a) Ersatzmagnete erleiden keine Stärkungen, sie bleiben auch nach dem Trennen noch Ersatzmagnete.

b) Ersatzmagnete, welche nicht gesättigt sind, erleiden durch eine starke magnetische Action, welche in der Mitte liegt, gleiche Stärkungen.

c) Die Stärkungen von nicht gesättigten magnetischen Actionen fallen im Allgemeinen um so grösser aus, je ungleicher die magnetischen Actionen sind, welche an einander angrenzen.

d) Die Stärkung geschieht nur direct durch die angrenzende magnetische Action.

e) Die stärksten als auch gesättigte magnetische Actionen ändern beim Aufeinanderlegen ihre Intensitäten nicht.

f) Die schwache Action wird beim Aufeinanderlegen nie so gestärkt, dass sie an Intensität der starken Action gleich wird.

XI. Aenderungen magnetischer Actionen beim Anstosse von Magneten in ungleichem Sinne.

Ueber diesen Gegenstand ist schon Einiges mitgetheilt und auch das Verfahren, nach welchem experimentirt wurde, deutlich beschrieben worden, es ist daher nur nöthig die weiter angestellten Versuche anzugeben. Die Quantität des erregten Magnetismus der Normallamelle ist hier wieder $= m$, und in dieser nach der Relation:

$$\frac{m_I}{m} = \frac{r_I^3}{r^3},$$

wurden gleichfalls die jedesmaligen Quantitäten erregter Magnetismen der zu untersuchenden Lamellen ausgedrückt. Die zur Ausführung gekommenen Versuche sind folgende:

1. Zwei kurze Transversalstäbe m_I und m_{II} hatten vor dem Anstosse die magnetischen Erregungen: $m_I = 1{,}953_m$ = gesättigt und $m_{II} = 0{,}125_m$ = ungesättigt. Nach erfolgtem Anstosse in ungleichem Sinne, zeigte sich m_I unverändert, während $m_{II} = 0{,}244_m$ gefunden wurde, hatte also an Erregung um 95% der ursprünglichen Action zugenommen.

2. Für zwei Hufeisenlamellen war $m_I = 2{,}515_m$ = gesättigt und $m_{II} = 0{,}157_m$ = ungesättigt. Nach dem Zusammenstoss (Fig. 3.) in entgegengesetztem Sinne zeigte sich m_I unverändert, m_{II} dagegen war $= 0{,}274_m$ stark geworden, hatte also um 74% zugenommen.

3. Von zwei ungesättigten Transversalmagneten war $m_I = 0{,}512_m$ und $m_{II} = 0{,}107_m$; nach dem Versuche war m_I unverändert geblieben und m_{II} hatte sich in $0{,}157_m$ umgeändert, sonach um 46% zugenommen.

4. Zwei ungesättigte Hufeisenmagnete hatten die Werthe $m_I = 0{,}636_m$ und $m_{II} = 0{,}064_m$; nach dem Versuche fand man m_I unverändert, hingegen $m_{II} = 0{,}110_m$. Die Action m_{II} hatte an Stärke um 70% zugenommen.

5. Zwei nicht gesättigte Ersatzmagnete hatten vor und nach dem Anstosse in ungleichem Sinne die Werthe: $m_I = m_{II} = 0{,}561_m$; ebenso behielten zwei Hufeisenlamellen vor und nach dem Anstosse dieselben magnetischen Erregungen nämlich: $m_I = m_{II} = 0{,}157_m$.

6. Die magnetischen Quantitäten von drei Transversalmagneten waren: $m_I = 0{,}274_m$ = ungesättigt, $m_{II} = 1{,}953_m$ = gesättigt und $m_{III} = 0{,}076_m$ = ungesättigt. In der Reihe der Indices an einander gestossen und nach kurzer Zeit vorsichtig getrennt, zeigte sich m_{II} unverändert, während m_I in $0{,}421_m$ und m_{III} in $0{,}274_m$ sich umänderten. Die Action m_I hatte 53% an Intensität gewonnen, während m_{III} gut 2,5 mal stärker als ursprünglich erregt wurde.

7. Die vorhergehende Untersuchung wurde auch auf Hufeisenlamellen ausgedehnt. Die Actionen vor dem Versuche waren: $m_I = 0{,}512_m$ = ungesättigt, $m_{II} = 2{,}352_m$ = gesättigt und $m_{III} = 0{,}019_m$ = ungesättigt. Nachdem dieselben (Fig. 4) angestossen und abgezogen waren, zeigte sich m_{II} unverändert, $m_I = 0{,}592_m$ und $m_{III} = 0{,}117_m$. Der Gewinn von m_I betrug 15%; dagegen wurde m_{III} fünfmal stärker als anfänglich erregt.

8. Jetzt wurde die gesättigte Action an ein Ende, die schwache in die Mitte und die etwas stärkere — jedoch ungesättigte magnetische Action — an das andere Ende derselben angestossen. Für Transversalstäbe waren die vorhandenen Actionen: $m_I = 1{,}953_m$ (gesättigt), $m_{II} = 0{,}107_m$ (ungesättigt) und $m_{III} = 0{,}421_m$ (ebenfalls ungesättigt). Nachdem der Versuch wie früher angestellt, waren m_I und m_{III} unverändert geblieben, hingegen wurde $m_{II} = 0{,}274_m$ stark gefunden. Die Action m_{II} ist hier 1,5 mal stärker erregt worden.

9. Als letzte Combination wurde nun in die Mitte eine mittelstarke ungesättigte, an das eine Ende eine gesättigte und an das andere Ende eine schwache nicht gesättigte Action in Form von Transversalstäben angestossen. Die Actionen hatten bei diesem Versuche die Werthe: $m_I = 1{,}953_m$ (gesättigt), $m_{II} = 0{,}421_m$ und $m_{III} = 0{,}046_m$ (beide nicht gesättigt). Nach dem Anstosse hatten sich m_{II} in $0{,}512_m$ und m_{III} in $0{,}175_m$ umgeändert. Der Gewinn der Action m_{II} war 21%, hingegen wurde m_{III} über 2,5 mal stärker als anfänglich erregt.

Drei Hufeisenlamellen hatten nachstehende Intensitäten: $m_I = 2{,}406_m$, $m_{II} = 0{,}274_m$ und $m_{III} = 0{,}024_m$. Nach dem Versuche hatten sich m_{II} in $0{,}343_m$ und m_{III} in $0{,}064_m$ umgewandelt.

Während die Action m_{II} 25% ihrer Intensität gewann, wurde m_{III} gut $1\frac{1}{2}$ mal stärker.

Note. Aus Zwischenversuchen stellte sich heraus, dass das gestärkte m_{II} nur vollständig m_{III} (die schwache magnetische Action) erzeugen konnte.

10. Die geringen Stärkungen beim Anstosse dreier ungesättigten Ersatzmagnete wurden nicht mehr wie bei früheren Versuchen aufgefunden, indem noch mehr darnach gestrebt wurde, eine vollkommnere Gleichheit der Magnete herzustellen. Ersatzmagnete bleiben daher auch nach dem Anstosse noch Ersatzmagnete.

Die Versuche, welche mit vier Actionen angestellt wurden, sind folgende:

11. Zunächst wurden in der Reihe der Indices die Transversalstäbe mit den folgenden Actionen aneinander gestossen: $m_I = m$ = ges.; $m_{II} = m_{III} = m_{IV} = 0{,}216_m$ = ungesättigt. Nach dem Versuche war $m_I = m_{II} = 0{,}274_m$, $m_{III} = 0{,}264_m$ und $m_{IV} = 0{,}232_m$. Die Action m_{II} gewann 26%, m_{III} 22% und m_{IV} nur 7% ihrer anfänglichen Intensitäten.

12. Bei diesem Versuche war $m_I = m$ = gesättigt, $m_{II} = m_{III} = 0{,}274_m$ = ungesättigt und $m_{IV} = 0{,}614_m$ = gesättigt. Nach dem Anstosse waren m_I und m_{IV} noch unverändert, während sich m_{II} in 0.294_m und m_{III} in $0{,}307_m$ umwandelten; m_{II} gewann 7% und m_{III} 12% der anfänglichen Stärke.

13. Hier waren die Actionen: $m_I = m$ = gesättigt, m_{II}, m_{III} und m_{IV} jedoch ungesättigt, $m_{II} = 0{,}447_m$, $m_{III} = 0{,}125_m$ und $m_{IV} = 0{,}027_m$. Nach dem Versuche zeigte sich $m_I = m$ unverändert, $m_{II} = 0{,}465_m$, $m_{III} = 0{,}148_m$ und $m_{IV} = 0{,}034_m$. Die Action m_{II} gewann 4%, m_{III} 18% und m_{IV} 25% ihrer ursprünglichen Erregungen.

Note. Aus Nebenversuchen stellte sich wieder heraus, dass das gestärkte m_{II} allein m_{III}, und ebenso das gestärkte m_{III} allein die Action $m_{IV} = 0{,}034_m$ erzeugen konnten.

14. Die vorhergehenden Versuche wurden nur mit kleinen Transversalmagneten angestellt, doch wurde der letzte Versuch auch mit Hufeisenlamellen wiederholt. Die vorhandenen Actionen waren: $m_I = 2{,}515_m$ = gesättigt, $m_{II} = 1{,}124_m$, $m_{III} = 0{,}456_m$ und $m_{IV} = 0{,}054_m$; die drei letzten waren ungesättigte Actionen. Nach

dem Anstosse hatten m_{II}, m_{III} und m_{IV} ihre Actionen geändert, m_{II} war $= 1{,}191_m$, $m_{III} = 0{,}512_m$ und $m_{IV} = 0{,}068_m$. Die Gewinne sind: 5%, 12% und 25%.

Aus den 14 Versuchen sind in Bezug auf die Aenderungen magnetischer Erregungen beim entgegengesetzten Anstosse folgende Schlüsse zu ziehen:

I. Ersatzmagnete erleiden keine Aenderungen.

II. Gesättigte Actionen bleiben gleichfalls constant.

III. Die stärkste magnetische Action, welche zum Anstosse kommt, erleidet keine Aenderung auch für den Fall, wenn sie nicht magnetisch gesättigt ist.

IV. Eine starke magnetische Action stärkt stets eine schwächere anstossende und zwar um so mehr, je verschiedener die beiden anstossenden magnetischen Actionen sind.

V. Die Stärkung erfolgte nur direct auf die anstossende Action.

VI. Die schwächere Action wird nie so gestärkt, dass sie an Intensität der stärkeren magnetischen Action gleich wird.

Anmerkung 1. Weiter muss bemerkt werden, dass bei denselben magnetischen Actionen die schwächere Action auch immer um denselben Betrag gestärkt wird. Bei einem zweiten Anstosse nach der ersten Trennung zeigen sich keine Aenderungen (Stärkungen) mehr.

Anmerkung 2. Was die Zeit anlangt, innerhalb welcher die Stärkungen vor sich gehen, so erfolgen letztere sehr rasch; ich habe bei Versuchen gesehen, dass bei einer Dauer von 1,6 Secunden die Stärkungen bereits geschehen waren. In kürzeren Zeiten lassen sich die Versuche wohl nicht ausführen, indem alsdann bei der Trennung kein ruhiges Abziehen, sondern ein Abreissen stattfinden, und Schwächungen wieder hierdurch erfolgen würden.

Anmerkung 3. Sollte während eines Versuches die magnetische Action der Normallamelle m sich geändert haben, so ist der betreffende Versuch von Neuem anzustellen.

Nachtrag. Wird in Erwägung gezogen, dass beim entgegengesetzten Anstosse Stärkungen erfolgen, so liegt der Gedanke nahe, dass Schwächungen bei gleichem Anstosse entstehen müssen. Die Versuche welche angestellt wurden, waren alle erfolglos mit Ausnahme eines einzigen, der wie folgt vorgenommen wurde.

Zwei starke magnetische Actionen: $m_I = 2{,}197_m$ und $m_{III} = 1{,}728_m$ wurden an die Enden einer schwachen Action $m_{II} = 0{,}512_m$ angestossen, nach dem Abziehen war hier m_{II} auf $0{,}300_m$ herabgegangen, und hatte 41% der ursprünglichen Intensität verloren.

IX.

Propriété des coniques relative aux tangentes issues d'un même point.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences,
Professeur de mathématiques à Paris.

1. **Théorème.** Les deux tangentes menées d'un même point à une conique, sont entre elles comme les deux normales correspondantes, terminées à l'un ou à l'autre des axes de la courbe.

1 Ellipse. Soient T', T'' les deux tangentes qui, issues du point (x, y), touchent l'ellipse

$$a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2 = 0$$

aux points (x', y'), (x'', y''). Représentons par N', N'' les deux normales correspondantes, qui vont des points de contact à l'axe 2a.

Nous avons les quatre égalités de condition:

$$a^2yy' + b^2xx' - a^2b^2 = 0, \qquad a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 = 0;$$

$$a^2yy'' + b^2xx'' - a^2b^2 = 0, \qquad a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2 = 0.$$

Les deux premières donnent, par soustraction,

$$(1) \ldots\ldots\ldots a^2y'(y-y') + b^2x'(x-x') = 0,$$

pendant que la troisième peut s'écrire

$$(2) \ldots. a^2y''(y-y') + b^2x''(x-x') + a^2y'y'' + b^2x'x'' - a^2b^2 = 0.$$

Si nous résolvons (1) et (2) par rapport à $x-x'$ et $y-y'$, nous trouverons que

$$\frac{x-x'}{a^2y'} = \frac{y-y'}{b^2x'} = \frac{a^2y'y'' + b^2x'x'' - a^2b^2}{a^2b^2(x'y'' - y'x'')}.$$

Or on a évidemment

$$\frac{x-x'}{a^2y'} = \frac{y-y'}{b^2x'} = \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{\sqrt{a^4y'^2 + b^4x'^2}};$$

le numérateur de la troisième fraction est égal à T', pendant que le dénominateur est égal à a^2N'; il vient donc, en valeur absolue,

$$\frac{T'}{N'} = \frac{a^2y'y'' + b^2x'x'' - a^2b^2}{b^2(x'y'' - y'x'')}.$$

Le second membre est symétrique par rapport aux coordonnées des points de contact des deux tangentes T', T''; il est donc aussi égal à $\frac{T''}{N''}$, de sorte que

$$(I.) \ldots\ldots \frac{T'}{N'} = \frac{T''}{N''} = \frac{a^2y'y'' + b^2x'x'' - a^2b^2}{b^2(x'y'' - y'x'')}.$$

2. **Corollaire.** Les droites qui joignent le point de concours de deux tangentes aux pieds de leurs normales respectives, sont également inclinées sur ces tangentes.

En désignant cet angle d'inclinaison par γ, on a

$$(II.) \ldots\ldots \operatorname{cotang}\gamma = \frac{a^2y'y'' + b^2x'x'' - a^2b^2}{b^2(x'y'' - y'x'')}.$$

3. Hyperbole. La démonstration et les résultats obtenus sont les mêmes qui pour l'ellipse. Il suffit de changer $\pm b^2$ en $\mp b^2$.

4. **Parabole.** L'équation $Y^2 = 2pX$ étant celle de la parabole, les quatre relations de condition seront

$$yy' = p(x + x'), \qquad y'^2 = 2px';$$
$$yy'' = p(x + x''), \qquad y''^2 = 2px'';$$

dont les deux premières donnent par soustraction

(3) . . . . . $y'(y - y') - p(x - x') = 0,$

pendant que la troisième peut s'écrire

(4) . . . . . $2y''(y - y') - 2p(x - x') = (y' - y'')^2.$

Résolvant (3) et (4) par rapport à $x - x'$, $y - y'$, on obtient

$$\frac{x - x'}{y'} = \frac{y - y'}{p} = \frac{y'' - y'}{2p},$$

d'où on tire

$$\frac{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}{\sqrt{y'^2 + p^2}} = \frac{y'' - y'}{2p},$$

et, par suite, en valeur absolue, comme au n° 1,

(III.) . . . . . $\frac{T'}{N'} = \frac{T''}{N''} = \frac{y'' - y'}{2p}.$

5. Les quantités x, y étant les coordonnées de l'intersection des deux tangentes, y', y'' sont les racines de l'équation

$$z^2 - 2yz + 2px = 0,$$

de sorte que

$$y'' - y' = 2\sqrt{y^2 - 2px}.$$

Nous avons donc aussi

(IV.) . . . . . $\frac{T'}{N'} = \frac{T''}{N''} = \frac{\sqrt{y^2 - 2px}}{p},$

d'où

(V.) . . . . . $\sin\gamma \frac{p}{\sqrt{y^2 - 2px + p^2}}.$

6. **Angle des deux tangentes.** 1° Ellipse. Représentons par m le coefficient angulaire de l'une d'elles. Nous avons

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

d'où

$$(y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2,$$

ou bien

$$(5) \ldots\ldots (x^2-a^2)m^2-2xym+y^2-b^2=0.$$

On en tire

$$(6) \ldots\ldots m=\frac{xy\pm\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{x^2-a^2}$$

pour les valeurs des coefficients angulaires m', m'' des deux tangentes.

Puisque

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{m'-m''}{1+m'm''},$$

et que, d'après (6) et (5)

$$m'-m''=\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{x^2-a^2}, \qquad m'm''=\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2},$$

il vient de suite

$$(VI.) \ldots\ldots \operatorname{tang}\varphi=\frac{2\sqrt{a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2}}{x^2+y^2-a^2-b^2}.$$

2° Hyperbole. On trouve de même

$$(VII.) \ldots\ldots \operatorname{tang}\varphi=\frac{2\sqrt{a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2}}{x^2+y^2-a^2+b^2}.$$

3° Parabole. Nous avons

$$y=mx+\frac{p}{2m},$$

ou

$$2xm^2-2ym+p=0;$$

d'où on tire

$$m=\frac{y\pm\sqrt{y^2-2px}}{2x},$$

et, par suite,

$$m'-m''=\frac{2\sqrt{y^2-2px}}{2x}, \qquad m'm''=\frac{p}{2x};$$

donc

$$(VIII.) \ldots\ldots \operatorname{tang}\varphi=\frac{2\sqrt{y^2-2px}}{2x+p}.$$

X.

Surface du quadrilatère compris entre les deux tangentes menées du point (x, y) à une conique à centre, et les deux droites qui joignent le centre aux points de contact.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Doctor ès sciences
Professeur de mathématiques à Paris.

L'aire de ce quadrilatère, pour l'ellipse rapportée à ses axes $2a$, $2b$, est

$$\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}.$$

1. Soient x', y' les coordonnées du point de contact M' de la tangente

(1) . . . . . $Y = mX + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

à l'ellipse

(2) . . . . . $a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2 = 0,$

qui est menée par le point P, (x, y); de sorte que

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \qquad y' = mx' + \sqrt{a^2m^2 + b^2},$$

d'où

(3) . . . . . $m = \dfrac{y - y'}{x - x'}.$

Or la distance du centre O à cette tangente (1) est

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots d = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Substituant dans (4) la valeur (3) de m, on obtient pour la valeur de d l'expression

$$d = \frac{\sqrt{a^2(y-y')^2 + b^2(x-x')^2}}{\sqrt{(y-y')^2 + (x-x')^2}}.$$

Le dénominateur est la distance PM' ou p du point P, (x, y) de la tangente au point de contact M', (x', y'); quant au numérateur, la quantité sous le radical revient à

$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2(a^2yy' + b^2xx') + a^2y'^2 + b^2x'^2;$$

or, le point (x', y') appartenant à l'ellipse, on a

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2;$$

et le point (x, y) se trouvant sur la tangente en (x', y'), il vient aussi

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$

Donc on a

$$d = \frac{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}}{p},$$

d'où on tire pour la surface du triangle $OM'P$:

$$OM'P = \tfrac{1}{2}dp = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}.$$

Cette expression est indépendante des coordonnées du point de contact M'; si donc M'' désigne le point de contact de la deuxième tangente issue du point P, on aura encore

$$OM''P = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2};$$

de sorte que

$$(I.) \quad \ldots\ldots OM'PM'' = \sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}$$

Théorème I. Ainsi: La surface du quadrilatère entre les deux tangentes issues d'un même point et les deux droites menées du centre à leurs points de contact, est égale à la racine carrée du premier membre de l'équation de l'ellipse, dans lequel on a remplacé les variables courantes par les coordonnées du point de départ des deux tangentes.

2. On verrait pareillement que la surface du triangle compris entre une tangente et les droites menées du centre O à deux points quelconques P', (x', y') et P'', (x'', y'') de cette tangente, est

(II.) . . . . $OP'P'' = \frac{1}{2}\sqrt{a^2(y'-y'')^2 + b^2(x'-x'')^2}$.

3. La double surface de ce triangle étant aussi

$$x'y'' - y'x'',$$

la relation

(III.) . . . $(x'y'' - y'x'')^2 = a^2(y'-y'')^2 + b^2(x'-x'')^2$

exprime la condition pour que deux points appartiennent à une même tangente à l'ellipse.

4. Cette relation de condition peut encore s'écrire:

(IV.)

$$(x'^2 - a^2)(y''^2 - b^2) + (x''^2 - a^2)(y'^2 - b^2) = 2(x'x'' - a^2)(y'y'' - b^2).$$

5. **Théorème II.** Lorsqu'on mène une tangente AMB entre deux diamètres conjugués $2a'$, $2b'$ d'une conique à centre, le rayon central OM mené au point de contact M, divise le triangle formé par la tangente et les deux demi-diamètres en deux triangles AMO, BMO, qui ont pour moyen proportionnel le triangle construit sur les deux demi-diamètres conjugués a', b'.

Pour le démontrer, soient x', y' les coordonnées du point de contact M, θ l'angle compris entre a' et b'. La double surface du triangle déterminé par l'origine et les deux points (x', y'), (x'', y'') est exprimée par la valeur absolue de

$$(x'y'' - y'x'')\sin\theta.$$

Mais la tangente en M

$$a'^2yy' + b'^2xx' - a'^2b'^2 = 0$$

coupe OA en A, dont les coordonnées sont

$$y'' = 0, \quad x'' = \frac{a'^2}{x'},$$

de sorte que le triangle

$$AMO = \frac{a'^2y'\sin\theta}{2x'};$$

de même la tangente coupe OB au point B dont les coordonnées sont

$$x'' = 0, \quad y'' = \frac{b'^2}{y'};$$

par suite le triangle

$$BMO = \frac{b'^2 x' \sin\theta}{2y'}.$$

On a donc, en multipliant,

$$\text{(V.)} \ldots\ldots AMO \times BMO = \left(\frac{a'b' \sin\theta}{2}\right)^2 = \left(\frac{ab}{2}\right)^2,$$

a et b étant les deux demi-axes de l'ellipse. Ce qu'il fallait démontrer.

6. **Tangentes parallèles.** Soient P', (x', y'); P'', (x'', y'') les points où la tangente en M, (x, y) rencontre deux tangentes parallèles; les droites

$$OP' \text{ ou } Y = \frac{y'}{x'} X,$$

$$OP'' \text{ ou } Y = \frac{y''}{x''} X$$

seront deux diamètres conjugués, de sorte que

$$\frac{y'y''}{x'x''} = -\frac{b^2}{a^2}$$

ou

$$\text{(5)} \ldots\ldots a^2y'y'' + b^2x'x'' = 0.$$

Les deux triangles $P'MO$, $P''MO$ ayant pour moyen proportionnel $\frac{ab}{2}$, il vient, en vertu de (I.) et de (V.)

$$(a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2)(a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2) = a^4b^4,$$

ou

$$\text{(6)} \ldots\ldots a^2y''^2 + b^2x''^2 = \frac{a^2b^2(a^2y'^2 + b^2x'^2)}{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}.$$

Résolvant les deux équations (5) et (6), on trouve

$$\text{(VI.)} \ldots x'' = \frac{\pm a^2y'}{\sqrt{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}}, \quad y'' = \frac{\mp b^2x'}{\sqrt{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}},$$

pour les coordonnées de P'' en valeur de celles de P'.

7. On aurait de même

$$\text{(VII.)}\ldots\ldots x' = \frac{\pm a^2 y''}{\sqrt{a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2}}, \quad y' = \frac{\mp b^2 x'}{\sqrt{a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2}}$$

pour les coordonnées de P' en fonction de celles de P.

8. Mettons ces valeurs dans l'expression

$$x'y'' - y'x''$$

de la double surface du triangle $P'P''O$; nous trouvons

(VIII.)

$$P'P''O = \frac{a^2y'^2 + b^2x'^2}{2\sqrt{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}} = \frac{a^2y''^2 + b^2x''^2}{2\sqrt{a^2y''^2 + b^2x''^2 - a^2b^2}}$$

pour la surface du triangle que forme le centre avec le segment déterminé sur une tangente par deux tangentes parallèles.

XI.

Propriété particulière à la parabole, relativement aux tangentes issues d'un même point.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences,
Professeur de mathématiques à Paris.

---

1. **Théorème.** Si l'on mène deux tangentes à la parabole,

1° l'abscisse de leur point d'intersection est moyenne géométrique entre les abscisses des deux points de contact;

2° l'ordonnée du même point est moyenne arithmétique entre les ordonnées des deux points de contact.

Soit (x, y) le point d'intersection des deux tangentes; et soient (x', y'), (x'', y'') leurs points de contact. L'équation de la parabole étant $Y^2 = 2pX$, nous avons les quatre relations de condition

$$yy' = p(x + x'), \qquad yy'' = p(x + x''),$$
$$y'^2 = 2px', \qquad y''^2 = 2px'';$$

qui, prises deux à deux, donnent

$$\frac{y'^2}{y''^2} = \frac{(x + x')^2}{(x + x'')^2} = \frac{x'}{x''}.$$

1° Par cette dernière égalité on obtient

$$x^2(x' - x'') = x'^2x'' - x'x''^2 = x'x''(x' - x''),$$

d'où on tire

(I.) . . . . . $x = \sqrt{x'x''}$.

2° D'après cela, on a

$$y = \frac{2px' + 2px}{2y'} = \frac{2px' + \sqrt{2px'} \cdot \sqrt{2px''}}{2y'} = \frac{y'^2 + y'y''}{2y'},$$

c'est-à-dire

(II.) . . . . . $y = \frac{y' + y''}{2}$.

2. Soient (x', y'), (x'', y''), (x''', y''') les points de contact de trois tangentes à la parabole, et (x_3, y_3), (x_2, y_2), (x_1, y_1) les points d'intersection mutuelle de ces tangentes. Par le théorème précédent nous avons

$$x_1 = \sqrt{x''x'''}, \qquad 2y_1 = y'' + y''',$$
$$x_2 = \sqrt{x'''x'}, \qquad 2y_2 = y''' + y',$$
$$x_3 = \sqrt{x'x''}, \qquad 2y_3 = y' + y'';$$

multipliant verticalement les trois premières égalités, et ajoutant de même les trois dernières, on obtient

(III.) . . . . . $x_1x_2x_3 = x'x''x'''$,

(IV.) . . . . . $y_1 + y_2 + y_3 = y' + y'' + y'''$;

donc

Corollaire. Lorsque trois tangentes sont menées à la parabole

1° le produit des abscisses de leurs trois points d'intersection est égal au produit des abscisses de leurs points de contact;

2° la somme des ordonnées de ces points d'intersection est égale à la somme des ordonnées de leurs points de contact.

XII.

Surface du triangle compris entre les deux droites qui joignent un point quelconque du plan à deux points arbitraires de la parabole.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,
Docteur ès sciences
Professeur de mathématiques à Paris.

1. Soit la parabole $y^2 - 2px = 0$, dont le sommet est en O, le foyer en F, le pied de la directrice en D. Considérons sur la courbe deux points M', M'' dont les coordonnées sont x', y' et x'', y''; et désignons par x, y les coordonnées du pôle P de la corde $M'M''$.

De cette sorte on a

(a) . . . . . $y'^2 = 2px'$, $\qquad y''^2 = 2px''$;

(b) . . . . $y = \frac{y' + y''}{2}$, $\qquad x = \sqrt{x'x''} = \frac{y'y''}{2p}$.

Si l'on joint un point quelconque A, (α, β) du plan aux extrémités de la corde $M'M''$, on obtiendra la surface S du triangle résultant $AM'M''$, en remplaçant x et y par α et β dans la formule

$$2S = y(x'-x'')+y'(x''-x)+y''(x-x').$$

On trouve ainsi, en multipliant par $2p$ et en tenant compte des égalités (a),

$$\text{(I.)} \ldots\ldots \quad 4pS = (y'-y'')[\beta(y'+y'')-y'y''-2p\alpha].$$

Les valeurs (b) donnant

$$y'-y'' = 2\sqrt{y^2-2px}, \quad y'+y'' = 2y, \quad y'y'' = 2px;$$

on aura aussi, en substituant dans (I.)

$$\text{(II.)} \ldots\ldots \quad pS = \sqrt{y^2-2px}\,[\beta y - p(x+\alpha)].$$

2. **Application de ces formules.** 1°. Si le point A se confond avec un troisième point M''' ou (x''', y''') de la parabole, on aura

$$\beta = y''', \qquad 2p\alpha = 2px''' = y'''^2,$$

ce qui donne

$$\beta(y'+y'')-y'y''-2p\alpha = y'''(y'+y'')-y'y''-y'''^2 = (y''-y''')(y'''-y').$$

En substituant dans (I), on trouve, pour la

Surface du triangle inscrit dans la parabole:

$$\text{(1)} \ldots\ldots \quad M'M''M''' = \frac{(y'-y'')(y''-y''')(y'''-y')}{4p}.$$

2° Si le point A est le pôle P de la corde $M'M''$, il faudra poser

$$\alpha = x = \frac{y'y''}{2p}, \qquad \beta = y = \frac{y'+y''}{2},$$

et on aura pour la

Surface du triangle déterminé par le pôle P et sa polaire:

$$\text{(2)} \ldots\ldots \quad PM'M'' = \frac{(y'-y'')^3}{8p} = \frac{1}{p}(y^2-2px)^{\frac{3}{2}}.$$

3° En faisant $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on obtient pour la

Surface du triangle formé par les droites joignant le sommet à deux points de la parabole:

$$(3)\ldots\ OM'M'' = \frac{(y'-y'')y'y''}{4p} = x\sqrt{y^2-2px}.$$

4° Les valeurs $\alpha = \frac{p}{2}$, $\beta = 0$ fournissent pour la

Surface du triangle compris entre les droites qui joignent le foyer à deux points de la parabole:

$$(4)\ldots FM'M'' = \frac{(y'-y'')(y'y''+p^2)}{4p} = \tfrac{1}{2}(2x+p)\sqrt{y^2-2px}.$$

5° Enfin si l'on pose $\alpha = -\frac{p}{2}$, $\beta = 0$, on a pour la

Surface du triangle compris entre les droites qui joignent le pied de la directrice à deux points de la parabole:

$$(5)\ldots DM'M'' = \frac{(y'-y'')(p^2-y'y'')}{4p} = \tfrac{1}{2}(2x-p)\sqrt{y^2-2px}.$$

6° Admettons en particulier, que la corde $M'M''$ passe par le foyer F; l'expression (4) donne

$$y'y'' = -p^2, \qquad x = -\frac{p}{2},$$

ce qui change nos résultats dans les suivants:

$$M'M''M''' = \frac{(2x'+p)(y'y'''+p^2)(y'-y''')}{4y'^2},$$

$$PM'M'' = \frac{1}{p}(y^2+p^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$OM'M'' = \frac{p}{4}(y'-y''),$$

$$DM'M'' = \frac{p}{2}(y'-y'').$$

Les valeurs (1) et (2) font voir que

La surface du triangle inscrit est égal au produit des différences entre les ordonnées des sommets,

prises deux à deux, divisé par quatre fois le paramètre.

La surface du triangle formé par une corde et le pôle de cette corde, est égale au cube de la demi-différence entre les ordonnées des extrémités de la corde, divisé par le paramètre.

XIII.

Zur Reduction der Monddistanzen. Die Bestimmung der Distanz durch die Tangente der halben Distanz.

Von

Herrn Prof. Dr. *Ligowski*,
an der Königl. Marineschule in Kiel.

Nach den von mir auf Seite 374 des 51. Bandes gebrauchten Bezeichnungen ist:

1) . . . . . $\cos d = \cos \Delta - 2\cos m \cos s \sin^2 \frac{\gamma}{2}$,

2) . . . . . $\cos d_1 = \cos \Delta_1 - 2\cos m_1 \cos s_1 \sin^2 \frac{\gamma}{2}$.

Aus 1):

$$\sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\cos \Delta - \cos d}{2\cos m \cos s} = \frac{\sin \frac{1}{2}(d+\Delta) \sin \frac{1}{2}(d-\Delta)}{\cos m \cos s}.$$

Setzt man in 2):

$$2\cos m_1 \cos s_1 \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \sin \Delta_1 \operatorname{tg} x$$

so ergiebt sich:

$$\cos d_1 = \cos \Delta_1 - \sin \Delta_1 \operatorname{tg} x,$$

mithin auch:

$$\frac{1-\cos d_1}{1+\cos d_1} = \frac{1-\cos \Delta_1 + \sin \Delta_1 \operatorname{tg} x}{1+\cos \Delta_1 - \sin \Delta_1 \operatorname{tg} x}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\frac{d_1}{2}^2 = \frac{2\sin\frac{\Delta_1}{2}^2 + 2\sin\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\Delta_1}{2}\operatorname{tg} x}{2\cos\frac{\Delta_1}{2}^2 - 2\sin\frac{\Delta_1}{2}\cos\frac{\Delta_1}{2}\operatorname{tg} x}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{\Delta_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\Delta_1}{2} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\Delta_1}{2}\operatorname{tg} x},$$

also:

$$\operatorname{tg}\frac{d_1}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\Delta_1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta_1}{2} + x\right)}$$

und

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\sin\frac{1}{2}(d+\Delta)\sin\frac{1}{2}(d-\Delta)}{\cos m \cos s} \cdot \frac{\cos m_1 \cos s_1}{\sin \Delta_1}.$$

Als Zahlenbeispiel lasse ich das auf Seite 378 B. 51 gegebene folgen:

$$\log 2 = 0{,}301030$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(d+\Delta) = 9{,}978784$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(d-\Delta) = 9{,}937323$$
$$\log\sec m = 0{,}016584$$
$$\log\cos m_1 = 9{,}981525$$
$$\log\sec s = 0{,}000788$$
$$\log\cos s_1 = 9{,}999318$$
$$\log\operatorname{cosec}\Delta_1 = 0{,}635559$$
$$\log\operatorname{tg} x = 0{,}850911 \qquad x = 81^\circ\,58'\,35{,}7''$$
$$\frac{\Delta_1}{2} = 6^\circ\,40'\,27{,}5''$$
$$\frac{\Delta_1}{2} + x = 88^\circ\,40'\,3{,}2''$$
$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta_1}{2} + x\right) = 1{,}633395$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{\Delta_1}{2} = 9{,}069348$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{d_1}{2}^2 = 0{,}702743$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{d_1}{2} = 0{,}351372 \qquad \frac{d_1}{2} = 65^\circ\,59'\,52''$$
$$d_1 = 131^\circ\,59'\,42''.$$

Wenn Δ_1 sehr klein ist, so kann x ungenau werden, weshalb es nöthig ist für diesen Fall eine andere Formel anzuwenden. Um eine, der entwickelten Formel ähnliche zu erhalten, setze man in

$$\cos d_1 = \cos \Delta_1 - 2 \cos m_1 \cos s_1 \sin \frac{\gamma^2}{2}$$

statt $\sin \frac{\gamma^2}{2}$ seinen Werth $1 - \cos \frac{\gamma^2}{2}$, wodurch sich:

1) . . . . . $\cos d_1 = 2 \cos m_1 \cos s_1 \cos \frac{\gamma^2}{2} - \cos \Sigma_1$

ergiebt, wenn

$$m_1 + s_1 = \Sigma_1$$

gesetzt wird.

Setzt man nun:

2) . . . . . $\operatorname{tg} x = \dfrac{2 \cos m_1 \cos s_1 \cos \frac{\gamma^2}{2}}{\sin \Sigma_1}$,

so wird:

3) . . . . . $\cos d_1 = \sin \Sigma_1 \operatorname{tg} x - \cos \Sigma_1$.

Hieraus

$$\frac{1 - \cos d_1}{1 + \cos d_1} = \frac{1 + \cos \Sigma_1 - \sin \Sigma_1 \operatorname{tg} x}{1 - \cos \Sigma_1 + \sin \Sigma_1 \operatorname{tg} x}$$

oder

$$\operatorname{tg} \frac{d_1^2}{2} = \frac{\cos \frac{\Sigma_1^2}{2} - \sin \frac{\Sigma_1}{2} \cos \frac{\Sigma_1}{2} \operatorname{tg} x}{\sin \frac{\Sigma_1^2}{2} + \sin \frac{\Sigma_1}{2} \cos \frac{\Sigma_1}{2} \operatorname{tg} x}$$

$$= \operatorname{cotg} \frac{\Sigma_1}{2} \cdot \frac{\cos \frac{\Sigma_1}{2} - \sin \frac{\Sigma_1}{2} \operatorname{tg} x}{\sin \frac{\Sigma_1}{2} + \cos \frac{\Sigma_1}{2} \operatorname{tg} x}$$

$$= \operatorname{cotg} \frac{\Sigma_1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\Sigma_1}{2} \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \frac{\Sigma_1}{2} + \operatorname{tg} x}$$

$$= \operatorname{cotg} \frac{\Sigma_1}{2} \cdot \operatorname{cotg} \left(\frac{\Sigma_1}{2} + x \right)$$

und

4) . . . . . $\operatorname{tg}\frac{d_1}{2} = \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\Sigma_1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)}$.

Aus

$$\cos d = \cos\Delta - 2\cos m\cos s\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

erhält man

$$\cos d = 2\cos m\cos s\cos^2\frac{\gamma}{2} - \cos\Sigma$$

also

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos d + \cos\Sigma}{2\cos m\cos s}$$

oder

5) . . . . . $\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{1}{2}(d+\Sigma)\cos\frac{1}{2}(d-\Sigma)}{\cos m\cos s}$

und somit:

6) . . . $\operatorname{tg} x = \frac{2\cos\frac{1}{2}(d+\Sigma)\cos\frac{1}{2}(d-\Sigma)}{\cos m\cos s}\cdot\frac{\cos m_1\cos s_1}{\sin\Sigma_1}$.

Für das gegebene Zahlenbeispiel hat man:

$\log 2 = 0{,}301030$
$\log\cos\frac{1}{2}(d+\Sigma) = 9{,}393113$
$\log\cos\frac{1}{2}(d-\Sigma) = 9{,}741859$
$\log\sec m = 0{,}016584$
$\log\cos m_1 = 9{,}981525$
$\log\sec s = 0{,}000788$
$\log\cos s_1 = 9{,}999318$
$\log\operatorname{cosec}\Sigma_1 = 0{,}470013$

$\log\operatorname{tg} x = 9{,}904230$ $\quad x = 38^\circ\,43'\,59{,}5''$

$\frac{\Sigma_1}{2} = 9^\circ\,54'\,10{,}5''$

$\frac{\Sigma_1}{2}+x = 48^\circ\,38'\,10''$

$\log\operatorname{cotg}\frac{\Sigma_1}{2} = 0{,}758004$
$\log\operatorname{cotg}\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right) = 9{,}944729$

$\log\operatorname{tg}^2\frac{d_1}{2} = 0{,}702733$

$\log\operatorname{tg}\frac{d_1}{2} = 0{,}351366$ $\quad \frac{d_1}{2} = 65^\circ\,59'\,51''$

$d_1 = 131^\circ\,59'\,42''$.

XIV.

Näherungsweise Auflösung der Aufgabe: Aus zwei Höhen eines Sterns und der Zwischenzeit der Beobachtungen die Breite und die Zeit zu bestimmen.

Von

Herrn Prof. Dr. *Ligowski*,
an der Königl. Marineschule in Kiel.

Bezeichnen h_2 und h_1 die Höhen des Sterns, $h_2 > h_1$, t_2 und t_1 die Stundenwinkel, δ die Deklination, φ die gesuchte Breite und φ_1 die angenäherte Breite, so hat man:

1) . . . . . $\sin h_2 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_2$,

2) . . . . . $\sin h_1 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t_1$.

Setzt man:

$$\tfrac{1}{2}(h_2 + h_1) = u, \qquad \tfrac{1}{2}(h_2 - h_1) = v;$$

ferner:

$$t_1 = x + \alpha, \qquad t_2 = x - \alpha;$$

also:

$$\alpha = \frac{t_1 - t_2}{2} \quad \text{und} \quad x = \frac{t_1 + t_2}{2};$$

so erhält man durch Addition und Subtraktion von No. 1) und 2):

3) . . . . $\sin u \cos v = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos\alpha \cos x$,

4) . . . . $\cos u \sin v = \cos\varphi \cos\delta \sin\alpha \sin x$.

Wird zur Abkürzung

$$\cos u \sin v \sec \delta \operatorname{cosec} \alpha = A,$$

$$\sin u \cos v \sec \delta \sec \alpha = B$$

und

$$\operatorname{tg} \delta \sec \alpha = C$$

gesetzt, so ist nach No. 3) und 4):

5) . . . . . $B - C \sin \varphi = \cos \varphi \cos x$

und

6) . . . . . $A = \cos \varphi \sin x.$

Ist x sehr klein, so ändert ein kleiner Fehler in x die Gleichung No. 5 nur sehr wenig, diese Gleichung kann also mit einem angenäherten x, einen nahe genauen Werth von φ geben. Aus No. 6 erhält man mit der geschätzten Breite φ_1 einen Näherungswerth x_1 von x:

7) . . . . . $\sin x_1 = A \sec \varphi_1.$

Aus No. 5 wird nun angenähert:

8) . . . . . $\cos \varphi \cos x_1 + C \sin \varphi = B.$

Dividirt man diese Gleichung durch $\cos x_1$ und setzt

$$C \sec x_1 = \operatorname{tg} \lambda,$$

so ergiebt sich:

9) . . . . . $\cos \varphi + \sin \varphi \operatorname{tg} \lambda = B \sec x_1.$

Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung mit $\cos \lambda$, erhält man:

$$\cos \varphi \cos \lambda + \sin \varphi \sin \lambda = B \sec x_1 \cos \lambda,$$

also

10) . . . . . $\cos (\varphi - \lambda) = B \sec x_1 \cos \lambda,$

woraus sich φ berechnen lässt. Mit dem gefundenen Werthe von φ erhält man durch

$$\sin x = A \sec \varphi$$

einen genauern Werth von x.

Um die entwickelte Formel mit der von Douwes zu vergleichen, gebe ich das folgende Zahlenbeispiel:

$$h_2 = 61^\circ\, 30', \quad h_1 = 56^\circ\, 4', \quad \delta = 23^\circ\, 27',$$

$$\alpha = 1^h\, 47' = 26^\circ\, 45'.$$

Das Gestirn ist auf verschiedenen Seiten des Meridians beobachtet worden.

Durch Rechnung nach einer strengen Formel, ergab sich bei Anwendung siebenstelliger Logarithmen $\varphi = 45^0\ 49'\ 1''$. Ich wähle für φ_1 45^0.

Es ist $u = 58^0\ 47'$, $v = 2^0\ 43'$.

$\log\cos u = 9{,}71456$	$\log\sin u = 9{,}93207$	
$\log\sin u = 8{,}67575$	$\log\cos v = 9{,}99951$	
$\log\sec\delta = 0{,}03744$	$\log\sec\delta = 0{,}03744$	$\log\operatorname{tg}\delta = 9{,}63726$
$\log\operatorname{cosec}\alpha = 0{,}34669$	$\log\sec\alpha = 0{,}04916$	$\log\sec\alpha = 0{,}04916$
$\log A = 8{,}77444$	$\log B = 0{,}01818$	$\log C = 9{,}68642$
$\log\sec\varphi_1 = 0{,}15051$	$\log\sec x_1 = 0{,}00155$	$\log\sec x_1 = 0{,}00155$
$\log\sin x_1 = 8{,}92495$	$\log\cos\lambda = 9{,}95370$	$\log\operatorname{tg}\lambda = 9{,}68797$
	$\log\cos(\varphi-\lambda) = 9{,}97343$	$\lambda = 25^0\,59',3$
		$\varphi - \lambda = 19^0\,50',2$
		$\varphi = 45^0\,49',5$

Rechnung nach Douwes.

$\log\cos u = 9{,}71456$	$\log\cos\varphi_1 = 9{,}84949$
$\log\sin u = 8{,}67575$	$\log\cos\delta = 9{,}96256$
$\log\sec\delta = 0{,}03744$	$\log\sin vt = 8{,}85929$
$\log\operatorname{cosec}\alpha = 0{,}34669$	$8{,}67134$
$\log A = 8{,}77444$	$\cos\varphi_1\cos\delta\sin vt = 0{,}04692$
$\log\sec\varphi_1 = 0{,}15051$	$\sin h_2 = 0{,}87882$
$\log\sin x_1 = 8{,}92495$	$\cos(\varphi-\delta) = 0{,}92574$
$x = 19^m\ 18^s$	$\varphi - \delta = 22^0\ 13',2$
$\alpha = 1^h\ 47^m$	$\delta = 23^0\ 27'$
$t_2 = 1^h\ 27^m\ 42^s$	$\varphi = 45^0\ 40',2$

Nach der ersten Formel beträgt der Fehler in φ eine halbe Minute, während die Formel von Douwes einen Fehler von über neun Minuten giebt.

XV.

Berechnung von Entfernungen auf der See.

Von

Herrn Prof. Dr. *Ligowski*,
an der Königl. Marineschule in Kiel.

Aufgabe. Den Abstand des Beobachters auf dem Meere von einem nur theilweise sichtbaren Land-Object, dessen Höhe über der Meeresfläche bekannt ist, durch Messung seiner Winkelhöhe über dem Meereshorizont zu bestimmen.

Es sei w die gesuchte Weite in Seemeilen, h die Höhe des Beobachters in Fussen, H die Höhe des Gegenstandes in Fussen und m die Winkelhöhe in Minuten.

In den Lehrbüchern der Navigation findet man zur Berechnung von w Formeln, wie die folgenden:

1) . . . . . $w = K + K_1$,

wenn

$$K = \frac{7}{6}\sqrt{h}$$

und

$$K_1 = -\frac{7}{6}m + \sqrt{\frac{4}{3}H - \frac{7}{3}mK + \left(\frac{7}{6}m\right)^2},$$

oder

2) . . . . . $w = K + K_1$,

wenn

$$K = \sqrt{\frac{4}{3}h}$$

und

$$K_1 = -\frac{8}{7}m + \sqrt{\frac{4}{3}H - \frac{16}{7}mK + \left(\frac{8}{7}m\right)^2}.$$

Eine Formel zur Berechnung von w, welche genauer und für die Rechnung bequemer ist, ergiebt sich in folgender Weise:

Bezeichnet r den Radius der Erde, φ die zur Höhe h gehörige Kimmtiefe und $m - \varphi = u$, so erhält man mit Hülfe der Sinusregel:

$$\frac{\cos(w+u)}{r+h} = \frac{\cos u}{r+H},$$

also auch:

$$\frac{\cos(w+u) - \cos u}{\cos(w+u) + \cos u} = \frac{h-H}{2r+h+H} = -\frac{H-h}{2r+H+h},$$

oder:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{w}{2}+u\right)\operatorname{tg}\frac{w}{2} = \frac{H-h}{2r} \cdot \frac{1}{1+\frac{H+h}{2r}}.$$

Da der Factor

$$\frac{1}{1+\frac{H+h}{2r}}$$

sehr nahe gleich 1 ist und die Winkel $w+u$ sehr klein sind, so ist angenähert:

$$\left(\frac{w}{2}+u\right)\frac{w}{2}\operatorname{tg}^2 1' = \frac{H-h}{2r}$$

und

$$w^2 + 2uw = \frac{2}{r\operatorname{tg}^2 1'}(H-h).$$

Der Factor von $H-h$ ist sehr nahe gleich $\frac{7}{6}$, also ist auch:

$$w^2 + 2uw = \frac{7}{6}(H-h),$$

und hieraus:

$$w = -u + \sqrt{u^2 + \frac{7}{6}(H-h)},$$

oder

$$3) \ldots . \quad w = -(m-\varphi) + \sqrt{(m-\varphi)^2 + \frac{7}{6}(H-h)}.$$

Sind h und H in Meter gegeben so ist:

4) . . . . $w = -(m-\varphi) + \sqrt{(m-\varphi)^2 + 3{,}72(H-h)}$.

In der Navigation von Albrecht und Vierow Seite 177 (3. Auflage), ist nach Formel 1) ein Beispiel berechnet. Daselbst ist: $h = 9$ Fuss, $H = 3715$ Fuss und $m = 42{,}4$ Minuten.

Es ergiebt sich: $w = 38$ Seemeilen.

Nach Formel 2) findet man: $w = 38{,}5$ Seemeilen, während die Formel 3): $w = 37{,}3$ Seemeilen giebt.

XVI.

Formulae quaedam goniometricae propositae

a

Christiano Fr. Lindman,

Lect. Strengn.

Abhinc aliquot annis, quum aequationem tertii gradus solverem, incidi in formulas

$$\text{Sin}\,20^0 + \text{Sin}\,40^0 = \text{Sin}\,80^0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$16\,\text{Sin}\,20^0\,\text{Sin}\,40^0\,\text{Sin}\,60^0\,\text{Sin}\,80^0 = 3 \quad \ldots\ldots (2)$$

quarum mentio facta est in tomo XLV^0 hujus Archivi. In alia aequatione tertii gradus solvenda has formulas nuper inveni:

$$\text{Cos}\,20^0 - \text{Cos}\,40^0 = \text{Cos}\,80^0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$16\,\text{Cos}\,20^0\,\text{Cos}\,40^0\,\text{Cos}\,60^0\,\text{Cos}\,80^0 = 1 \quad \ldots\ldots (4)^*)$$

quae sunt quasi complementum quoddam priorum. Quae formulae, quamquam e cognitis formulis derivari possunt, eo, quod sunt forte inventae, quaestionem afferunt, num qui alii arcus ac multiplices arcus 20^0 iis satisfaciant. Posito igitur in (1) et (3) arcu φ pro 20^0, habebimus aequationes

*) Formulae (3) et (4) jam antea inventae sunt a Cl. Thiel. Vide Tomum XLVI hujus Archivi p. 143.

$$\operatorname{Sin}\varphi + \operatorname{Sin}2\varphi = \operatorname{Sin}4\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\operatorname{Cos}\varphi - \operatorname{Cos}2\varphi = \operatorname{Cos}4\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

e quibus illa dat $\varphi = k\pi$, $\varphi = \frac{2k\pi}{3} \pm 20^0$ et haec $\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{2k\pi}{3} \pm 20^0$. Arcus $\frac{2k\pi}{3} \pm 20^0$ ambabus satisfaciunt; ceteri tantum suae.

Iam in aequationibus (2) et (4) ponamus φ pro 20^0, unde prodeunt aequationes

$$16 \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}2\varphi \operatorname{Sin}3\varphi \operatorname{Sin}4\varphi = 3 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

$$16 \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}2\varphi \operatorname{Cos}3\varphi \operatorname{Cos}4\varphi = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

Formulis notissimis transit illa in

$$4(\operatorname{Cos}5\varphi - \operatorname{Cos}3\varphi)(\operatorname{Cos}5\varphi - \operatorname{Cos}\varphi) = 3,$$

quae, quoniam est

$$\operatorname{Cos}3\varphi = \operatorname{Cos}\varphi(4\operatorname{Cos}^2\varphi - 3),$$

$$\operatorname{Cos}5\varphi = \operatorname{Cos}\varphi(16\operatorname{Cos}^4\varphi - 20\operatorname{Cos}^2\varphi + 5),$$

mutatur in

$$4\operatorname{Cos}^2\varphi(16\operatorname{Cos}^4\varphi - 24\operatorname{Cos}^2\varphi + 8)(16\operatorname{Cos}^4\varphi - 20\operatorname{Cos}^2\varphi + 4) = 3$$

vel, posito $4\operatorname{Cos}^2\varphi = x$, in

$$x^5 - 11x^4 + 42x^3 - 64x^2 + 32x - 3 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Cunctae radices hujus aequationis sunt positivae et aeq. (2) docet, unam ex iis esse $= 4\operatorname{Cos}^2 20^0$. Suspicari possumus, quantitates quoque $4\operatorname{Cos}^2 40^0$, $4\operatorname{Cos}^2 80^0$ esse radices, id quod substitutione earum confirmatur. Sequitur, ut sint $x - 4\operatorname{Cos}^2 20^0$, $x - 4\operatorname{Cos}^2 40^0$, $x - 4\operatorname{Cos}^2 80^0$ factores sinistri membri. Ut vero divisio illa commode fiat, tentandum est, si functiones goniometricae tolli possint. Formula $4\operatorname{Cos}^2 a = 2(1 + \operatorname{Cos}2a)$ utenda ponendoque $x - 2 = y$ functio

$$(x - 4\operatorname{Cos}^2 20^0)(x - 4\operatorname{Cos}^2 40^0)(x - 4\operatorname{Cos}^2 80^0)$$

transit in

$$(y - 2\operatorname{Cos}40^0)(y - 2\operatorname{Cos}80^0)(y + 2\operatorname{Cos}20^0),$$

quod productum, uncis sublatis, beneficio aequationis (4) mutatur in

$$y^3 - 4y(\operatorname{Cos}^2 20^0 - \operatorname{Cos}40^0 \operatorname{Cos}80^0) + 1.$$

Quum vero sit

$$\operatorname{Cos}^2 20^0 = \frac{1+\operatorname{Cos}40^0}{2}, \quad \operatorname{Cos}40^0 \operatorname{Cos}80^0 = \tfrac{1}{2}[\operatorname{Cos}120^0 + \operatorname{Cos}40^0]$$
$$= -\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\operatorname{Cos}40^0,$$

habebimus

$$\operatorname{Cos}^2 20^0 - \operatorname{Cos}40^0 \operatorname{Cos}80^0 = \tfrac{3}{4}.$$

Productum igitur fit $y^3 - 3y + 1$ vel, introducto denuo x,

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 1.$$

Divisione per hanc quantitatem facta, aequatio (9) dabit

$$x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

unde

$$x = \tfrac{1}{4}(5 \pm \sqrt{3}),$$

e quibus valor superior, quippe qui sit >4, rejiciendus est. Praeter valores ante inventos unus tantum

$$x = 4\operatorname{Cos}^2\varphi = \tfrac{1}{4}(5 - \sqrt{3}), \quad \varphi = \begin{matrix} 65^0 & 19' & 23'',37 \\ 114 & 40 & 36,63 \end{matrix}$$

problemati et aequat. (9) satisfacit. Itaque arcus φ in aequat. (7) habet octo valores ($<180^0$):

$$\varphi = 20^0;\ 40^0;\ 80^0;\ 65^0\ 19'\ 23'',\ 37;$$
$$\varphi = 160^0;\ 140^0;\ 100^0;\ 114^0\ 40^0\ 36^0,\ 63^0.$$

Aequatio (8) eodem modo dat

$$x^5 - 9x^4 + 28x^3 - 34x^2 + 12x - 1 = 0, \quad \ldots\ldots (11)$$

quae, quoniam tres radices habet aequales radicibus aequationis (9), per $x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ dividi potest, quo facto dat

$$x^2 - 3x + 1 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

unde

$$x = \tfrac{1}{2}(3 \pm 5), \text{ vel } x_1 = 4\operatorname{Cos}^2 36^0;\ x_2 = 4\operatorname{Cos}^2 72^0.$$

Valores igitur ($<180^0$), qui aequationi (8) satisfaciunt, sunt decem:

$$\varphi = 20^0;\ 40^0;\ 80^0;\ 36^0;\ 72^0$$
$$\varphi = 160^0;\ 140^0;\ 100^0;\ 144^0;\ 108^0;$$

Hinc elucet, alios arcus ac multiplices 20^0 aequationibus (7) et (8) satisfacere, sed nullos alios esse radices aequationibus communes.

Iam ponamus, arcus esse in progressione arithmetica, cujus differentia sit $= \delta$. Arcu minimo $= \psi$ posito, prodeunt aeqq.

$$16 \operatorname{Sin}\psi \operatorname{Sin}(\psi+\delta)\operatorname{Sin}(\psi+2\delta)\operatorname{Sin}(\psi+3\delta) = 3, \quad . . (13)$$

$$16 \operatorname{Cos}\psi \operatorname{Cos}(\psi+\delta)\operatorname{Cos}(\psi+2\delta)\operatorname{Cos}(\psi+3\delta) = 1 \quad . . (14)$$

e quibus valores arcuum his aequationibus communium reperiendi sunt. Formulis cognitis facile invenimus

$$4[\operatorname{Cos}3\delta - \operatorname{Cos}(2\psi+3\delta)].[\operatorname{Cos}\delta - \operatorname{Cos}(2\psi+3\delta)] = 3 \quad . (15)$$

$$4[\operatorname{Cos}3\delta + \operatorname{Cos}(2\psi+3\delta)].[\operatorname{Cos}\delta + \operatorname{Cos}(2\psi+3\delta)] = 1. \quad . (16)$$

Priore a (16) subducta, habebimus

$$\operatorname{Cos}(2\psi+3\delta) = -\frac{1}{8\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}2\delta}, \quad . . . . . (17)$$

cujus substitutione in (16) prodit

$$4\left(\operatorname{Cos}3\delta - \frac{1}{8\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}2\delta}\right)\left(\operatorname{Cos}\delta - \frac{1}{8\operatorname{Cos}\delta\operatorname{Cos}2\delta}\right) = 1.$$

Posito $4\operatorname{Cos}^2\delta = y$ et reductionibus quibusdam factis, invenitur aequatio

$$y^5 - 7y^4 + 14y^3 - 4y^2 - 8y + 1 = 0, \quad . . . . . (18)$$

quae, per $y^3 - 6y^2 + 9y - 1$ divisa, dabit

$$y^2 - y - 1 = 0, \quad y = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}),$$

e quibus inferior, ut negativus, non est idoneus. Superior dat

$$\delta = 50^\circ\ 30'\ 18'',31; \quad \delta = 129^\circ\ 29'\ 41'',69.$$

Valores igitur arcus $\delta\ (< 180^\circ)$ sunt octo:

$$\delta = 20^\circ;\ 40^\circ;\ 80^\circ;\ 50^\circ\ 30'\ 18'',31$$

$$\delta = 160^\circ;\ 140^\circ;\ 100^\circ;\ 129\ 29^\circ\ 41',\ 69''$$

Valores arcus ψ his respondentes ex (17) reperiuntur. Tum colligitur, valores arcus δ postremo inventos adhiberi non posse, utpote qui efficiant $\operatorname{Cos}(2\psi+3\delta)$ num. > 1. Posito autem $\delta = 20^\circ$; 40°; 80° invenitur $\psi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \pm 40^\circ - 30^\circ$; $(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm 10^\circ - 60^\circ$; $n\pi \pm 20^\circ - 120^\circ$ resp. Numeris integris pro n substitutis, oritur series arcuum, aequationibus (13) et (14) satisfacientium et qui cuncti sint multiplices 20°. Plures igitur arcus, quam qui in (2) et (4) insunt, aequationibus (13) et (14) satisfaciunt, sed ea res inde tantum evenit, quod in omnibus quadrantibus sunt arcus,

quorum Sinus et Cosinus numerice sunt aequales, neque ulli inventi sunt arcus, quam qui ob eam caussam exspectari possent.

Si quis reperire velit arcus, qui soli aequationi (13) aut (14) satisfaciant, facile patet, problema esse indeterminatum. Inde quod antea valores arcus δ inventi sunt, qui nullos arcus ψ darent, colligitur, arcum δ non prorsus esse arbitrarium. Limites hujus arcus reperire conabimur et simul, si quos valores notandos habent. Si prius aequationem (16) solverimus, facile inveniemus

$$\mathrm{Cos}(2\psi+3\delta) = \tfrac{1}{2}[-(\mathrm{Cos}\,\delta+\mathrm{Cos}\,3\delta) \pm \sqrt{1+(\mathrm{Cos}\,\delta-\mathrm{Cos}\,3\delta)^2}]. \quad (19)$$

Valorem superiorem ejusmodi oportet esse, ut sit

$$1 \geqq \tfrac{1}{2}\left[-(\mathrm{Cos}\,\delta+\mathrm{Cos}\,3\delta)+\sqrt{1+(\mathrm{Cos}\,\delta-\mathrm{Cos}\,3\delta)^2}\right] \geqq -1.$$

Quoniam quivis arcus δ posteriori conditioni satisfacit, satis est, si est

$$1 \geqq \tfrac{1}{2}\left[-(\mathrm{Cos}\,\delta+\mathrm{Cos}\,3\delta)+\sqrt{1+(\mathrm{Cos}\,\delta-\mathrm{Cos}\,3\delta)^2}\right],$$

id quod, posito $\mathrm{Cos}\,\delta = \frac{x}{2}$, postulat, ut sit

$$x^4+2x^3-3x^2-4x+3 \geqq 0 \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

vel, extracta radice quadrata,

$$(x^2+x-2)^2-1 \geqq 0 \text{ vel}$$

$$\left(x-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{13}+1}{2}\right) \geqq 0,$$

unde facillime habebimus

$$\left(\mathrm{Cos}\,\delta-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(\mathrm{Cos}\,\delta+\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$$
$$\times\left(\mathrm{Cos}\,\delta-\frac{\sqrt{13}-1}{4}\right)\left(\mathrm{Cos}\,\delta+\frac{\sqrt{13}+1}{4}\right) \geqq 0.$$

Quoniam factor ultimus semper est positivus, necesse est, unum ex ceteris esse positivum vel omnes tres positivos. Itaque oportet, sit

$$144^0 \geqq \delta \geqq 72^0 \text{ vel } 49^0\,21', 2 \geqq \delta \geqq 0.$$

Si $\cos(2\psi + 3\delta)$ inferiorem habet valorem, eodem modo inveniuntur limites arcus δ esse

$$108^0 \geqq \delta \geqq 36^0 \text{ vel } 180^0 \geqq \delta \geqq 130^0\ 38',\ 2.$$

Inter limites inventos (inclus.) arcus δ quemvis valorem habere potest. Si arcui $2\psi + 3\delta$ tales damus valores, ut arcus negativi non exsistant, et signo superiore utimur, invenimus hos valores: $\delta = 36^0$, $\psi = 96^0$; $\delta = 45^0$, $\psi = 97^0,5$; $\delta = 90^0$, $\psi = 15^0$; $\delta = 108^0$, $\psi = 48^0$ cett. Inferiore signo sumto, habebimus:

$$\delta = 36^0,\ \psi = 81^0;\ \delta = 45^0,\ \psi = 7^0,5;\ \delta = 72^0,\ \psi = 12^0,\ \text{cett.}$$

Aequatio (15) eodem modo tractata limites arcus δ dabit. Ita tamen duo tantum systemata arcuum inveni, qui integros habent gradus. Posito enim $\delta = 90^0$, evadit $\psi_1 = 30^0$, $\psi_2 = 120^0$, si arcus $2\psi + 3\delta$ ita sumitur, ut arcus negativus evitetur.

XVII.

Integration der Gleichung

$$y'' = x(xy' - ny) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

für den Fall, wo n eine ganze positive Zahl ist.

Von

Herrn Professor ***Simon Spitzer***
am k. k. Polytechnikum in Wien.

Um die Gleichung (1) zu integriren, führe ich in selbe eine neue unabhängige Variable ξ ein, mittelst der Substitution

$$x^3 = \xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und erhalte sodann nachstehende Gleichung

$$\xi \frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{2-\xi}{3} \frac{dy}{d\xi} + \frac{n}{9} y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

welche sich nach der Petzval'schen Methode integriren lässt, und das Integrale

$$y = \left\{ \frac{d^{\frac{n}{3}}}{d^{\frac{n}{3}}} \left[(u - \frac{1}{3})^{\frac{n-1}{3}} e^{u\xi} \right] \right\}_{u=0} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

liefert, woselbst also vorerst das Product

$$(u - \frac{1}{3})^{\frac{n-1}{3}} e^{u\xi}$$

$\frac{n}{3}$ mal nach u zu differenziren, und nach durchgeführter Differentiation statt u Null zu substituiren ist.

Das Integral (4) lässt sich, wenn man statt ξ seinen Werth einführt, folgendermassen schreiben:

$$y = \left\{ \frac{d^{\frac{n}{3}}}{du^{\frac{n}{3}}} \left[(u - \frac{1}{3})^{\frac{n-1}{3}} e^{ux^3} \right] \right\}_{u=0} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

und dieses Integrale ist tadellos in dem Falle, wo $\frac{n}{3}$ eine ganze positive Zahl ist. (siehe meine Arbeit in Schlömilch's Journal VII Band Seite 265.)

Die Gleichung (1) lässt sich noch auf andere Weise integriren. Setzt man nämlich in selbe

$$y = xz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

wo z eine neue Variable bezeichnet, so erhält man

$$xz'' + 2z' = x^2[xz' - (n-1)z] \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Setzt man nun wieder

$$x^3 = \xi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

so erhält man:

$$\xi \frac{d^2z}{d\xi^2} + \frac{4-\xi}{3} \frac{dz}{d\xi} + \frac{n-1}{9} z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

und diese Gleichung gibt nach Herrn Petzval's Methode integrirt

$$z = \left\{ \frac{d^{\frac{n-1}{3}}}{d^{\frac{n-1}{3}}} \left[(u - \frac{1}{3})^{\frac{n}{3}} e^{u\xi} \right] \right\}_{u=0} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

folglich ist auch

$$y = x \left\{ \frac{d^{\frac{n-1}{3}}}{du^{\frac{n-1}{3}}} \left[\left(u - \frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{3}} e^{ux^3} \right] \right\}_{u=0} \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

ein Integral der Gleichung (1). Dieses Integrale ist aber nur dann tadellos, wenn $\frac{n-1}{3}$ eine ganze positive Zahl ist.

Entwickelt man die beiden in (5) und in (10) stehenden Ausdrücke, so erhält man für beide ein und dieselbe Reihe, und diese lautet:

$$(11) \quad \ldots y = x^n - \binom{\frac{n}{3}}{1}(n-1)\,x^{n-3}$$
$$+ \binom{\frac{n}{3}}{2}(n-1)(n-4)\,x^{n-6} - \binom{\frac{n}{3}}{3}(n-1)(n-4)(n-7)\,x^{n-9} + \ldots$$

Sie bricht, wie man sieht, ab

erstens, so oft n eine durch 3 theilbare Zahl ist,
zweitens, „ „ $n-1$ „ „ 3 „ „ „

Demnach ist

$$y = x$$

ein Integrale der Gleichung

$$y'' = x(xy' - y);$$

ferner ist

$$y = x^3 - 2$$

ein Integrale der Gleichung

$$y'' = x(xy' - 3y);$$

ferner

$$y = x^4 - 4x$$

ein Integrale der Gleichung

$$y'' = x(xy' - 4y)$$

etc etc.

Das vollständige Integrale der Gleichung

$$y'' = x(xy' - y)$$

ist sonach

$$y = x\int \frac{e^{\frac{x^3}{3}}dx}{x^2}.$$

Das vollständige Integrale der Gleichung

$$y'' = x(xy' - 3y)$$

hat die Form

$$y = (x^3-2)\int \frac{e^{\frac{x^3}{3}}dx}{(x^3-2)^2},$$

und das vollständige Integrale der Gleichung

$$y'' = x(xy' - 4y)$$

hat die Gestalt

$$y = (x^4-4x)\int \frac{e^{\frac{x^3}{3}}dx}{(x^4-4x)^2},$$

etc. etc.

Nach den bis jetzt gegebenen Methoden lässt sich die Gleichung (1) leicht integriren erstens für durch 3 theilbare Werthe von n, also für

$$n = 3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15, \ldots;$$

zweitens für durch 3 theilbare Werthe von $n-1$, also für

$$n = 1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13, \ldots;$$

sie lässt sich aber nicht leicht integriren für andere Werthe von n, demnach ist noch zu zeigen die Integration der Gleichung (1) in dem Falle, wo

$$n = 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14, \ldots$$

ist, und diess soll im Nachfolgenden geschehen.

Betrachten wir vorerst den einfachsten Fall, wo $n = 2$ ist, und also die vorgelegte Gleichung die Gestalt

$$y'' = x(xy' - 2y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

hat. Das Integrale dieser Gleichung steht mit dem Integrale der Gleichung

$$z''' = xz' - 2z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

im innigsten Zusammenhange, es ist nämlich

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} \psi(vx)\, dv \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

wo $\psi(x)$ diejenige Function von x bezeichnet, welche der Gleichung (13) d. i.

$$\psi'''(x) = x\psi'(x) - 2\psi(x)$$

genügt, falls nur zwischen den 3 Constanten, die in $\psi(x)$ auftreten, eine gewisse Relation statuirt wird. (Siehe die erste Fortsetzung meiner Studien über Integration linearer Differentialgleichungen, Seite 74.)

Das Integrale der eben aufgestellten Gleichung ist:

$$\psi(x) = C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_1 ux} - 1 - \mu_1 ux - \frac{1}{2}\mu_1^2 u^2 x^2}{u^3} - \mu_1 ux - \tfrac{1}{2} \right] du$$
$$+ C_2 \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_2 ux} - 1 - \mu_2 ux - \frac{1}{2}\mu_2^2 u^2 x^2}{u^3} - \mu_2 ux - \tfrac{1}{2} \right] du$$
$$+ C_3 \int_0^\infty e^{-\frac{u^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_3 ux} - 1 - \mu_3 ux - \frac{1}{2}\mu_3^2 u^2 x^2}{u^3} - \mu_3 ux - \tfrac{1}{2} \right] du$$
$$+ C_4 x^2$$

woselbst μ_1 μ_2 μ_3 die 3 Wurzeln der Gleichung

$$\mu^3 = 1$$

bezeichnen, C_1 C_2 C_3 C_4 willkürliche Constante sind, wo zwischen den ersten 3 Constanten die Bedingungsgleichung

$$C_1\mu_1^2 + C_2\mu_2^2 + C_3\mu_3^2 = 0$$

obwaltet. (Siehe meine Arbeit über Integration der linearen Differentialgleichung $y''' = xy' - ny$ im 7. Band von Schlömilch's Journal, Seite 113.).

Es ist demnach das Integrale der Gleichung

$$y'' = x(xy' - 2y)$$

von nahstehender Gestalt:

$$y = C_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_1 uvx} - 1 - \mu_1 uvx - \frac{1}{2}\mu_1^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_1 uvx - \tfrac{1}{2} \right] du\, dv$$
$$+ C_2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_2 uvx} - 1 - \mu_2 uvx - \frac{1}{2}\mu_2^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_2 uvx - \tfrac{1}{2} \right] du\, dv$$
$$+ C_3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_3 uvx} - 1 - \mu_3 uvx - \frac{1}{2}\mu_3^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_3 uvx - \tfrac{1}{2} \right] du\, dv$$
$$+ C_4 x^2$$

Es lässt sich nun leicht nachweisen, erstens dass $\mathfrak{C}_4 = 0$ sein müsse, weil nur unter dieser Voraussetzung der Werth $y = \mathfrak{C}_4 x^2$ der Gleichung (12) genügt und zweitens dass die drei Doppelintegrale unter den früher aufgestellten Bedingungen, nämlich dass $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$ die Wurzeln der Gleichung

$$\mu^3 = 1$$

sind, und dass

$$C_1\mu_1^2 + C_2\mu_2^2 + C_3\mu_3^2 = 0$$

ist, ebenfalls der Gleichung (12) genügen.

Um diess nachzuweisen, setzen wir

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu uvx} - 1 - \mu uvx - \frac{1}{2}\mu^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu uvx - \tfrac{1}{2} \right] du\,dv \quad (15)$$

in die vorgelegte Gleichung (12).

Es ist zunächst

$$y' = \mu \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v \left[\frac{e^{\mu uvx} - 1 - \mu uvx}{u^2} - u \right] du\,dv,$$

$$y'' = \mu^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v^2 . \frac{e^{\mu uvx} - 1}{u}\, du\,dv.$$

Nun lässt sich y'' umformen. Es ist nämlich

$$\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v^2 . \frac{e^{\mu uvx} - 1}{u}\, dv = -\int e^{-\frac{u^3}{3}} \frac{e^{\mu uvx} - 1}{u} . de^{-\frac{v^3}{3}},$$

und benutzt man die Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man:

$$\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} v^2 . \frac{e^{\mu uvx} - 1}{u} dv = -e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} . \frac{e^{\mu uvx} - 1}{u} + \mu x \int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} e^{\mu uvx} dv;$$

folglich ist

$$y'' = x \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} e^{\mu uvx}\, du\,dv.$$

Setzt man nun die Werthe von y, y' und y'' in die Gleichung

$$y'' - x(xy' - 2y) = 0,$$

so erhält man, gleich durch x dividirend:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left\{ e^{\mu uvx} - \mu vx \left(\frac{e^{\mu uvx} - 1 - \mu uvx}{u^2} - u \right) \right.$$
$$\left. + 2 \left(\frac{e^{\mu uvx} - 1 - \mu uvx - \frac{1}{2}\mu^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu uvx - \tfrac{1}{2} \right) \right\} du\,dv = 0$$

und diese Gleichung soll nun erfüllt sein.

Es ist nun

$$\int e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left\{ e^{\mu uvx} - \mu vx \left(\frac{e^{\mu uvx} - 1 - \mu uvx}{u^3} - u \right) + 2 \left(\frac{e^{\mu uvx} - 1 - \mu uvx - \frac{1}{2}\mu^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu uvx - \frac{1}{3} \right) \right\} du = -e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \cdot \frac{e^{\mu uvx} - 1 - \mu uvx}{u^2}.$$

Nimmt man das letzte Integrale innerhalb der Grenzen 0 und ∞, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}\mu^2 v^2 x^2 \; e^{-\frac{v^3}{3}},$$

folglich führt die Substitution

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu uvx} - 1 - \mu uvx - \frac{1}{2}\mu^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu uvx - \frac{1}{3} \right] du\,dv,$$

in die Gleichung (12) gemacht, auf das Resultat

$$\tfrac{1}{2}\mu^2 x^3 \int_0^\infty e^{-\frac{v^3}{3}} v^2 dv,$$

und diess gibt reducirt

$$\tfrac{1}{2}\mu^2 x^3.$$

Demnach führt die Substitution

(16)

$$\begin{aligned} y = {} & C_1 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_1 uvx} - 1 - \mu_1 uvx - \frac{1}{2}\mu_1^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_1 uvx - \frac{1}{3} \right] du\,dv \\ & + C_2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_2 uvx} - 1 - \mu_2 uvx - \frac{1}{2}\mu_2^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_2 uvx - \frac{1}{3} \right] du\,dv \\ & + C_3 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^3+v^3}{3}} \left[\frac{e^{\mu_3 uvx} - 1 - \mu_3 uvx - \frac{1}{2}\mu_3^2 u^2 v^2 x^2}{u^3} - \mu_3 uvx - \frac{1}{3} \right] du\,dv, \end{aligned}$$

in die Gleichung (12) gemacht, auf das Resultat

$$\tfrac{1}{2}x^3 (C_1 \mu_1^2 + C_2 \mu_2^2 + C_3 \mu_3^2),$$

und dieses Resultat wird Null, wenn

(17) . . . . . $C_1 \mu_1^2 + C_2 \mu_2^2 + C_3 \mu_3^2 = 0$

wird. Es ist demnach das in (16) stehende y das vollständige Integrale der Gleichung (12).

Auf ganz dieselbe Weise lassen sich alle jene Gleichungen behandeln, wo n den Werth

5, 8, 11, 14,...

hat.

XVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Doctor C. F. Lindman in Strengnäs (Schweden).

I. Datis intra circulum datum duobus punctis A et B, ejusmodi punctum P in peripheria invenire, ut, rectis PAH, PBK ductis, quae peripheriam in H et K resp. secant, chorda HK maximum fiat. Quamquam solutio mere geometrica hujus problematis jam antea propositi commodissima videtur, solutio analytica desideratur.

II. Si circulus est datus et in puncto extremo A diametri cujusdam AB collocatur centrum alterius circuli, cujus peripheria datam secat in C et AB in D, inveniatur, 1) locus centri circuli, qui circum ΔACD scriptum est, et, 2) quodnam ex triangulis aequicruris ACD maximum sit.

III. Invenire locum centri circuli constantis, qui tangitur a rectis, quae per duo puncta data transeunt et inter se sunt 1) parallelae, 2) perpendiculares.

IV. Sit $A_1A_2A_3A_4$ trapezium datum sintque G_1, G_2, G_3, G_4 centra gravitatis triangulorum $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ resp.: figura $G_1G_2G_3G_4$ demonstretur esse trapezium dato simile (latus G_1G_2 est parallelum lateri A_1A_2, cett.) et duplum nonae partis ejus.

Si diagonalis A_1A_3 diagonalem A_2A_4 in O secat et γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 sunt centra gravitatis triangulorum A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, A_4OA_1 resp.: demonstretur figura $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ esse parallelogrammum $=$ nonae parti trapezii dati ($\gamma_1\gamma_2 \parallel A_1A_3 \parallel \gamma_3\gamma_4$; $\gamma_2\gamma_3 \parallel A_2A_4 \parallel \gamma_1\gamma_4$).

Geometrisches Sinnen-Confect von Paul Halcken.

(Fortsetzung von Thl. LI. Nr. XXXIII. S. 384.)

18. Von einem andern Triangul, halten die Seiten *AB* 51. *BC* 52 und *AC* 53. darin sind die drey Perpendiculares *EF*, *EG*, *EH* gezogen, deren Summa thut so viel als die Perpendicular *AD* 45. Und weil jede ein rational-Zahl in gantzen seyn soll, so ist Frage: Wieviel Facit hierauff können gefunden werden? Facit 22.

19. Im Dreieck *ABC* sey gegeben *AD* 5. *CD* 9 und *BD* 7. Man solle die Linie *BD* solcher Gestalt stellen, damit *AB* und *BC* in rational-Zahlen kommen. Facit *AB* $9\frac{1}{5}$. *BC* $10\frac{3}{5}$. und viele andere mehr *).

20. Man hat einen Triangul *ABC* daran thut *AC* 4. *AD* 5. und *BD* 7. Wird begehret *AB* und *BC* in rational-Zahlen zu finden. Facit *AB* $4\frac{2}{5}$. und *BC* 6. Oder auch andere **).

21. Zween gleichschenckelte Triangula, Isosceles genant, zu finden, deren die Schenckeln von beyden Trianguls gleicher Grösse sind, aber die Bases ungleich, dass doch gleichwol der Inhalt beyder Triangul einander gleich, und eine rational-Zahl sey. Facit 5. 5. 6. und 5. 5. 8. oder 13. 13. 10. und 13. 13. 24. &c.

22. Einen Triangulum scalenum *ABC* in rational-Zahlen zu finden, davon der Winkel *A* 2 mahl so gross sey als *B*, und dass der Inhalt des Trianguls auch rational sey. Facit *AB* 11. *AC* 25. *BC* 30. Oder *AB* 39. *AC* 25. *BC* 40. und andere mehr.

23. Von einem dergleichen Triangul, thut die Summa der drey Seiten 36. das Product aber der drey Seiten, wann man sie miteinander multipliciret, thut $1543\frac{1}{2}$. und der Winckel *A* ist 2 mahl so gross, als der Winckel *B*. Ist die Frage nachden dreyen Seiten? Facit *AB* 8. *AC* $12\frac{1}{4}$. und *BC* $15\frac{3}{4}$.

24. Einen solchen Triangul in rational-Zahlen zu finden, dass der Winckel *A* 3 mahl so gross sey, als der Winckel *B*, und der Inhalt des Trianguls auch rational sey. Facit *AB* 112. *AC* 125. und *BC* 195. und viel andere mehr.

---

*) *D* liegt in der Seite *BC*.

**) *D* liegt in der Verlängerung der Seite *AC* über *A* hinaus.

XIX.

Miscellen.

Ueber die Winkel, welche die von einem Punkte nach den Mitten der Seiten eines Polygons gezogenen Geraden mit den Polygonsseiten bilden *).

Von

Herrn Dr. *R. Most*,

Lehrer an der Realschule I. Ordnung zu Stettin.

Zieht man von einem beliebigen Punkte P nach den Mitten $B_1, B_2 \ldots B_n$ der Seiten eines im Raume beliebig beschriebenen Polygons $A_1A_2 \ldots A_n$ Gerade und bezeichnet die Winkel PB_1A_1, $PB_2A_2 \ldots PB_nA_n$ mit $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, die Dreiecke PA_1A_2, $PA_2A_3 \ldots PA_nA_1$ mit $\Delta_1 \ldots \Delta_n$, so ist:

$$\Delta_1 \operatorname{ctg}\alpha_1 + \Delta_2 \operatorname{ctg}\alpha_2 + \ldots + \Delta_n \operatorname{ctg}\alpha_n = 0.$$

Beweis. Man übersieht, dass nach dem Cosinussatz:

$$PA_1^2 - PA_2^2 = -2PB_1 \cdot A_1A_2 \cdot \cos\alpha_1 = -4\Delta_1 \operatorname{ctg}\alpha_1$$

ist, also:

$$\begin{aligned} PA_2^2 - PA_3^2 &= -4\Delta_2 \operatorname{ctg}\alpha_2, \\ &\vdots \\ PA_n^2 - PA_1^2 &= -4\Delta_n \operatorname{ctg}\alpha_n. \end{aligned}$$

Die Summirung der Gleichungen ergiebt obige Formel.

*) Vergl. Thl. XLVIII. No. XXXIII. pag. 473 und Thl. XLIX. No. XI. pag. 115.

Liegt bei dem Dreieck der Punkt P in der Ebene der Figur, so giebt es 4 Lagen, für die $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3$, also

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\alpha_3 = 0$$

ist, nämlich (Taf. IV. Fig. 4.) für den Schwerpunkt S und seine 3 harmonischen Punkte S_1, S_2, S_3 auf den 3 Transversalen durch die Spitzen; dieselben werden leicht als Ecken des Dreiecks $S_1S_2S_3$ erhalten, wenn man durch die Ecken des gegebenen Dreiecks $A_1A_2A_3$ Parallellinien mit den gegenüberliegenden Seiten zieht.

Einfache geometrische Ableitung der Relation zwischen den Radien der einem Dreieck ein- und umschriebenen Kreise und dem Abstande ihrer Centra.

Von

Herrn Director und Professor Dr. *F. Strehlke*
in Langfuhr bei Danzig.

Das Dreieck sei ABC (Taf. IV. Fig. 5.), das Centrum des die 3 Seiten desselben als Sehnen enthaltenden Kreises D, sein Radius R, das Centrum des die 3 Seiten unmittelbar berührenden Kreises E, sein Radius $EH = r$, das Centrum des die Seite CB und die Verlängerungen der beiden anderen Seiten berührenden Kreises sei E', sein Radius $E'H' = r'$; der Abstand der Centra $DE = \Delta$, der Abstand $DE' = \Delta'$; dann ist:

$$\Delta^2 = R^2 - 2Rr,$$

$$\Delta'^2 = R^2 + 2Rr'.$$

Beweis.

DE zu beiden Seiten verlängert ergiebt die Durchschnitte F und F' mit dem umschriebenen Kreise, CE verlängert den Punkt G, der Durchmesser GDG' halbirt rechtwinklig AB in M. $GE = GB$ als Seiten des Dreiecks GEB, die den gleichen

Winkeln $BEG = EBG = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ gegenüberstehen *). Nun ist $EF'.EF = (R+\Delta)(R-\Delta) = R^2-\Delta^2$ **) $= CE.GE = CE.GB$. Wegen Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke CEH und $G'BG$ ist

$$CE:r = 2R:GB,$$

folglich:

$$CE.GB = 2R.r = R^2-\Delta^2.$$

Sind J und J' die Durchschnitte des umbeschriebenen Kreises mit der Sekante DE', so findet man aus den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken $CE'H'$ und $G'BG$

$$CE':r' = 2R:G'B,$$

folglich:

$$CE'.G'B = 2Rr' = CE'.E'G'$$

(denn $E'G' = BG'$ als die im Dreieck $G'E'B$ den gleichen Winkeln $G'E'B = G'BE' = \frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$ gegenüberliegenden Seiten). Da nun $CE'.E'G' = E'J.E'J' = (\Delta'-R)(\Delta'+R) = (\Delta'^2-R^2)$, so ist $\Delta'^2-R^2 = 2Rr'$.

Die mir bekannten Beweise des Satzes $\Delta^2 = R^2-2Rr$ — des zweiten $\Delta'^2 = R^2+2Rr'$ finde ich nicht erwähnt — sind wenig einfach.

---

*) Wenn man mit Legendre Geometrie B. I. 7. die Congruenz zweier Dreiecke durch Gleichheit Einer Seite und der beiden daran liegenden Winkel bestimmt voraussetzt, so kann man durch die Euklidische Construction B. I. Satz 5 den direkten Beweis führen, dass in einem Dreieck zwei gleichen Winkeln zwei gleiche Seiten gegenüberstehen.

**) Lässt sich rein geometrisch erweisen.

Druckfehler.

Auf S. 62, Z. 10 und Z. 17 setze man „a“ statt „a“ mit Beziehung auf Taf. III. Fig. 1.

XX.

Beweis zweier Steinerschen Lehrsätze.

Von

Herrn Dr. *Bermann*
zu Liegnitz.

(Figuren s. Taf. IV. bei Heft I.)

Im 31. Bande des (damals noch von Crelle herausgegebenen) Journals für reine und angewandte Mathematik finden sich unter den von Steiner als zu beweisende aufgestellten Sätzen auf S. 90 auch die beiden folgenden, die ich — mit unbedeutenden Aenderungen in der Bezeichnung — wörtlich citire:

I. „Wird eine gegebene Fläche F zweiter Ordnung auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem xyz bezogen, dessen Anfangspunkt P beliebig liegt, so entstehen in jeder Axe der x, y, z zwei Abschnitte, von P bis zu den Schnittpunkten mit F genommen, die beziehlich durch x' und x'', y' und y'', z' und z'' bezeichnet werden sollen, und ferner drei Abschnitte oder Sehnen zwischen den Schnittpunkten, die α, β, γ heissen mögen. Wird das rechtwinklige Coordinatensystem um den nämlichen festen Anfangspunkt P auf beliebige Art herumbewegt, so bleibt der Ausdruck

$$\frac{\alpha^2}{x'^2x''^2} + \frac{\beta^2}{y'^2y''^2} + \frac{\gamma^2}{z'^2z''^2}$$

constant".

II. „Schneiden sich die drei Diagonalen eines

Polyeders von octaëdrischer Form in einem Punkte P und unter rechten Winkeln, so liegen die Fusspunkte der aus jenem Punkte P auf die Seitenflächen gefällten Perpendikel allemal alle acht in irgend einer Kugelfläche".

Da mir ein Beweis dieser beiden interessanten Sätze nicht bekannt geworden ist, von denen namentlich der erstere, wenn man ihn auf die Kugel und den Rotationskegel beschränkt, sich auch für den Schul-Unterricht verwerthen lässt, so möge es mir im Nachfolgenden gestattet sein, einen solchen aufzustellen.

Zu I. Gehen wir von der Lage des um seinen festen Anfangspunkt drehbaren Coordinatensystems aus, wo die Axen desselben den Hauptaxen der Fläche F parallel sind, so ist die Gleichung der letzteren:

$$F \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Um zunächst die von Steiner angegebene Function in den Constanten dieser Gleichung auszudrücken, haben wir für $y = 0$, $z = 0$:

$$Ax^2 + 2Cx + D = 0,$$

also:

$$x' + x'' = -\frac{2C}{A}, \qquad x'x'' = \frac{D}{A}.$$

Mithin:

$$x' - x'' = \frac{2}{A}\sqrt{C^2 - AD} = \alpha.$$

Analog:

$$y'y'' = \frac{D}{A'}, \qquad \beta = \frac{2}{A'}\sqrt{C^2 - A'^2 D};$$

$$z'z'' = \frac{D}{A''}, \qquad \gamma = \frac{2}{A''}\sqrt{C''^2 - A''^2 D}$$

Die von Steiner angegebene Function lässt sich also schreiben:

$$\frac{1}{D^2}[C^2 + C'^2 + C''^2 - D(A + A' + A'')].$$

Nun ist aber bei der für blosse Drehung der Coordinatenaxen — ohne Aenderung des Anfangspunkts — erforderlichen linearen Substitution, nämlich:

$$x'\cos(x', x)+y'\cos(y', x)+z'\cos(z', x) \text{ für } x,$$
$$x'\cos(x', y)+y'\cos(y', y)+z'\cos(z', y) \text{ für } y,$$
$$x'\cos(x', z)+y'\cos(y', z)+z'\cos(z', z) \text{ für } z$$

mit den Bedingungsgleichungen

$$\cos^2(x', x)+\cos^2(x', y)+\cos^2(x', z)=1,$$
$$\cos^2(y', x)+\cos^2(y', y)+\cos^2(y', z)=1,$$
$$\cos^2(z', x)+\cos^2(z', y)+\cos^2(z', z)=1;$$

$$\cos(x', x)\cos(y', x)+\cos(x', y)\cos(y', y)+\cos(x', z)\cos(y' z)=0,$$
$$\cos(x', x)\cos(z', x)+\cos(x', y)\cos(z', y)+\cos(x', z)\cos(z' z)=0,$$
$$\cos(y', x)\cos(z', x)+\cos(y', y)\cos(z', y)+\cos(y', z)\cos(z' z)=0;$$

die Discriminante von $\Phi = F+RU$, wo $U=x^2+y^2+z^2$, wie sie sich durch die Elimination der drei Variabeln aus den Gleichungen:

$$\Phi=0,\quad \partial_x\Phi=(A+R)x+C=0,$$
$$\partial_y\Phi=(A'+R)y+C'=0,$$
$$\partial_z\Phi=(A''+R)z+C''=0$$

nach einer leichten Reduction ergiebt:

$$DR^3-[C^2+C'^2+C''^2-D(A+A'+A'')]R^2+\ldots\ldots,$$

und da bei der angegebenen Coordinatenaxen-Drehung D unverändert bleibt, so ist die Invariabilität der in Rede stehenden Function erwiesen.

Suchen wir nunmehr den Werth der Invariante als Function der Hauptaxen und der auf diese bezogenen Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes P:

In dem auf seine Hauptaxen bezogenen Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

seien die drei Sehnen α, β, γ oder A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 diesen bezüglich parallel. Dann sind die Coordinaten des Punktes:

$$A_1: \frac{\alpha}{2},\ y_0,\ z_0; \qquad A_2: x_0,\ \frac{\beta}{2},\ z_0, \qquad A_3: x_0,\ y_0,\ \frac{\gamma}{2},$$

und mithin haben wir die Relationen:

$$1) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \frac{\alpha^2}{4a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \\ \frac{\beta^2}{4b^2} + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1, \\ \frac{\gamma^2}{4c^2} + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 0. \end{cases}$$

Hieraus:

$$\frac{\frac{\alpha^2}{4} - x_0^2}{a^2} = \frac{\frac{\beta^2}{4} - y_0^2}{b^2} = \frac{\frac{\gamma^2}{4} - z_0^2}{c^2},$$

oder da

$$\frac{\alpha^2}{4} - x_0^2 = \left(\frac{\alpha}{2} + x_0\right)\left(\frac{\alpha}{2} - x_0\right) = AP.BP = x'x'',$$

$$\frac{\beta^2}{4} - y_0^2 = \left(\frac{\beta}{2} + y_0\right)\left(\frac{\beta}{2} - y_0\right) = A'P.B'P = y'y'',$$

$$\frac{\gamma^2}{4} - z_0^2 = \left(\frac{\gamma}{2} + z_0\right)\left(\frac{\gamma}{2} - z_0\right) = A''P.B''P = z'z'',$$

$$\frac{x'x''}{a^2} = \frac{y'y''}{b^2} = \frac{z'z''}{c^2};$$

und da aus denselben Gleichungen:

$$\alpha^2 = 4a^2\left(1 - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right),$$

$$\beta^2 = 4b^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right),$$

$$\gamma^2 = 4c^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}\right);$$

so ergibt sich der gesuchte Ausdruck für unsere Invariante nach leichter Reduction in folgender Gestalt:

$$\frac{4a^4\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x_0^2}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{y_0^2}{b^2} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\frac{z_0^2}{c^2}\right]}{\left[a^2\left(1 - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2}\right) - x_0^2\right]^2}.$$

Ist P der Mittelpunkt des Ellipsoids, so geht sie über in

$$4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Für die Kugel insbesondere, wo $a = b = c = r$ zu setzen, reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$\frac{4(3r^2 - 2d^2)}{(r^2 - d^2)^2},$$

wo d den Abstand des Punkts P vom Mittelpunkt der Kugel bedeutet. Da

$$r^2 - d^2 = (r + d)(r - d) = MP.NP$$

ist, (wenn MN den durch den Punkt P gehenden Durchmesser bedeutet), $= x'x'' = y'y'' = z'z''$ oder der Potenz der Kugel für den Punkt P, so folgt hieraus, dass die Quadratsumme dreier sich rechtwinklig schneidender Kugelsehnen $= 4(3r^2 - 2d^2)$ ist, was sich übrigens auch sehr leicht auf rein geometrischem Wege nachweisen lässt. Liegt P ausserhalb der Kugel und sind die durch ihn gehenden Orthogonalen Tangenten derselben, so muss die Beziehung

$$3r^2 - 2d^2 = 0 \quad \text{oder} \quad d = r\sqrt{\frac{3}{2}}$$

stattfinden.

Hier liesse sich noch die Aufgabe anschliessen: die Quadratsumme der Kanten des Octaeders anzugeben, dessen Ecken die Endpunkte der in Rede stehenden Sehnen sind, also eines der Kugel eingeschriebenen mit orthogonalen Axen. Es ist dieselbe (die bezügliche Figur ist leicht hinzuzudenken)

$$= 4(PA_1^2 + PB_1^2 + PA_2^2 + PB_2^2 + PA_3^2 + PB_3^2)$$
$$= 4(A_1B_1^2 - 2A_1P.B_1P + A_2B_2^2 - 2A_2P.B_2P + A_3B_3^2 - 2A_3P.B_3P)$$
$$= 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2x'x'' - 2y'y'' - 2z'z'')$$
$$= 4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 6p),$$

wo p die Potenz der Kugel für den Punkt P bedeutet,

$$= 4[12r^2 - 8d^2 - 6(r^2 - d^2)] = 8(3r^2 - d^2).$$

Für das zweischalige Hyperboloid, wo $-b^2$, $-c^2$ für b^2, c^2 einzusetzen ist, wird die Invariante:

$$\frac{4a^4\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x_0^2}{a^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)\frac{y_0^2}{b^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\frac{z_0^2}{c^2}\right]}{\left[a^2\left(1 + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right) - x_0^2\right]^2}.$$

Für den Kegel

$$x^2 = m^2y^2 + n^2z^2,$$

den wir als Asymptotenkegel der vorstehenden Fläche ansehen

können, leiten wir den bezüglichen Ausdruck ab, indem wir im eben erhaltenen Ausdruck

$$a = b = c = 0, \qquad \frac{a}{b} = m, \qquad \frac{a}{c} = n$$

setzen. Dann resultirt

$$\frac{4[(m^2+n^2)x_0^2 + m^2(1-n^2)y_0^2 + n^2(1-m^2)z_0^2]}{(m^2y_0^2 + n^2z_0^2 - x_0^2)^2};$$

insbesondere für den Rotationskegel $y^2+z^2 = kx^2$:

$$\frac{4k\left[2x_0^2 + \left(1-\frac{1}{k}\right)(y_0^2+z_0^2)\right]}{(y_0^2+z_0^2-kx_0^2)^2}.$$

Bezeichnen wir hier den Abstand des Punkts P von der Axe mit δ, die Normale vom Scheitel auf den durch P senkrecht zur Axe gelegten Queerschnitt mit h, dessen Radius mit r, so können wir den letzten Ausdruck auch schreiben:

$$\frac{4r^2[2h^4 + (h^2-r^2)\delta^2]}{h^4(r^2-\delta^2)^2};$$

und wenn P ein Punkt der Axe ist, also $\delta = 0$, so reducirt sich die Invariante auf $\frac{8}{r^2}$.

Aus den Relationen (1) folgt ferner für das Ellipsoid:

$$x_0^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{8}\left(\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$

$$y_0^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{8}\left(\frac{\beta^2}{b^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$

$$z_0^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{8}\left(\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2}\right);$$

und hieraus durch Addition:

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$$

oder

$$d^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{2} + \frac{\alpha^2}{8}\left(1 - \frac{b^2+c^2}{a^2}\right) + \frac{\beta^2}{8}\left(1 - \frac{a^2+c^2}{b^2}\right) + \frac{\gamma^2}{8}\left(1 - \frac{a^2+b^2}{c^2}\right)$$

oder:

$$b^2c^2(b^2+c^2-a^2)\alpha^2 + a^2c^2(a^2+c^2-b^2)\beta^2 + a^2b^2(a^2+b^2-c^2)\gamma^2 = 4a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2-2d^2),$$

welche Relation für $a = b = c$ in die bereits oben für die Kugel gefundene übergeht.

Mit Uebergehung der analogen Ausdrücke für die Hyperboloide erwähne ich nur noch den für den Rotationskegel:

$$y^2 + z^2 = \frac{r^2}{h^2} x^2 \qquad \text{oder} \qquad x^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2},$$

wenn ω den Oeffnungswinkel bedeutet. Hier ergibt sich:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}\right) \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8d^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}$$

(d Abstand des Punktes P vom Scheitel), eine Relation, die sich auch leicht geometrisch darthun lässt. Man hat nämlich im Kreise, wenn mn, mn' die Abstände der Sehnen A_1B_1, A_2B_2 oder α, β vom Centrum m bedeuten, offenbar:

$$\begin{aligned} A_1B_1^2 + A_2B_2^2 &= 4(r^2 - mn^2) + 4(r^2 - mn'^2) \\ &= 4(2r^2 - mn^2 - mn'^2) = 4(2r^2 - \delta^2) \end{aligned}$$

und es ist in Taf. IV. Fig. 1:

$$\alpha^2 \text{ oder } AB^2 = 4AN^2 = 4\delta^2 \operatorname{cot}^2 \frac{\omega}{2};$$

also:

$$\begin{aligned} \beta^2 + \gamma^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}\right) \alpha^2 &= 4(2r^2 - \delta^2) + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \left(1 + 2\operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}\right) 4\delta^2 \operatorname{cot}^2 \frac{\omega}{2} \\ &= 8r^2 + 8\delta^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \\ &= 8(h^2 + \delta^2) \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \\ &= 8d^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{8r^2 d^2}{h^2}. \end{aligned}$$

Zu II. Um einen elementaren Beweis dieses Satzes zu geben, führe ich zwei Hülfssätze an:

I) Sind die Diagonalen eines Vierseits auf einander senkrecht, so liegen die Fusspunkte der von ihrem Durchschnittspunkte auf die Seiten gefällten Lothe in einem Kreise.

Da nämlich (Taf. IV. Fig. 2.) $O\gamma D\beta$, $O\alpha\beta C$ u. s. w. centrisch sind, so ist:

$$O\beta\gamma = ODA = R - OAD = R - O\delta\gamma$$

und

$$O\beta\alpha = \qquad\qquad R - O\delta\alpha$$

$$O\beta\gamma + O\beta\alpha \text{ oder } \alpha\beta\gamma = \qquad\qquad 2R - \alpha\delta\gamma.$$

2) Ein Kegel, dessen Scheitel in einer Kugelfläche liegt, schneidet letztere in einem Kreise. Die auf dem durch diesen Scheitel gehenden Durchmesser normalen Ebenen bestimmen Wechselschnittkreise des ersteren.

Legen wir durch den Scheitel und seinen Gegenpunkt (auf der Kugelfläche) Tangentialebenen an die Kugel. Der Scheitel stellt sich dann als ein auf einen Punkt reducirter Durchschnittskreis einer Ebene mit der Kugel dar. Hieraus folgt, da, wenn eine Fläche zweiter Ordnung eine andere derselben Ordnung in einer ebenen Curve schneidet, die zweite Schnittcurve ebenfalls einfacher Krümmung sein muss, eine solche bei der Kugel aber nur ein Kreis sein kann, der erste Theil des Satzes. — Die Richtigkeit des zweiten Theils erhellt daraus, dass parallele Ebenen ähnliche Schnitte eines Kegels bedingen, die durch den Gegenpunkt gelegte Tangentialebene also den Kegel in einer jenem unendlich kleinen Schnittkreise, als welcher der Scheitel des Kegels anzusehen ist, ähnlichen Curve, d. h. in einem Kreise, schneiden muss. Es stimmt dieser Hülfssatz überein mit dem bekannten Satze, dass die zu der Höhe eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis als ihrem Durchmesser gehörende Kugel einen Wechselschnitt der Basis bestimmt.

Mit Zuziehung dieser Hülfssätze ergibt sich folgender Beweis zu Satz II.:

Die in Taf. IV. Fig. 3. von dem Punkt P auf die Seitenflächen AEF, ADE, ACD, ACF; BEF, BDE, BDC, BCF gefällten Lothe seien bezüglich:

$$PP_1,\ PP_2,\ PP_3,\ PP_4;\quad Pp_1,\ Pp_2,\ Pp_3,\ Pp_4.$$

Zieht man nun von A und B aus Gerade durch P_1, p_1 u. s. w. bis zu den Gegenseiten, so dass sich

AP_1 und Bp_1 in Kante EF im Punkt α,

AP_2 - Bp_2 - - DE - - β,

AP_3 - Bp_3 - - CD - - γ,

AP_4 - Bp_4 - - CF - - δ

treffen, so ist nach Hülfssatz I) $\alpha\beta\gamma\delta$ ein centrisches Vierseit und

es sind mithin $A\alpha$, $A\beta$, $A\gamma$, $A\delta$ Seiten des Kegels, dessen Scheitel A und dessen Basis der um $\alpha\beta\gamma\delta$ beschriebene Kreis ist; ebenso $B\alpha$, $B\beta$, $B\gamma$, $B\delta$ Seiten des Kegels mit derselben Basis, dessen Scheitel B ist. Es enthält nun die über AP als Durchmesser beschriebene Kugelfläche die vier Fusspunkte: P_1, P_2, P_3, P_4 und die über BP als Durchmesser beschriebene die vier andern: p_1, p_2, p_3, p_4; mithin liegen nach Hülfssatz 2) sowohl die ersteren als auch die letzteren in je einem Kreise, Wechselschnitten der gemeinschaftlichen Basis in jedem der beiden Kegel. Da überdies die Verbindungslinie AB der Scheitel auf dieser Basis senkrecht steht oder die Normalschnitte beider Kegel in dieselbe Ebene fallen, so lässt sich durch die beiden Kreise eine Kugel legen, womit unser Satz erwiesen ist.

XXI.

Applications des déterminants à l'algèbre et à la géométrie analytique.

Par

Monsieur *J. Versluys*,
Professeur de Mathématiques à Groningue. (Pays-Bas.)

Dans les pages suivants il se trouve

I. La résultante d'un système de n équations dont une est du second degré, tandis que les autres sont du premier degré. §§. 1 et 2.

II. L'équation ordinaire, la triliniaire ou la tangentielle d'une conique, dans tous les cas où la courbe est parfaitement déterminée (eindeutig bestimmt) par un nombre suffisant des données suivantes: un point, un couple de points conjugués, une tangente, un couple de droites conjuguées, un foyer, le centre, une droite avec son pôle. Les cas particuliers, cercle, parabole, et hyper-

bole équilatère sont traités. A tout cela quelques discussions sont ajoutées §§. 3—24.

III. La condition qui exprime que six éléments simples appartiennent à une même conique, dans tous les cas, où un élément de moins suffit pour déterminer parfaitement la courbe, que les éléments simples sont: un point, un couple de points conjugués, une tangente, un couple de droites conjuguées, et qu'un couple d'éléments simples sont: un foyer, le centre, une droite avec son pôle §§. 25—33.

IV. L'équation ordinaire, la quadriplanaire, ou la planaire d'une surface du second degré dans tous les cas, où la surface est parfaitemement déterminée par un nombre suffisant des données suivantes: un point, un couple de points conjugués, un plan tangent, un couple de plans conjugués, le centre, un plan avec son pôle, un point double §§. 34—46.

V. La condition qui exprime que dix éléments simples appartiennent à la même surface du second degré dans tous les cas où un élément de moins suffit pour déterminer parfaitement la surface, et que les éléments sont les mêmes que dans le numero précédent; les conditions qui expriment que quatre droites soient situées dans une même surface du second degré, et quelques conditions analogues. §§. 47—56.

I.

§. 1.

Former la résultante d'un système d'équations dont une est du second degré, tandis que les autres sont du premier degré.

Prenons le système

$$F = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + hxy = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1z = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z = 0$$

La première équation peut s'écrire

$$\frac{\partial F}{\partial x}x + \frac{\partial F}{\partial y}y + \frac{\partial F}{\partial z}z = 0,$$
$$A_1x + B_1y + C_1z = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z = 0.$$

Il est nécessaire et suffisant pour cela qu' on puisse trouver deux valeurs λ et μ pour lesquelles

$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x} \equiv ax + hy + gz = \lambda A_1 + \mu A_2$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial y} \equiv hx + by + fz = \lambda B_1 + \mu B_2$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial F}{\partial z} \equiv gx + fy + cz = \lambda C_1 + \mu C_2$$

où l'on remplace x, y, z par leurs valeurs déterminées par les équations

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z = 0$$

Il est donc nécessaire et suffisant qu' un même système de valeurs de x, y, z, λ, μ vérifie les équations

$$ax + hy + gz = \lambda A_1 + \mu A_2,$$
$$hx + by + fz = \lambda B_1 + \mu B_2,$$
$$gx + fy + cz = \lambda C_1 + \mu C_2,$$
$$A_1x + B_1y + C_1z = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z = 0,$$

ce qui s'exprime par la condition

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A_1 & A_2 \\ h & b & f & B_1 & B_2 \\ g & f & c & C_1 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & & \end{vmatrix} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

En appliquant les mêmes raisonnements aux équations

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2pxu + 2qyu + 2rzu = 0$$
$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1u = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2u = 0$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3u = 0$$

on trouve de la même manière que la résultante de ce système est

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 & A_3 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 & B_3 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 & C_3 \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 & D_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & & \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 & & & \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

De la même manière on peut exprimer la résultante d'un nombre quelconque d'équations, dont une est du 2^d degré, tandis que les autres sont du 1er degré. La forme de la résultante d'un tel système est évidente, d'après ce qui précède.

§. 2.

Quand on regarde le premier système d'équations du paragraphe précédent comme représentant une conique et deux droites rapportés à un système de coordonnées trilinéaires, la condition (1) exprime que le point d'intersection des deux droites est un point de la conique.

Cette propriété se trouve sans démonstration dans „Salmon, Lessons introductory to the modern higher algebra", page 16.

Quand on regarde le premier système d'équations du paragraphe précédent comme représentant une conique et deux points rapportés à un système de coordonnées tangentielles, la condition (1) exprime que la droite qui passe par les deux points est tangente à la conique.

Quand on regarde le système d'équations à 4 inconnues du paragraphe précédent, comme représentant une surface du 2^d ordre et 3 plans, rapportées à un système de coordonnées quadriplanaires, la condition (2) exprime que le point d'intersection des trois plans est un point de la surface. Cette propriété se trouve sans démonstration dans Salmon. l. c. J'en ai donné une demonstration différente de la précédente dans le tome LI de cet Archiv.

Quand on regarde le système d'équations à 4 inconnues du § précédent comme représentant une surface du second degré et 3 points rapportés à un système de coordonnées planaires, la condition (2) exprime que le plan passant par ces points est tangent à la surface.

II.

§. 3.

Équation de la conique qui passe par cinq points donnés.

Les cinq points soient $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$; $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$; $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$; $\alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4$; $\alpha_5\ \beta_5\ \gamma_5$. Représentons l'équation trilinéaire de la conique par

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0.$$

Pour que le premier point soit un point de la conique, il faut qu'on ait

$$a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2 + 2f\beta_1\gamma_1 + 2g\gamma_1\alpha_1 + 2h\alpha_1\beta_1 = 0.$$

De même pour les autres points

$$a\alpha_2^2+b\beta_2^2+c\gamma_2^2+2f\beta_2\gamma_2+2g\gamma_2\alpha_2+2h\alpha_2\beta_2=0$$
$$a\alpha_3^2+b\beta_3^2+c\gamma_3^2+2f\beta_3\gamma_3+2g\gamma_3\alpha_3+2h\alpha_3\beta_3=0$$
$$a\alpha_4^2+b\beta_4^2+c\gamma_4^2+2f\beta_4\gamma_4+2g\gamma_4\alpha_4+2h\alpha_4\beta_4=0$$
$$a\alpha_5^2+b\beta_5^2+c\gamma_5^2+2f\beta_5\gamma_5+2g\gamma_5\alpha_5+2h\alpha_5\beta_5=0.$$

Éliminant a, b, c, f, g, h, entre les 6 équations précédentes, on trouve pour l'équation de la conique

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2\alpha_2 & \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3\alpha_3 & \alpha_3\beta_3 \\ \alpha_4^2 & \beta_4^2 & \gamma_4^2 & \beta_4\gamma_4 & \gamma_4\alpha_4 & \alpha_4\beta_4 \\ \alpha_5^2 & \beta_5^2 & \gamma_5^2 & \beta_5\gamma_5 & \gamma_5\alpha_5 & \alpha_5\beta_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Les mêmes raisonnements peuvent s'appliquer aux coordonnées ordinaires. Il suffit donc de remplacer dans le résultat précédent les α par des x, les β par des y et les γ par 1.

§. 4.

Déterminer si les points d'intersection d'une droite donnée et d'une conique qui passe par 5 points donnés sont réels et distincts, coïncidents, ou imaginaires

Les cinq points soient $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$, etc.; et la droite donnée soit $A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma=0$. Désignons une conique par

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0.$$

Pour que cette conique passe par les 5 points donnés et qu'elle soit tangente en même temps à la droite donnée, il faut qu'il existe un système de valeurs pour a, b, c, f, g, h, qui vérifient les équations

$$\left.\begin{aligned} a\alpha_1^2+b\beta_1^2+c\gamma_1^2+2f\beta_1\gamma_1+2g\gamma_1\alpha_1+2h\alpha_1\beta_1&=0\\ a\alpha_2^2+b\beta_2^2+c\gamma_2^2+2f\beta_2\gamma_2+2g\gamma_2\alpha_2+2h\alpha_2\beta_2&=0\\ a\alpha_3^2+b\beta_3^2+c\gamma_3^2+2f\beta_3\gamma_3+2g\gamma_3\alpha_3+2h\alpha_3\beta_3&=0\\ a\alpha_4^2+b\beta_4^2+c\gamma_4^2+2f\beta_4\gamma_4+2g\gamma_4\alpha_4+2h\alpha_4\beta_4&=0\\ a\alpha_5^2+b\beta_5^2+c\gamma_5^2+2f\beta_5\gamma_5+2g\gamma_5\alpha_5+2h\alpha_5\beta_5&=0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (3)$$

$$P\equiv\begin{vmatrix} a & h & g & A_1 \\ h & b & f & B_1 \\ g & f & c & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & \end{vmatrix}=0$$

ou $$A_1^2(bc-f^2)+B_1^2(ca-g^2)+C_1^2(ab-h^2)$$
$$+2B_1C_1(gh-af)+2C_1A_1(hf-bg)+2A_1B_1(fg-ch)=0.$$

Et cela s'exprime d'après le §. 1 par l'équation

$$Q\equiv\begin{vmatrix}
0 & C_1^2 & B_1^2 & -2B_1C_1 & 0 & 0 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 \ldots\ldots \alpha_5^2 \\
C_1^2 & 0 & A_1^2 & 0 & -2C_1A_1 & 0 & \beta_1^2 & \beta_2^2 \ldots\ldots \beta_5^2 \\
B_1^2 & A_1^2 & 0 & 0 & 0 & -2A_1B_1 & \gamma_1^2 & \gamma_2^2 \ldots\ldots \gamma_5^2 \\
-2B_1C_1 & 0 & 0 & -2A_1^2 & 2A_1B_1 & 2C_1A_1 & 2\beta_1\gamma_1 & 2\beta_2\gamma_2 \ldots 2\beta_5\gamma_5 \\
0 & -2C_1A_1 & 0 & 2A_1B_1 & -2B_1^2 & 2B_1C_1 & 2\beta_1\gamma_1 & 2\gamma_2\alpha_2 \ldots 2\gamma_5\alpha_5 \\
0 & 0 & -2A_1B_1 & 2C_1A_1 & 2B_1C_1 & -2C_1^2 & 2\alpha_1\beta_1 & 2\alpha_2\beta_2 \ldots 2\alpha_5\beta_5 \\
\alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\beta_1\gamma_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1 & & \\
\alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\beta_2\gamma_2 & 2\gamma_2\alpha_2 & 2\alpha_2\beta_2 & & \\
\alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\beta_2\gamma_3 & 2\gamma_3\alpha_3 & 2\alpha_3\beta_3 & & \\
\alpha_4^2 & \alpha_4^2 & \gamma_4^2 & 2\beta_4\gamma_4 & 2\gamma_4\alpha_4 & 2\alpha_4\beta_4 & & \\
\alpha_5^2 & \beta_5^2 & \gamma_5^2 & 2\beta_5\gamma_5 & 2\gamma_5\alpha_5 & 2\alpha_5\beta_5 & &
\end{vmatrix}=0.$$

Quand Q est différent de zéro, la droite coupe la conique. Pour voir quel signe de Q se rapporte à des points d'intersection réels, remarquons que dans ce cas les valeurs de a, b, c, f, g, h tirées du système (3) doivent rendre P positif. Or, après cette substitution P ne diffère de Q que par la forme. D'après les équations (3) on α, quand on prend pour a, b, c, f, g, h, des formes algébriques entières:

$$h=\begin{vmatrix}
\alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\beta_1\gamma_1 & 2\gamma_1\alpha_1 \\
\alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & 2\beta_2\gamma_2 & 2\gamma_2\alpha_2 \\
\alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & 2\beta_3\gamma_3 & 2\gamma_3\alpha_3 \\
\alpha_4^2 & \beta_4^2 & \gamma_4^2 & 2\beta_4\gamma_4 & 2\gamma_4\alpha_4 \\
\alpha_5^2 & \beta_5^2 & \gamma_5^2 & 2\beta_5\gamma_5 & 2\gamma_5\alpha_5
\end{vmatrix}$$

On a dans le développement de Q le terme

$$-2h^2C_1^2.$$

Mais dans le développement de P on a le terme

$$h^2C_1^2$$

d'où l'on peut conclure que

$$Q=-2P,$$

de sorte qu'on a: Quand Q est négatif, les points d'intersection de la droite et de la conique sont réels; quand Q est positif, les points d'intersection sont imaginaires.

Remarque. Les mêmes raisonnements s'appliquent aux coordonnées ordinaires.

§. 5.

Déterminer si la conique qui passe par 5 points donnés est ellipse, parabole ou hyperbole.

La droite à distance infinie soit

$$\varphi \equiv A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

La conique est un parabole, quand les points d'intersection de φ et de la conique coïncident. La conique est une ellipse, quand les points d'intersection sont imaginaires. La conique est une hyperbole, quand les points d'intersection sont réels. Dans Q il faut donc remplacer A_1, B_1, C_1 respectivement par A, B, C et puis il faut voir si Q est positif, zéro, ou négatif. Quand Q est positif, la conique est une ellipse; quand Q est zéro, la conique est une parabole; quand Q est négatif, la conique est une hyperbole.

Pour les cordonnées ordinaires on doit remplacer dans Q les α par des x, les β par des y, les γ par 1, A et B par 0, et C par 1; de sorte que dans ce cas on a: la conique qui passe par 5 points donnés rapportés à un système de coordonnées ordinaires est ellipse, quand $Q_1 > 0$, parabole, quand on a $Q_1 = 0$, et hyperbole, quand $Q_1 < 0$, où l'on a

$$Q_1 = \begin{vmatrix} . & 1 & . & . & . & . & x_1^2 & x_2^2 \ldots . x_5^2 \\ 1 & . & . & . & . & . & y_1^2 & y_2^2 \ldots . y_5^2 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 1 \ldots . . . 1 \\ . & . & . & . & . & . & 2y_1 & 2y_2 \ldots . . . 1 \\ . & . & . & . & . & . & 2x_1 & 2x_2 \ldots . . . 1 \\ . & . & . & . & . & -2 & 2x_1y_1 & 2x_2y_2 \ldots . 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & 1 & 2y_1 & 2x_1 & 2x_1y_1 & & \\ x_2^2 & y_2^2 & 1 & 2y_2 & 2x_2 & 2x_2y_2 & & \\ x_3^2 & y_3^2 & 1 & 2y_3 & 2x_3 & 2x_3y_3 & & \\ x_4^2 & y_4^2 & 1 & 2y_4 & 2x_4 & 2x_4y_4 & & \\ x_5^2 & y_5^2 & 1 & 2y_5 & 2x_5 & 2x_5y_5 & & \end{vmatrix}$$

Un autre moyen de déterminer la forme de la conique sans déterminer son équation, se déduit de la construction suivante donnée par M. Chasles dans son Traité des sections coniques, art. 13.

Soient 1, 2, 3, 4, 5 les 5 points donnés. Considérant les deux faisceaux de rayons (1, 3), (1, 4), (1, 5) et (2, 3), (2, 4), (2, 5), menés à tous les points de la courbe: il s'agit de trouver si les couples de rayons homologues parallèles sont réels et distincts, coïncidents ou imaginaires. Pour cela on mènera pas l'origine des coordonnées des droites parallèles aux 6 rayons (1, 3), (1, 4) etc.... On aura ainsi deux faisceaux de même centre O, déterminés par trois couples de rayons homologues. On cherchera si les rayons doubles de ces deux faisceaux sont réels et distincts, coïncidents ou imaginaires.

Si ces deux rayons sont réels, la courbe est une **hyperbole**, parce qu'elle a deux points à l'infini dans la direction de ces rayons. S'ils sont coïncidents, la courbe n'a qu' un point situé à l'infini, et est une **parabole**. Enfin si les rayons doubles sont imaginaires, la courbe n'a aucun point à l'infini et est une ellipse.

Les rayons (1, 3), (1, 4), (1, 5) ont pour équations

$$y-y_1=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}(x-x_1),\quad y-y_1=\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}(x-x_1),$$

$$y-y_1=\frac{y_5-y_1}{x_5-x_1}(x-x_1).$$

Les rayons (2, 3), (2, 4), (2, 5) ont pour équations

$$y-y_2=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2),\quad y-y_2=\frac{y_4-y_2}{x_4-x_2}(x-x_2)$$

$$y-y_2=\frac{y_5-y_2}{x_5-x_2}(x-x_2).$$

Les droites tirées par l'origine parallèles aux 6 rayons précédents, ont respectivement pour équations

$$y=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}x,\quad y=\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}x,\quad y=\frac{y_5-y_1}{x_5-x_1}x;$$

$$y=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}x,\quad y=\frac{y_4-y_2}{x_4-x_2}x,\quad y=\frac{y_5-y_2}{x_5-x_2}x.$$

La question revient donc au problème suivant:

Etant donnés 3 couples de droites passant par un même point

$$y = ax \qquad y = a_1 x$$
$$y = bx \qquad y = b_1 x$$
$$y = cx \qquad y = c_1 x$$

exprimer en fonction de a, b, c; a_1, b_1, c_1, si les rayons doubles des 2 faisceaux homographiques déterminés par les 3 couples de droites, sont réels et distincts, coïncidents, ou imaginaires.

$y = px$, $y = p_1 x$ soit un quatrième couple de rayonscorrespondants, alors le rapport anharmonique des rayons a, b, c, p est

$$\frac{(p-b)(c-a)}{(p-c)(b-a)}.$$

Le rapport anharmonique des rayons a_1 b_1 c_1 p_1 est

$$\frac{(p_1-b_1)(c_1-a_1)}{(p_1-c_1)(b_1-a_1)}.$$

Pour que p et p_1 soient deux rayons correspondants, il faut que ces rapports anharmoniques soient égaux, ce qui donne

$$\frac{(p-b)(c-a)}{(p-c)(b-a)} = \frac{(p_1-b_1)(c_1-a_1)}{(p_1-c_1)(b_1-a_1)}.$$

Pour les rayons doubles on a $p = p_1$, de sorte que les rayons doubles sont déterminés par l'équation

$$\frac{(p-b)(c-a)}{(p-c)(b-a)} = \frac{(p-b_1)(c_1-a_1)}{(p-c_1)(b_1-a_1)} \text{ ou}$$

$$(p-b)(p-c_1)(c-a)(b_1-a_1) = (p-b_1)(p-c)(c_1-a_1)(b-a)$$

Quand les racines de cette équation quadratique sont réelles, les rayons doubles sont réels, etc.

Donc, pour connaître la forme de la conique déterminée par 5 points donnés, il suffit de savoir si les racines de l'équation

$$\frac{\left(p-\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}\right)\left(\frac{y_5-y_1}{x_5-x_1}-\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}\right)}{\left(p-\frac{y_5-y_1}{x_5-x_1}\right)\left(\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}-\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}\right)} = \frac{\left(p-\frac{y_4-y_2}{x_4-x_2}\right)\left(\frac{y_5-y_2}{x_5-x_2}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\right)}{\left(p-\frac{y_5-y_2}{x_5-x_2}\right)\left(\frac{y_4-y_2}{x_4-x_2}-\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\right)}$$

sont réelles et distinctes, coïncidentes, ou imaginaires. Quand

ces racines sont réelles et distinctes, on a une hyperbole; quand ces racines coïncident, la courbe est une parabole; quand ces racines sont imaginaires, la courbe est une ellipse.

§. 6.

Déterminer l'équation d'une conique, quand cinq couples de points conjugués par rapport à la conique sont donnés.

Les cinq couples de points soient

$$\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \gamma_1, \qquad \alpha_2 \quad \beta_2 \quad \gamma_2;$$
$$\alpha_3 \quad \beta_3 \quad \gamma_3, \qquad \alpha_4 \quad \beta_4 \quad \gamma_4; \quad \text{etc.}$$

Prenons pour l'équation de la conique

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0.$$

Pour que les points 1 et 2 soient conjugués par rapport à cette conique, il faut qu'on ait

$$a\alpha_1\alpha_2 + b\beta_1\beta_2 + c\gamma_1\gamma_2 + f(\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1) + g(\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1) + h(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) = 0.$$

De même pour les autres couples de points on a

$$a\alpha_3\alpha_4 + b\beta_3\beta_4 + c\gamma_3\gamma_4 + f(\beta_3\gamma_4 + \beta_4\gamma_3) + g(\gamma_3\alpha_4 + \gamma_4\alpha_3) + h(\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3) = 0$$
$$a\alpha_5\alpha_6 + b\beta_5\beta_6 + c\gamma_5\gamma_6 + f(\beta_5\gamma_6 + \beta_6\gamma_5) + g(\gamma_5\alpha_6 + \gamma_6\alpha_5) + h(\alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5) = 0$$
$$a\alpha_7\alpha_8 + b\beta_7\beta_8 + c\gamma_7\gamma_8 + f(\beta_7\gamma_8 + \beta_8\gamma_7) + g(\gamma_7\alpha_8 + \gamma_8\alpha_7) + h(\alpha_7\beta_8 + \alpha_8\beta_7) = 0$$
$$a\alpha_9\alpha_{10} + b\beta_9\beta_{10} + c\gamma_9\gamma_{10} + f(\beta_9\gamma_{10} + \beta_{10}\gamma_9)$$
$$+ g(\gamma_9\alpha_{10} + \gamma_{10}\alpha_9) + h(\alpha_9\beta_{10} + \alpha_{10}\beta_9 = 0.$$

Éliminant a, b, c, f, g, h entre les six équations précédentes, on trouve pour l'équation trilinéaire de la conique

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & 2\beta\gamma & 2\gamma\alpha & 2\alpha\beta \\ \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1 & \gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_3\alpha_4 & \beta_3\beta_4 & \gamma_3\gamma_4 & \beta_3\gamma_4 + \beta_4\gamma_3 & \gamma_3\alpha_4 + \gamma_4\alpha_3 & \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 \\ \alpha_5\alpha_6 & \beta_5\beta_6 & \gamma_5\gamma_6 & \beta_5\gamma_6 + \beta_6\gamma_5 & \gamma_5\alpha_6 + \gamma_6\alpha_5 & \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5 \\ \alpha_7\alpha_8 & \beta_7\beta_8 & \gamma_7\gamma_8 & \beta_7\gamma_8 + \beta_8\gamma_7 & \gamma_7\alpha_8 + \gamma_8\alpha_7 & \alpha_7\beta_8 + \alpha_8\beta_7 \\ \alpha_9\alpha_{10} & \beta_9\beta_{10} & \gamma_9\gamma_{10} & \beta_9\gamma_{10} + \beta_{10}\gamma_9 & \gamma_9\alpha_{10} + \gamma_{10}\alpha_9 & \alpha_9\beta_{10} + \alpha_{10}\beta_9 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Appliquant les raisonnements précédents aux coordonnées ordinaires, on trouve pour l'équation de la conique par rapport à laquelle 5 couples de points conjugués sont donnés

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_1x_2 & x_1y_2+x_2y_1 & y_1y_2 & x_1+x_2 & y_1+y_2 & 1 \\ x_3x_4 & x_3y_4+x_4y_3 & y_3y_4 & x_3+x_4 & y_3+y_4 & 1 \\ x_5x_6 & x_5y_6+x_6y_5 & y_5y_6 & x_5+x_6 & y_5+y_6 & 1 \\ x_7x_8 & x_7y_8+x_8y_7 & y_7y_8 & x_7+x_8 & y_7+y_8 & 1 \\ x_9x_{10} & x_9y_{10}+x_{10}y_9 & y_9y_{10} & x_9+x_{10} & y_9+y_{10} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 7.

Les mêmes raisonnements nous mènent à des résultats analogues pour des coordonnées trilinéaires et pour des coordonnées ordinaires. Pour la simplicité je ne donne que les résultats pour des coordonnées ordinaires.

1°. L'équation de la conique qui passe par les points

$$x_1\ y_1,\quad x_2\ y_2,\quad x_3\ y_3,\quad x_4\ y_4$$

et par rapport à laquelle les points

$$x_5\ y_5,\quad x_6\ y_6$$

sont conjugués est

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 & 1 \\ x_4^2 & 2x_4y_4 & y_4^2 & 2x_4 & 2y_4 & 1 \\ x_5x_6 & x_5y_6+x_6y_5 & y_6y_6 & x_5+x_6 & y_5+y_6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2°. L'équation de la conique qui passe par les points

$$x_1y_1,\quad x_2y_2,\quad x_3y_3$$

et par rapport à laquelle sont conjugués les points

$$x_4y_4 \text{ et } x_5y_5,$$
$$x_6y_6 \text{ et } x_7y_7, \text{ est}$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ x_3^2 & 2x_3y_3 & y_3^2 & 2x_3 & 2y_3 & 1 \\ x_4x_5 & x_4y_5+x_5y_4 & y_4y_5 & x_4+x_5 & y_4+y_5 & 1 \\ x_6x_7 & x_6y_7+x_7y_6 & y_6y_7 & x_6+x_7 & y_6+y_7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3°. L'équation de la conique qui passe par les points

$$x_1\ y_1,\quad x_2\ y_2$$

et par rapport à laquelle sont conjugués les points

$$x_3 y_3 \text{ et } x_4 y_4$$
$$x_5 y_5 \text{ et } x_6 y_6$$
$$x_7 y_7 \text{ et } x_8 y_8 \text{ est}$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2^2 & 2x_2y_2 & y_2^2 & 2x_2 & 2y_2 & 1 \\ x_3+x_4 & x_3y_4+x_4y_3 & y_3y_4 & x_3x_4 & y_3+y_4 & 1 \\ x_5x_6 & x_5y_6+x_6y_5 & y_5y_6 & x_5x_6 & y_5+y_6 & 1 \\ x_7x_8 & x_7y_8+x_8y_7 & y_7y_8 & x_7x_8 & y_7+y_8 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4°. L'équation de la conique qui passe par le point $x_1\ y_1$, et par rapport à laquelle sont conjugués les points

x_2y_2 et x_3y_3, x_4y_4 et x_5y_5, x_6y_6 et x_7y_7, x_8y_8 et x_9y_9 est

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_1^2 & 2x_1y_1 & y_1^2 & 2x_1 & 2y_1 & 1 \\ x_2x_3 & x_2y_3+x_3y_2 & y_2y_3 & x_2+x_3 & y_2+y_3 & 1 \\ x_4y_5 & x_4y_5+x_5y_4 & y_4y_5 & x_4+x_5 & y_4+y_5 & 1 \\ x_6y_7 & x_6y_7+x_7y_6 & y_6y_7 & x_6+x_7 & y_6+y_7 & 1 \\ x_8x_9 & x_8y_9+x_9y_8 & y_8y_9 & x_8+x_9 & y_8+y_9 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 8.

De la même manière que nous avons trouvé dans le paragraphe 4 les conditions qui expriment si les points d'intersection d'une droite et d'une conique déterminée par cinq points donnés, sont réels et distincts, coïncidents ou imaginaires, on peut déterminer la même chose pour une conique déterminée par cinq couples de points conjugués. De même pour les coniques, qui sont traitées dans les quatre cas du paragraphe précédent.

Aussi peut on, sans déterminer l'équation de la conique, exprimer si la conique qui est déterminée par cinq couples de points conjugués, est une hyperbole, une ellipse, ou une parabole. Cela s'exprime respectivement par

$$\begin{vmatrix} . & 1 & . & . & . & . x_1x_2 \ldots\ldots x_9x_{10} \\ 1 & . & . & . & . & . y_1y_2 \ldots\ldots y_9y_{10} \\ . & . & . & . & . & . 1 \ldots\ldots 1 \\ . & . & . & . & . & . y_1+y_2 \ldots\ldots y_9+y_{10} \\ . & . & . & . & . & . x_1+x_2 \ldots\ldots x_9+x_{10} \\ . & . & . & . & . & 2\,x_1y_2+x_2y_1 \ldots x_9y_{10}+x_{10}y_9 \\ x_1x_2 & y_1y_2 & 1 & y_1+y_2 & x_1+x_2 & x_1y_2+x_2y_1 \\ x_3x_4 & y_3y_4 & 1 & y_3+y_4 & x_3+x_4 & x_3y_4+x_4y_3 \\ x_5x_6 & y_5y_6 & 1 & y_5+y_6 & x_5+x_6 & x_5y_6+x_6y_5 \\ x_7x_8 & y_7y_8 & 1 & y_7+y_8 & x_7+x_8 & x_7y_8+x_8y_7 \\ x_9x_{10} & y_9y_{10} & 1 & y_9+y_{10} & x_9+x_{10} & x_9y_{10}+x_{10}y_9 \end{vmatrix} \begin{matrix} < \\ = 0. \\ > \end{matrix}$$

De même pour les coniques qui sont déterminées comme dans les quatre cas du paragraphe 7.

§. 9.

Déterminer l'équation tangentielle de la conique dont cinq tangentes sont données.

Les cinq tangentes soient $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$, $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2$, $\lambda_3\ \mu_3\ \nu_3$, $\lambda_4\ \mu_4\ \nu_4$, $\lambda_5\ \mu_5\ \nu_5$.

Prenons pour l'équation tangentielle de la conique

$$a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+2f\mu\nu+2g\nu\lambda+2h\lambda\mu=0.$$

Que les cinq droites données soient tangentes à la conique, donne pour conditions

$$\begin{aligned} a\lambda_1{}^2+b\mu_1{}^2+c\nu_1{}^2+2f\mu_1\nu_1+2g\nu_1\lambda_1+2h\lambda_1\mu_1&=0 \\ a\lambda_2{}^2+b\mu_2{}^2+c\nu_2{}^2+2f\mu_2\nu_2+2g\nu_2\lambda_2+2h\lambda_2\mu_2&=0 \\ a\lambda_3{}^2+b\mu_3{}^2+c\nu_3{}^2+2f\mu_3\nu_3+2g\nu_3\lambda_3+2h\lambda_3\mu_3&=0 \\ a\lambda_4{}^2+b\mu_4{}^2+c\nu_4{}^2+2f\mu_4\nu_4+2g\nu_4\lambda_4+2h\lambda_4\mu_4&=0 \\ a\lambda_5{}^2+b\mu_5{}^2+c\nu_5{}^2+2f\mu_5\nu_5+2g\nu_5\lambda_5+2h\lambda_5\mu_5&=0. \end{aligned}$$

Eliminant a, b, c, f, g, h entre les 6 équations précédentes, on trouve l'équation de la conique sous la même forme que dans le §. 8.

§. 10.

Déterminer l'équation tangentielle de la conique par rapport à laquelle cinq couples de droites conjuguées sont données.

Les cinq couples de droites soient $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$ et $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2$, $\lambda_3\ \mu_3\ \nu_3$ et $\lambda_4\ \mu_4\ \nu_4$, etc.

L'équation de la conique soit

$$a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+2f\mu\nu+2g\nu\lambda+2h\lambda\mu=0.$$

Pour que les droites 1 et 2 soient conjuguées, il faut qu'on ait

$$\begin{aligned}
&a\lambda_1\lambda_2+b\mu_1\mu_2+c\nu_1\nu_2+f(\mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1)+g(\nu_1\lambda_2+\nu_2\lambda_1)+h(\lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1)=0\\
&a\lambda_3\lambda_4+b\mu_3\mu_4+c\nu_3\nu_4+f(\mu_3\nu_4+\mu_4\nu_3)+g(\nu_3\lambda_4+\nu_4\lambda_3)+h(\lambda_3\mu_4+\lambda_4\mu_3)=0\\
&a\lambda_5\lambda_6+b\mu_5\mu_6+c\nu_5\nu_6+f(\mu_5\nu_6+\mu_6\nu_5)+g(\nu_5\lambda_6+\nu_6\lambda_5)+h(\lambda_5\mu_6+\lambda_6\mu_5)=0\\
&a\lambda_7\lambda_8+b\mu_7\mu_8+c\nu_7\nu_8+f(\mu_7\nu_8+\mu_8\nu_7)+g(\nu_7\lambda_8+\nu_8\lambda_7)+h(\lambda_7\mu_8+\lambda_8\mu_7)=0\\
&a\lambda_9\lambda_{10}+b\mu_9\mu_{10}+c\nu_9\nu_{10}+f(\mu_9\nu_{10}+\mu_{10}\nu_9)\\
&\qquad\qquad+g(\nu_9\lambda_{10}+\nu_{10}\lambda_9)+h(\lambda_9\mu_{10}+\lambda_{10}\mu_9)=0.
\end{aligned}$$

Éliminant a, b, c, f, g, h entre les équations précédentes, on trouve pour l'équation de la conique

$$\begin{vmatrix}
\lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 & 2\mu\nu & 2\nu\lambda & 2\lambda\mu\\
\lambda_1\lambda_2 & \mu_1\mu_2 & \nu_1\nu_2 & \mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1 & \nu_1\lambda_2+\nu_2\lambda_1 & \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1\\
\lambda_3\lambda_4 & \mu_3\mu_4 & \nu_3\nu_4 & \mu_3\nu_4+\mu_4\nu_3 & \nu_3\lambda_4+\nu_4\lambda_3 & \lambda_3\mu_4+\lambda_4\mu_3\\
\lambda_5\lambda_6 & \mu_5\mu_6 & \nu_5\nu_6 & \mu_5\nu_6+\mu_6\nu_5 & \nu_5\lambda_6+\nu_6\lambda_5 & \lambda_5\mu_6+\lambda_6\mu_5\\
\lambda_7\lambda_8 & \mu_7\mu_8 & \nu_7\nu_8 & \mu_7\nu_8+\mu_8\nu_7 & \nu_7\lambda_8+\nu_8\lambda_7 & \lambda_7\mu_8+\lambda_8\mu_7\\
\lambda_9\lambda_{10} & \mu_9\mu_{10} & \nu_9\nu_{10} & \mu_9\nu_{10}+\mu_{10}\nu_9 & \nu_9\lambda_{10}+\nu_{10}\lambda_9 & \lambda_9\mu_{10}+\lambda_{10}\mu_9
\end{vmatrix}=0.$$

§. 11.

Par des raisonnements analogues à ceux des deux paragraphes précédents, on trouve qu'on peut écrire dans la forme d'un déterminant égalé à zéro:

1°. L'équation de la conique qui est tangente à quatre droites données, et par rapport à laquelle deux droites données sont conjuguées.

2°. L'équation de la conique qui est tangente à trois droites données, et par rapport à laquelle deux couples de droites conjuguées sont données.

3°. L'équation de la conique qui est tangente à deux droites données, et par rapport à laquelle trois couples de droites conjuguées sont données.

4°. L'équation de la conique qui est tangente à une droite donnée, et par rapport à laquelle quatre couples de droites conjuguées sont données.

§. 12.

Déterminer l'équation de la conique dont un foyer et trois tangentes sont données.

Le foyer soit $x_0\ y_0$ ou $\lambda x_0 + \mu y_0 + 1 = 0$.

Ecrivons les équations des tangentes dans la forme

$$\lambda_1 x + \mu_1 y + 1 = 0$$
$$\lambda_2 x + \mu_2 y + 1 = 0$$
$$\lambda_3 x + \mu_3 y + 1 = 0,$$

alors les coordonnées tangentielles de ces droites sont respectivement

$$\lambda_1 \mu_1, \quad \lambda_2 \mu_2, \quad \lambda_3 \mu_3.$$

Les conditions que $x_0 y_0$ est un foyer de la conique peuvent s'exprimer par les conditions qui expriment que

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = 0$$

représente deux tangentes de la conique. Ces deux tangentes sont donc

$$y - y_0 + (x - x_0)\sqrt{-1} = 0 \quad \text{ou} \quad y + x\sqrt{-1} - (y_0 + x_0\sqrt{-1}) = 0$$
$$\text{et} \quad y - y_0 - (x - x_0)\sqrt{-1} = 0 \quad \text{ou} \quad y - x\sqrt{-1} - (y_0 - x_0\sqrt{-1}) = 0.$$

L'équation de la conique soit

$$a\lambda^2 + 2h\lambda\mu + b\mu^2 + 2g\mu + 2f\lambda + c = 0 \ldots\ldots (x).$$

Pour que les deux droites précédentes soient tangentes à la conique, il faut qu'on ait

$$-a \pm 2h\sqrt{-1} + b + 2g(x_0 \mp y_0\sqrt{-1}) + 2f(-y_0 \mp x_0\sqrt{-1}) + (y_0^2 - x_0^2 \pm 2x_0y_0\sqrt{-1}) = 0$$

ou
$$-a + b + 2gx_0 - 2fy_0 + c(y_0^2 - x_0^2) = 0$$

et
$$2h - 2gy_0 - 2fx_0 + 2cx_0y_0 = 0.$$

Que les trois droites données doivent être tangentes à la conique, s'exprime par

$$a\lambda_1^2 + 2h\lambda_1\mu_1 + b\mu_1^2 + 2g\lambda_1 + 2f\mu_1 + c = 0$$
$$a\lambda_2^2 + 2h\lambda_2\mu_2 + b\mu_2^2 + 2g\lambda_2 + 2f\mu_2 + c = 0$$
$$a\lambda_3^2 + 2h\lambda_3\mu_3 + b\mu_3^2 + 1g\lambda_3 + 2f\mu_3 + c = 0.$$

Éliminant a, b, c, f, g, h entre les cinq équations précédentes et l'équation (x), on trouve pour l'équation cherchée

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \mu^2 & \lambda & \mu & 1 \\ -1 & 0 & +1 & x_0 & -y_0 & y_0^2-x_0^2 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 & -x_0 & 2x_0y_0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_1\mu_1 & \mu_1^2 & \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2\mu_2 & \mu_2^2 & \lambda_2 & \mu_2 & 1 \\ \lambda_3^2 & \lambda_3\mu_3 & \mu_3^2 & \lambda_3 & \mu_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Quand l'une des trois tangentes est la droite à distance infinie, la conique est un parabole. Que la conique est tangente à la droite à distance infinie, s'exprime par $c = 0$, les coordonnées de cette droite étant toutes les deux zéro. On a donc pour l'équation de la parabole dont deux tangentes et le foyer sont donnés

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \mu^2 & \lambda & \mu \\ -1 & 0 & 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 & -x_0 \\ \lambda_1^2 & \lambda_1\mu_1 & \mu_1^2 & \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2\mu_2 & \mu_2^2 & \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 13.

Déterminer l'équation de la conique dont deux foyers sont donnés et qui est tangente à une droite donnée.

Des raisonnements tout-à-fait analogues a ceux du paragraphe précédent nous donnent pour l'équation de la conique, quand x_0y_0 et x_1y_1 sont les foyers, et que λ_1, μ_1, est la tangente,

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & \mu^2 & \lambda & \mu & 1 \\ -1 & 0 & 1 & x_0 & -y_0 & y_0^2-x_0^2 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 & -x_0 & 2x_0y_0 \\ -1 & 0 & 1 & x_1 & -y_1 & y_1^2-x_1^2 \\ 0 & 1 & 0 & -y_1 & -x_1 & 2x_1y_1 \\ \lambda_1^2 & \lambda_1\mu_1 & \mu_1^2 & \lambda_1 & \mu_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 14.

Poursuivant les raisonnements précédents, on trouve immédiatement en forme de déterminant égalé à zéro:

1°. L'équation de la conique dont on a donné un foyer, deux tangentes, et un couple de droites conjuguées.

2°. **L'équation de la conique dont on a donné un foyer, une tangente, et deux couples de droites conjuguées.**

3°. **L'équation de la conique dont on a donné deux foyers et un couple de droites conjuguées.**

§. 15.

Déterminer l'équation de la conique dont le centre est donné et qui passe par trois points donnés.

Coordonnées ordinaires.

Le centre soit $x_0 y_0$; les trois points donnés soient $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$.

Prenons pour l'équation de la conique

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Que le point $x_0 y_0$ est le centre de la courbe, s'exprime par

$$\begin{aligned} 2ax_0 + 2hy_0 + 2g &= 0 \\ 2hx_0 + 2by_0 + 2f &= 0. \end{aligned}$$

Que la conique passe par les points donnés, s'exprime par

$$\begin{aligned} ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c &= 0 \\ ax_2^2 + 2hx_2y_2 + by_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c &= 0 \\ ax_3^2 + 2hx_3y_3 + by_3^2 + 2gx_3 + 2fy_3 + c &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant a, b, c, f, g, h entre les six équations précédentes, on trouve pour l'équation de la conique

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 2x_0 & y_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & 2y_0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Coordonnées trilinéaires.

Le centre soit $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0$; les trois points donnés soient $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$, $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$; la droite à distance infinie soit

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0.$$

Prenons pour l'équation de la conique

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0.$$

Le centre étant le pôle de la droite à distance infinie, que le point $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0$ est le centre de la courbe, s'exprime par

$$\begin{aligned} 2a\alpha_0 + 2h\beta_0 + 2g\gamma_0 &= \varepsilon A, \\ 2h\alpha_0 + 2b\beta_0 + 2f\gamma_0 &= \varepsilon B, \\ 2g\alpha_0 + 2f\beta_0 + 2c\gamma_0 &= \varepsilon C. \end{aligned}$$

Que la conique passe par les trois points donnés, s'exprime par

$$\begin{aligned} a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2 + 2f\beta_1\gamma_1 + 2g\gamma_1\alpha_1 + 2h\alpha_1\beta_1 &= 0 \\ a\alpha_2^2 + b\beta_2^2 + c\gamma_2^2 + 2f\beta_2\gamma_2 + 2g\gamma_2\alpha_2 + 2h\alpha_2\beta_2 &= 0 \\ a\alpha_3^2 + b\beta_3^2 + c\gamma_3^2 + 2f\beta_3\gamma_3 + 2g\gamma_3\alpha_3 + 2h\alpha_3\beta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant a, b, c, f, g, h, ε entre les sept équations précédentes, on trouve pour l'équation trilinéaire de la conique

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta & 0 \\ 2\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & \beta_0 & A \\ 0 & 2\beta_0 & 0 & \gamma_0 & 0 & \alpha_0 & B \\ 0 & 0 & 2\gamma_0 & \beta_0 & \alpha_0 & 0 & C \\ \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & 0 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2\alpha_2 & \alpha_2\beta_2 & 0 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3\alpha_3 & \alpha_3\beta_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 16.

Déterminer l'équation de la conique dont le centre est donné, et par rapport à laquelle trois couples de points donnés sont conjugués.

Le centre soit $x_0\ y_0$; les points conjugués soient

$$x_1y_1 \text{ et } x_2y_2,\ x_3y_3 \text{ et } x_4y_4,\ x_5y_5 \text{ et } x_6y_6.$$

Prenons pour l'équation de la conique

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Que le point $x_0\ y_0$ est le centre de la courbe, s'exprime pa

$$\begin{aligned} ax_0 + hy_0 + g &= 0 \\ hx_0 + by_0 + f &= 0. \end{aligned}$$

Que les trois couples de points donnés sont conjugués à conique, s'exprime par

$$ax_1x_2 + h(x_1y_2 + x_2y_1) + by_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0$$
$$ax_3x_4 + h(x_3y_4 + x_4y_3) + by_3y_4 + g(x_3 + x_4) + f(y_3 + y_4) + c = 0$$
$$ax_5x_6 + h(x_5y_6 + x_6y_5) + by_5y_6 + g(x_5 + x_6) + f(y_5 + y_6) + c = 0$$

Éliminant a, b, c, f, g, h entre les six équations précédentes, on trouve pour l'équation de la conique

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2xy & y^2 & 2x & 2y & 1 \\ x_0 & y_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & y_0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1x_2 & x_1y_2 + x_2y_1 & y_1y_2 & x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & 1 \\ x_3x_4 & x_3y_4 + x_4y_3 & y_3y_4 & x_3 + x_4 & y_3 + y_4 & 1 \\ x_5x_6 & x_5y_6 + x_6y_5 & y_5y_6 & x_5 + x_6 & y_5 + y_6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. On peut d'une manière analogue déterminer l'équation trilinéaire de la conique dont le centre et trois couples de points conjugués sont donnés.

§. 17.

De la même manière que dans le paragraphe précédent on trouve dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, pour un système de coordonnées trilinéaires comme pour un système de coordonnées ordinaires,

1°. L'équation de la conique dont le centre est donné avec deux points de la courbe et un couple de points conjugués.

2°. L'équation de la conique dont le centre est donné avec un point de la courbe et deux couples de points conjugués.

§. 18.

De la même manière que nous avons discuté dans le §. 4 les points d'intersection d'une droite donnée et d'une conique dans le cas où la conique est déterminée par cinq points donnés, on peut discuter ces points d'intersection dans le cas où la conique est déterminée par

1e le centre et trois points.

2e, le centre, deux points, et un couple de points conjugués.

3e, le centre, un point, et deux couples de points conjugués.

4e, le centre et trois couples de points conjugués.

Donc, on peut aussi dans tous ces cas, sans déterminer l'équation de la courbe, exprimer si la courbe est une hyperbole, une ellipse, ou une parabole.

Le résultat vient toujours dans la même forme que dans le §. 4.

§. 19.

De la même manière que j'ai discuté dans le §. 4 les points d'intersection d'une droite et d'une conique déterminée par cinq points de la courbe, on peut déterminer, sans chercher l'équation de la courbe, si un point est interieur à une conique, qu'il est extérieur à la courbe, ou qu'il est un point de la courbe, quand celle-ci est déterminée par

1e, cinq tangentes.
2e, quatre tangentes et un couple de droites conjuguées.
3e, trois „ et deux couples „ „ „
4e, deux „ et trois „ „ „ „
5e, une tangente et quatre „ „ „ „
6e, cinq „ „ „ „
7e, un foyer et trois tangentes.
8e, „ „ , deux „ et un couple de droites conjuguées.
9e, un foyer, une tangente et deux couples „ „ „
10e, „ et trois „ „ „ „
11e, deux foyers et une tangente.
12e, „ „ et un couple de droites conjuguées.

§. 20.

Déterminer l'équation tangentielle de la conique dont on a donné le centre et trois tangentes.

Le centre soit $\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\gamma_0\nu=0$; la droite à distance infinie A, B, C; les trois tangentes soient $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$, $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2$, $\lambda_3\ \mu_3\ \nu_3$. Pour que $\alpha_0\lambda+\beta_0\mu+\lambda_0\nu=0$ soit le centre de la conique, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$2aA+2gC+2hB=\varepsilon\alpha_0$$
$$2bB+2fC+2hA=\varepsilon\beta_0$$
$$2cC+2fB+2gA=\varepsilon\gamma_0$$

Que la conique est tangente aux trois droites données, s'exprime par

$$a\lambda_1^2 + b\mu_1^2 + c\nu_1^2 + 2f\mu_1\nu_1 + 2g\nu_1\lambda_1 + 2h\lambda_1\mu_1 = 0$$
$$a\lambda_2^2 + b\mu_2^2 + c\nu_2^2 + 2f\mu_2\nu_2 + 2g\nu_2\lambda_2 + 2h\lambda_2\mu_2 = 0$$
$$a\lambda_3^2 + b\mu_3^2 + c\nu_3^2 + 2f\mu_3\nu_3 + 2g\nu_3\lambda_3 + 2h\lambda_3\mu_3 = 0.$$

Eliminant $a, b, c, f, g, h, \varepsilon$ entre les 7 équations précédentes, on trouve pour l'équation de la conique

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 & \mu\nu & \nu\lambda & \lambda\mu & 0 \\ 2A & 0 & 0 & 0 & C & B & \alpha_0 \\ 0 & 2B & 0 & C & 0 & A & \beta_0 \\ 0 & 0 & 2C & B & A & 0 & \gamma_0 \\ \lambda_1^2 & \mu_1^2 & \nu_1^2 & \mu_1\nu_1 & \nu_1\lambda_1 & \lambda_1\mu_1 & 0 \\ \lambda_2^2 & \mu_2^2 & \nu_2^2 & \mu_2\nu_2 & \nu_2\lambda_2 & \lambda_2\mu_2 & 0 \\ \lambda_3^2 & \mu_3^2 & \nu_3^2 & \mu_3\nu_3 & \nu_3\lambda_3 & \lambda_3\mu_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 21.

De la même manière que dans le paragraphe précédent on trouve dans la forme d'un détérminant égalé à zéro, l'équation d'une conique dont on a donné

1e, Le centre et trois couples de droites conjuguées;

2e, „ „ , deux „ „ „ „ et une tangente;

3e, „ „ , un couple „ „ „ et deux tangentes;

4e, Une droite avec son pôle et 3 couples de droites conjuguées;

5e, Une droite avec son pôle, 2 couples de droites conjuguées et 1 tangente;

6e, Une droite avec son pôle, 2 couples de droites conjuguées et 2 tangentes;

7e, Une droite avec son pôle et 3 tangentes;

8e, Deux droites avec leurs pôles et une tangente;

9e, „ „ „ „ „ et un couple de droites conjuguées.

Comme un foyer équivaut à deux tangentes, on peut dans ce qui précède remplacer deux tangentes par un foyer.

§. 22.

Equation du cercle passant par trois points donnés.

Coordonnées trilinéaires.

Pour que $a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0$ soit un cercle, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$cB^2+bC^2-2fBC=aC^2+cA^2-2gCA=bA^2+aB^2-2hAB,$$

où A, B et C sont les côtés du triangle de référence.

A l'aide d'une nouvelle inconnue x les deux équations précédentes peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} cB^2+bC^2-2fBC&=x,\\ aC^2+cA^2-2gCA&=x,\\ bA^2+aB^2-2hAB&=x. \end{aligned}$$

Que le cercle passe par les points $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$, $\alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3$, s'exprime par

$$\begin{aligned} a\alpha_1^2+b\beta_1^2+c\gamma_1^2+2f\beta_1\gamma_1+2g\gamma_1\alpha_1+2h\alpha_1\beta_1&=0,\\ a\alpha_2^2+b\beta_2^2+c\gamma_2^2+2f\beta_2\gamma_2+2g\gamma_2\alpha_2+2h\alpha_2\beta_2&=0,\\ a\alpha_3^2+b\beta_3^2+c\gamma_3^2+2f\beta_3\gamma_3+2g\gamma_3\alpha_3+2h\alpha_3\beta_3&=0. \end{aligned}$$

Eliminant a, b, c, f, g, h, x, entre les six équations précédentes et la première équation de ce §, on trouve pour l'équation du cercle

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta & 0\\ \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & 0\\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2\alpha_2 & \alpha_2\beta_2 & 0\\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3\alpha_3 & \alpha_3\beta_3 & 0\\ 0 & C^2 & B^2 & -BC & 0 & 0 & 1\\ C^2 & 0 & A^2 & 0 & -CA & 0 & 1\\ B^2 & A^2 & 0 & 0 & 0 & -AB & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Coordonnées ordinaires rectangles.

L'équation du cercle soit

$$x^2+y^2+ax+by+c=0.$$

Que le cercle passe par les trois points $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$, s'exprime par

$$x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0$$
$$x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0$$
$$x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0.$$

Eliminant a, b, c, entre les quatre équations précédentes, on trouve pour l'équation du cercle

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ldots (a)$$

Remarques. 1. Pour un système de coordonnées obliques on doit remplacer x^2+y^2 par $x^2+y^2+2xy\cos\varphi$, où φ est l'angle des axes de coordonnées. De même pour $x_1^2+y_1^2$, $x_2^2+y_2^2$, $x_3^2+y_3^2$.

2. L'équation (a) se trouve dans le Traité des Sections Coniques de M. Salmon.

3. On peut de la même manière trouver, dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, l'équation d'un cercle dont on a donné

1°. Trois couples de points conjugués.
2°. Deux „ „ „ „ et un point.
3°. Un couple „ „ „ deux points.
4°. Le centre et un point.
5°. Le centre et un couple de points conjugués.

§. 23.

Hyperbole équilatère.

Quand A, B et C sont les angles du triangle de référence, la condition qui exprime que

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0$$

est une hyperbole équilatère, est

$$a+b+c-2f\cos A-2g\cos B-2h\cos C=0.$$

Voyez Salmon conic sections art. 382.

Déterminer l'équation de l'hyperbole équilatère qui passe par quatre points donnés.

Les quatre points soient α_1 β_1 γ_1, α_2 β_2 γ_2, etc.

Que la conique passe par ces points, s'exprime par

$$a\alpha_1^2+b\beta_1^2+c\gamma_1^2+2f\beta_1\gamma_1+2g\gamma_1\alpha_1+2h\alpha_1\beta_1=0$$
$$a\alpha_2^2+b\beta_2^2+c\gamma_2^2+2f\beta_2\gamma_2+2g\gamma_2\alpha_2+2h\alpha_2\beta_2=0$$
$$a\alpha_3^2+b\beta_3^2+c\gamma_3^2+2f\beta_3\gamma_3+2g\gamma_3\alpha_3+2h\alpha_3\beta_3=0$$
$$a\alpha_4^2+b\beta_4^2+c\gamma_4^2+2f\beta_4\gamma_4+2g\gamma_4\alpha_4+2h\alpha_4\beta_4=0$$

Eliminant a, b, c, f, g, h entre les six équations précédentes, on trouve pour l'équation de l'hyperbole équilatère

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta \\ 1 & 1 & 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos C \\ \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2\alpha_2 & \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3\alpha_3 & \alpha_3\beta_3 \\ \alpha_4^2 & \beta_4^2 & \gamma_4^2 & \beta_4\gamma_4 & \gamma_4\alpha_4 & \alpha_4\beta_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. De la même manière on peut déterminer l'équation de l'hyperbole équilatère dont on a donné

1° Quatre couples de points conjugués.
2° Trois „ „ „ „ et un point.
3° Deux „ „ „ „ et deux points.
4° Un couple „ „ „ et trois points.

En coordonnées ordinaires l'équation de l'hyperbole équilatère passant par 4 points donnés, est

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De même, on peut écrire dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, l'équation d'une hyperbole équilatère dont on a donné

1° le centre et deux points,
2° le centre, un point et un couple de points conjugués,
3° le centre et deux couples de points conjugués.

§. 24.

D'après tout ce qui a été dit dans II, on peut écrire dans la forme d'un déterminant égalé à zéro l'équation d'une conique, toutes les fois que cette conique est parfaitement déterminée par un nombre suffisant des données suivantes

points,
couples de points conjugués,
tangentes (parabole),
couples de droites conjuguées,
foyers,
centre,
droite avec son pôle

la condition qu' une conique soit hyperbole équilatère ou cercle.

III.

§. 25.

Condition qui exprime que six points appartiennent à une même courbe du second degré.

Les six points $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2$, etc. . . . . .

Pour qu' ils appartiennent à une même conique, il faut qu'il existe un système de valeurs a, b, c, f, g, h, qui vérifient les équations

$$a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2 + 2f\beta_1\gamma_1 + 2g\gamma_1\alpha_1 + 2h\alpha_1\beta_1 = 0$$
$$a\alpha_2^2 + b\beta_2^2 + c\gamma_2^2 + 2f\beta_2\gamma_2 + 2g\gamma_2\alpha_2 + 2h\alpha_2\beta_2 = 0$$
. . . . . .
$$a\alpha_6^2 + b\beta_6^2 + c\gamma_6^2 + 2f\beta_6\gamma_6 + 2g\gamma_6\alpha_6 + 2h\alpha_6\beta_6 = 0.$$

Eliminant a, b, c, f, g, h, entre les six équations précédentes, on trouve

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 \\ \alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2\alpha_2 & \alpha_2\beta_2 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3\alpha_3 & \alpha_3\beta_3 \\ \alpha_4^2 & \beta_4^2 & \gamma_4^2 & \beta_4\gamma_4 & \gamma_4\alpha_4 & \alpha_4\beta_4 \\ \alpha_5^2 & \beta_5^2 & \gamma_5^2 & \beta_5\gamma_5 & \gamma_5\alpha_5 & \alpha_5\beta_5 \\ \alpha_6^2 & \beta_6^2 & \gamma_6^2 & \beta_6\gamma_6 & \gamma_6\alpha_6 & \alpha_6\beta_6 \end{vmatrix} = 0.$$

De même pour des coordonnées ordinaires.

§. 26.

Des raisonnements tout-à-fait analogues à ceux du paragraphe précédent nous donnent:

Six couples de points seront conjugués à une même conique, quand on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1 & \gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1 \\ \alpha_3\alpha_4 & \beta_3\beta_4 & \gamma_3\gamma_4 & \beta_3\gamma_4+\beta_4\gamma_3 & \gamma_3\alpha_4+\gamma_4\alpha_3 & \alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3 \\ \alpha_5\alpha_6 & \beta_5\beta_6 & \gamma_5\gamma_6 & \beta_5\gamma_6+\beta_6\gamma_5 & \gamma_5\alpha_6+\gamma_6\alpha_5 & \alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5 \\ \alpha_7\alpha_8 & \beta_7\beta_8 & \gamma_7\gamma_8 & \beta_7\gamma_8+\beta_8\gamma_7 & \gamma_7\alpha_8+\gamma_8\alpha_7 & \alpha_7\beta_8+\alpha_8\beta_7 \\ \alpha_9\alpha_{10} & \beta_9\beta_{10} & \gamma_9\gamma_{10} & \beta_9\gamma_{10}+\beta_{10}\gamma_9 & \gamma_9\alpha_{10}+\gamma_{10}\alpha_9 & \alpha_9\beta_{10}+\alpha_{10}\beta_9 \\ \alpha_{11}\alpha_{12} & \beta_{11}\beta_{12} & \gamma_{11}\gamma_{12} & \beta_{11}\gamma_{12}+\beta_{12}\gamma_{11} & \gamma_{11}\alpha_{12}+\gamma_{12}\alpha_{11} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{11} \end{vmatrix} = 0$$

Cinq couples de points 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8, 9 et 10 seront conjugués par rapport à une conique qui passe par un point 11, quand on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1 & \gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1 \\ \alpha_3\alpha_4 & \beta_3\beta_4 & \gamma_3\gamma_4 & \beta_3\gamma_4+\beta_4\gamma_3 & \gamma_3\alpha_4+\gamma_4\alpha_3 & \alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3 \\ \alpha_5\alpha_6 & \beta_5\beta_6 & \gamma_5\gamma_6 & \beta_5\gamma_6+\beta_6\gamma_5 & \gamma_5\alpha_6+\gamma_6\alpha_5 & \alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5 \\ \alpha_7\alpha_8 & \beta_7\beta_8 & \gamma_7\gamma_8 & \beta_7\gamma_8+\beta_8\gamma_7 & \gamma_7\alpha_8+\gamma_8\alpha_7 & \alpha_7\beta_8+\alpha_8\beta_7 \\ \alpha_9\alpha_{10} & \beta_9\beta_{10} & \gamma_9\gamma_{10} & \beta_9\gamma_{10}+\beta_{10}\gamma_9 & \gamma_9\alpha_{10}+\gamma_{10}\alpha_9 & \alpha_9\beta_{10}+\alpha_{10}\beta_9 \\ \alpha_{11}^2 & \beta_{11}^2 & \gamma_{11}^2 & 2\beta_{11}\gamma_{11} & 2\gamma_{11}\alpha_{11} & 2\alpha_{11}\beta_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Quatre couples de points 1 et 2, 3 et 4, 5 et 6, 7 et 8 sont conjugués par rapport à une conique qui passe par deux points 9 et 10, quand on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1 & \gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1 \\ \alpha_3\alpha_4 & \beta_3\beta_4 & \gamma_3\gamma_4 & \beta_3\gamma_4+\beta_4\gamma_3 & \gamma_3\alpha_4+\gamma_4\alpha_3 & \alpha_3\beta_4+\alpha_4\beta_3 \\ \alpha_5\alpha_6 & \beta_5\beta_6 & \gamma_5\gamma_6 & \beta_5\gamma_6+\beta_6\gamma_5 & \gamma_5\alpha_6+\gamma_6\alpha_5 & \alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5 \\ \alpha_7\alpha_8 & \beta_7\beta_8 & \gamma_7\gamma_8 & \beta_7\gamma_8+\beta_8\gamma_7 & \gamma_7\alpha_8+\gamma_8\alpha_7 & \alpha_7\beta_8+\alpha_8\beta_7 \\ \alpha_9^2 & \beta_9^2 & \gamma_9^2 & 2\beta_9\gamma_9 & 2\gamma_9\alpha_9 & 2\alpha_9\beta_9 \\ \alpha_{10}^2 & \beta_{10}^2 & \gamma_{10}^2 & 2\beta_{10}\gamma_{10} & 2\gamma_{10}\alpha_{10} & 2\alpha_{10}\beta_{10} \end{vmatrix} = 0.$$

De la même manière on peut écrire dans la forme d'un tel déterminant égalé à zéro:

La condition qui exprime que trois couples de points sont conjugués par rapport à une conique qui passe par trois points donnés.

La condition qui exprime que deux couples de points sont conjugués par rapport à une conique, qui passe par quatre points donnés.

La condition qui exprime que deux points sont conjugués par rapport à une conique, qui passe par cinq points donnés.

§. 27.

Trouver la condition qui exprime que deux triangles soient autopolaires par rapport à une même conique.

Les sommets du premier triangle soient

$$\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1,\quad \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2,\quad \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3;$$

les sommets du second triangle soient

$$\alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4,\quad \alpha_5\ \beta_5\ \gamma_5,\quad \alpha_6\ \beta_6\ \gamma_6.$$

Pour que le premier triangle soit autopolaire par rapport à une conique

$$a\alpha^2+b\beta^2+c\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\gamma\alpha+2h\alpha\beta=0,$$

il est nécessaire et suffisant que les points 1 et 2, 2 et 3, 3 et 1 soient des couples de points conjugués, ce qui s'exprime par

$$\begin{aligned}
&a\alpha_1\alpha_2+b\beta_1\beta_2+c\gamma_1\gamma_2+f(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)+g(\gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1)+h(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)=0\\
&a\alpha_2\alpha_3+b\beta_2\beta_3+c\gamma_2\gamma_3+f(\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2)+g(\gamma_2\alpha_3+\gamma_3\alpha_2)+h(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)=0\\
&a\alpha_3\alpha_1+b\beta_3\beta_1+c\gamma_3\gamma_1+f(\beta_3\gamma_1+\beta_1\gamma_3)+g(\gamma_3\alpha_1+\gamma_1\alpha_3)+h(\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3)=0.
\end{aligned}$$

Pour que le second triangle soit autopolaire par rapport à la même conique, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\begin{aligned}
&a\alpha_4\alpha_5+b\beta_4\beta_5+c\gamma_4\gamma_5+f(\beta_4\gamma_5+\beta_5\gamma_4)+g(\gamma_4\alpha_5+\gamma_5\alpha_4)+h(\alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4)=0\\
&a\alpha_5\alpha_6+b\beta_5\beta_6+c\gamma_5\gamma_6+f(\beta_5\gamma_6+\beta_6\gamma_5)+g(\gamma_5\alpha_6+\gamma_6\alpha_5)+h(\alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5)=0\\
&a\alpha_6\alpha_4+b\beta_6\beta_3+c\gamma_6\gamma_4+f(\beta_6\gamma_4+\beta_4\gamma_6)+g(\gamma_6\alpha_4+\gamma_4\alpha_6)+h(\alpha_6\beta_4+\alpha_4\beta_6)=0.
\end{aligned}$$

Éliminant a, b, c, f, g, h entre les équations précédentes, on trouve

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1\alpha_2 & \beta_1\beta_2 & \gamma_1\gamma_2 & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1 & \gamma_1\alpha_2+\gamma_2\alpha_1 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\\
\alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3 & \gamma_2\gamma_3 & \beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2 & \gamma_2\alpha_3+\gamma_3\alpha_2 & \alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2\\
\alpha_3\alpha_1 & \beta_3\beta_1 & \gamma_3\gamma_1 & \beta_3\gamma_1+\beta_1\gamma_3 & \gamma_3\alpha_1+\gamma_1\alpha_3 & \alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3\\
\alpha_4\alpha_5 & \beta_4\beta_5 & \gamma_4\gamma_5 & \beta_4\gamma_5+\beta_5\gamma_4 & \gamma_4\alpha_5+\gamma_5\alpha_4 & \alpha_4\beta_5+\alpha_5\beta_4\\
\alpha_5\alpha_6 & \beta_5\beta_6 & \gamma_5\gamma_6 & \beta_5\gamma_6+\beta_6\gamma_5 & \gamma_5\alpha_6+\gamma_6\alpha_5 & \alpha_5\beta_6+\alpha_6\beta_5\\
\alpha_6\alpha_4 & \beta_6\beta_4 & \gamma_6\gamma_4 & \beta_6\gamma_4+\beta_4\gamma_6 & \gamma_6\alpha_4+\gamma_4\alpha_6 & \alpha_6\beta_4+\alpha_4\beta_6
\end{vmatrix}=0.$$

§. 28.

En appliquant les mêmes raisonnements que dans le pa graphe 25, on trouve

Six droites λ_1, μ_1, ν_1, ou $\lambda_1\alpha+\mu_1\beta+\nu_1\gamma=0$, etc. so tangentes à une même conique, quand on a

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \mu_1^2 & \nu_1^2 & \mu_1\nu_1 & \nu_1\lambda_1 & \lambda_1\mu_1 \\ \lambda_2^2 & \mu_2^2 & \nu_2^2 & \mu_2\nu_2 & \nu_2\lambda_2 & \lambda_2\mu_2 \\ \lambda_3^2 & \mu_3^2 & \nu_3^2 & \mu_3\nu_3 & \nu_3\lambda_3 & \lambda_3\mu_3 \\ \lambda_4^2 & \mu_4^2 & \nu_4^2 & \mu_4\nu_4 & \nu_4\lambda_4 & \lambda_4\mu_4 \\ \lambda_5^2 & \mu_5^2 & \nu_5^2 & \mu_5\nu_5 & \nu_5\lambda_5 & \lambda_5\mu_5 \\ \lambda_6^2 & \mu_6^2 & \nu_6^2 & \mu_6\nu_6 & \nu_6\lambda_6 & \lambda_6\mu_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation se trouve dans Salmon, Traité des Se tions Coniques.

De la même manière on a:

Six couples de droites $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$ et $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2$, etc. so conjuguées à une même conique, quand on a

$$\begin{vmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \mu_1\mu_2 & \nu_1\nu_2 & \mu_1\nu_2+\mu_2\nu_1 & \nu_1\lambda_2+\nu_2\lambda_1 & \lambda_1\mu_2+\lambda_2\mu_1 \\ \lambda_3\lambda_4 & \mu_3\mu_4 & \nu_3\nu_4 & \mu_3\nu_4+\mu_4\nu_3 & \nu_3\lambda_4+\nu_4\lambda_3 & \lambda_3\mu_4+\lambda_4\mu_3 \\ \lambda_5\lambda_6 & \mu_5\mu_6 & \nu_5\nu_6 & \mu_5\nu_6+\mu_6\nu_5 & \nu_5\lambda_6+\nu_6\lambda_5 & \lambda_5\mu_6+\lambda_6\mu_5 \\ \lambda_7\lambda_8 & \mu_7\mu_8 & \nu_7\nu_8 & \mu_7\nu_8+\mu_8\nu_7 & \nu_7\lambda_8+\nu_8\lambda_7 & \lambda_7\mu_8+\lambda_8\mu_7 \\ \lambda_9\lambda_{10} & \mu_9\mu_{10} & \nu_9\nu_{10} & \mu_9\nu_{10}+\mu_{10}\nu_9 & \nu_9\lambda_{10}+\nu_{10}\lambda_9 & \lambda_9\mu_{10}+\lambda_{10}\mu_9 \\ \lambda_{11}\lambda_{12} & \mu_{11}\mu_{12} & \nu_{11}\nu_{12} & \mu_{11}\nu_{12}+\mu_{12}\nu_{11} & \nu_{11}\lambda_{12}+\nu_{12}\lambda_{11} & \lambda_{11}\mu_{12}+\lambda_{12}\mu_{11} \end{vmatrix} =$$

Dans une même forme on peut ecrire la condition qui expri

Que cinq couples de droites données sont conj gués à une conique qui est tangente à une droi donnée.

De même pour

Quatre couples de droites conjuguées et deux ta gentes;

Trois „ „ „ „ et trois tangente

Deux „ „ „ „ „ quatre „

Un couple „ „ „ „ cinq „

§. 29.

Par des raisonnements analogues à ceux du paragraphe on trouve

Pourque $x_0 y_0$ soit le foyer d'une conique tangen

droites $\lambda_1 x+\mu_1 y+1=0$, $\lambda_2 x+\mu_2 y+1=0$, $\lambda_3 x+\mu_3 y+1=0$, $x+\mu_4 y+1=0$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & x_0 & -y_0 & {y_0}^2-{x_0}^2 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 & -x_0 & 2x_0y_0 \\ {\lambda_1}^2 & \lambda_1\mu_1 & {\mu_1}^2 & \lambda_1 & \mu_1 & 1 \\ {\lambda_2}^2 & \lambda_2\mu_2 & {\mu_2}^2 & \lambda_2 & \mu_2 & 1 \\ {\lambda_3}^2 & \lambda_3\mu_3 & {\mu_3}^2 & \lambda_3 & \mu_3 & 1 \\ {\lambda_4}^2 & \lambda_4\mu_4 & {\mu_4}^2 & \lambda_4 & \mu_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De même pour

Un foyer et 4 couples de droites conjugués,
„ „ „ 3 „ „ „ „ et 1 tangente,
„ „ „ 2 „ „ „ „ „ 2 tangentes,
„ „ „ 1 couple „ „ „ „ 3 „
Deux foyers et 2 couples „ „ „
„ „ „ 1 couple „ „ „ et 1 tangente,
„ „ „ 2 tangentes.

§. 30.

En poursuivant les raisonnements du §. 15, on trouve

Pour que $x_0 y_0$ soit le centre d'une conique qui passe par les quatre points $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$, $x_4 y_4$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & y_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_0 & 2y_0 & 0 & 1 & 0 \\ {x_1}^2 & x_1y_1 & {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 & x_2y_2 & {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 & x_3y_3 & {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ {x_4}^2 & x_4y_4 & {y_4}^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De même pour

Le centre et 4 couples de points conjugués,
„ „ , un point de la courbe, et 3 couples de points conjugués,
„ „ , deux points de la courbe, et 2 couples de points conjugués,
„ „ , trois points de la courbe, et 1 couple de points conjugués.

§. 31.

Poursuivant les raisonnements du §. 20, on trouve

Pour que $\alpha_0\lambda + \beta_0\mu + \gamma_0\nu = 0$ soit le centre d'une conique tangente à quatre droites données $\lambda_1\mu_1\nu_1$, $\lambda_2\mu_2\nu_2$, $\lambda_3\mu_3\nu_3$, $\lambda_4\mu_4\nu_4$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\begin{vmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 & C & B & \alpha_0 \\ 0 & 2B & 0 & C & 0 & A & \beta_0 \\ 0 & 0 & 2C & B & A & 0 & \gamma_0 \\ \lambda_1^2 & \mu_1^2 & \nu_1^2 & \mu_1\nu_1 & \nu_1\lambda_1 & \lambda_1\mu_1 & 0 \\ \lambda_2^2 & \mu_2^2 & \nu_2^2 & \mu_2\nu_2 & \nu_2\lambda_2 & \lambda_2\mu_2 & 0 \\ \lambda_3^2 & \mu_3^2 & \nu_3^2 & \mu_3\nu_3 & \nu_3\lambda_3 & \lambda_3\mu_3 & 0 \\ \lambda_4^2 & \mu_4^2 & \nu_4^2 & \mu_4\nu_4 & \nu_4\lambda_4 & \lambda_4\mu_4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

De même pour

1°, Le centre et quatre couples de droites conjuguées;
2°, „ „ , trois „ „ „ „ et 1 tangente;
3°, „ „ , deux „ „ „ „ , 2 tangentes;
4°, „ „ , un couple „ „ „ , 3 „
5°, Une droite avec son pôle et 4 couples de droites conjuguées;
6°, Une droite avec son pôle, 3 couples de droites conjuguées et 1 tangente;
7°, Une droite avec son pôle, 2 couples de droites conjuguées et 2 tangentes;
8°, Une droite avec son pôle, 1 couple de droites conjuguées et 3 tangentes;
9°, Une droite avec son pôle et 4 tangentes;
10°, Deux droites avec leurs pôles et 1 tangente;
11°, „ „ „ „ „ et 1 couple de droites conjuguées.

Comme un foyer équivaut à deux tangentes, on peut, dans ce qui précède, remplacer 2 tangentes par 1 foyer.

§. 32.

En poursuivant les raisonnements du §. 22, on trouve:

Pourque x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, soient quatre points d'une circonférence de cercle, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

De même pour: Quatre couples de points conjugués, etc.

§. 33.

En poursuivant les raisonnements du §. 23, on trouve

Pour que x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5 soient cinq points d'une hyperbole équilatère, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IV.

§. 34.

Trouver l'équation de la surface du second degré qui passe par neuf points donnés.

Les neuf points soient x_1y_1, x_2y_2, ... x_9y_9; l'équation de la surface soit

$$ax^2+by^2+cz^2+2lyz+2mzx+2nxy+2px+2qy+2rz+d=0.$$

Pour que le premier point soit un point de la surface, il faut qu'on ait

$$ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2ly_1z_1+2mz_1x_1+2nx_1y_1+2px_1+2qy_1+2rz_1+d=0.$$

De même pour les autres points

$$\begin{aligned} ax_2^2+by_2^2+cz_2^2+2ly_2z_2 \ldots . &= 0 \\ ax_3^2+by_3^2+cz_3^2+2ly_3z_3 \ldots . &= 0 \\ ax_4^2+by_4^2+cz_4^2+2ly_4z_4 \ldots . &= 0 \\ ax_5^2+by_5^2+cz_5^2+2ly_5z_5 \ldots . &= 0 \end{aligned}$$

$$ax_6^2 + by_6^2 + cz_6^2 + 2ly_6z_6 \ldots = 0$$
$$ax_7^2 + by_7^2 + cz_7^2 + 2ly_7z_7 \ldots = 0$$
$$ax_8^2 + by_8^2 + cz_8^2 + 2ly_8z_8 \ldots = 0$$
$$ax_9^2 + by_9^2 + cz_9^2 + 2ly_9z_9 \ldots = 0.$$

Eliminant a, b, c, l, m, n, p, q, r, d, entre les dix équations précédentes, on trouve pour l'équation de la surface:

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & z_3x_3 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4z_4 & z_4x_4 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & z_5x_5 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_6 & z_6x_6 & x_6y_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \\ x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & y_7z_7 & z_7x_7 & x_7y_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \\ x_8^2 & y_8^2 & z_8^2 & y_8z_8 & z_8x_8 & x_8y_8 & x_8 & y_8 & z_8 & 1 \\ x_9^2 & y_9^2 & z_9^2 & y_9z_9 & z_9x_9 & x_9y_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 35.

Déterminer si les points d'intersection d'une droite donnée et d'une surface du second degré qui passe par 9 points donnés, sont réels et distincts, coïncidents, ou imaginaires.

Exprimons la condition qui exprime que les points d'intersection coïncident. La même fonction qui, égalé à zéro, exprime que les points coïncident, dans le cas où elle n'est pas zéro, indiquera par son signe si les points d'intersection sont réels ou imaginaires.

La droite donnée soit

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Pour qu'une même surface du second degré passe par les neuf points donnés, et qu'elle soit tangente à la droite donnée, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un système de valeurs de a, b, c, l, m, n, p, q, r, d qui vérifient les équations

$$ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2ly_1z_1+2mz_1x_1+2nx_1y_1+2px_1+2qy_1+2rz_1+d = 0$$
$$ax_2^2+by_2^2+cz_2^2+2ly_2z_2+2mz_2x_2+2nx_2y_2+2px_2+2qy_2+2rz_2+d = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$ax_9^2+by_9^2+cz_9^2+2ly_9z_9+2mz_9x_9+2nx_9y_9+2px_9+2qy_9+2rz_9+d = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & n & m & p & A_1 & A_2 \\ n & b & l & q & B_1 & B_2 \\ m & l & c & r & C_1 & C_2 \\ p & q & r & d & D_1 & D_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & & \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & & \end{vmatrix} = 0.$$

Quand on pose $B_1C_2 - B_2C_1 = a_1$, $C_1A_2 - C_2A_1 = b_1$, $A_1B_2 - A_2B_1 = c_1$, $A_1D_2 - A_2D_1 = f_1$, $B_1D_2 - B_2D_1 = g_1$, $C_1D_2 - C_2D_1 = h_1$, l'équation précédente peut s'écrire:

$$\begin{aligned}&(ab - n^2)h_1^2 + (ac - m^2)g_1^2 + (ad - p^2)a_1^2 + (bc - l^2)f_1^2 \\ &+ (bd - q^2)b_1^2 + (cd - r^2)c_1^2 + 2(mn - al)g_1h_1 \\ &+ 2(pn - aq)a_1h_1 + 2(pm - ar)a_1g_1 + 2(nq - pb)b_1h_1 \\ &+ 2(nl - bm)f_1h_1 + \text{etc.} = 0.\end{aligned}$$

D'après le paragraphe 1, on peut écrire la résultante de cette équation quadratique et des équations linéaires précédentes dans la forme d'un déterminant.

§. 36.

Déterminer l'équation de la surface du second degré qui est conjuguée à neuf couples de points donnés.

Les neuf couples de points soient

$$x_1\ y_1\ z_1 \text{ et } x_2\ y_2\ z_2;$$
$$x_3\ y_3\ z_3 \text{ et } x_4\ y_4\ z_4; \text{ etc.}$$

Prenons pour l'équation de la surface

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + \ldots = 0.$$

Pour que les points 1 et 2 soient conjugués à cette surface, il faut qu'on ait

$$\begin{aligned}&ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 + l(y_1z_2 + y_2z_1) + m(z_1x_2 + z_2x_1) \\ &+ n(x_1y_2 + x_2y_1) + p(x_1 + x_2) + q(y_1 + y_2) + r(z_1 + z_2) + d = 0.\end{aligned}$$

De même pour les autres couples de points on a

$$ax_3x_4 + by_3y_4 + cz_3z_4 + l(y_3z_4 + y_4z_3) + \ldots = 0.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Eliminant a, b, c, l, m, n, p, q, r, d entre toutes ces équations, on trouve pour l'équation cherchée:

x^2	y^2	z^2	$2yz$	$2zx$	$2xy$	$2x$	$2y$	$2z$	1
x_1x_2	y_1y_2	z_1z_2	$y_1z_2+y_2z_1$	$z_1x_2+z_2x_1$	$x_1y_2+x_2y_1$	x_1+x_2	y_1+y_2	z_1+z_2	1
x_3x_4	y_3y_4	z_3z_4	$y_3z_4+y_4z_3$	$z_3x_4+z_4x_3$	$x_3y_4+x_4y_3$	x_3+x_4	y_3+y_4	z_3+z_4	1
. . . . .									
$x_{17}x_{18}$	$y_{17}y_{18}$	$z_{17}z_{18}$	$y_{17}z_{18}+y_{18}z_{17}$	$z_{17}x_{18}+z_{18}x_{17}$	$x_{17}y_{18}+x_{18}y_{17}$	$x_{17}+x_{18}$	$y_{17}+y_{18}$	$z_{17}+z_{18}$	1

De même pour des coordonnées quadriplanaires.

§. 37.

Poursuivant les raisonnements précédents, on trouve forme d'un déterminant égalé à zéro l'équation d'une su second degré dont on a donné

1°. huit points et un couple de points conjugués.
2°. sept „ „ deux couples „ „ „
3°. six „ „ trois „ „ „ „
4°. cinq „ „ quatre „ „ „ „
5°. quatre „ „ cinq „ „ „ „
6°. trois „ „ six „ „ „ „
7°. deux „ „ sept „ „ „ „
8°. un point „ huit „ „ „ „

§ 38.

Déterminer l'équation planaire de la surface du second degré dont neuf plans tangents sont donnés.

Les plans tangents soient $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1\ \varrho_1$, $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2\ \varrho_2$, $\lambda_3\ \mu_3\ \nu_3\ \varrho_3$, etc.

Prenons pour l'équation tangentielle de la surface $a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+2\varrho^2+2l\mu\nu+2m\nu\lambda+2n\lambda\mu+2p\lambda\varrho+2q\mu\varrho+2r\nu\varrho=0$.

Pour que les neuf plans donnés soient tangents à la surface, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$a\lambda_1^2+b\mu_1^2+c\nu_1^2+d\varrho_1^2+2l\mu_1\nu_1+2m\nu_1\lambda_1+2n\lambda_1\mu_1+2p\lambda_1\varrho_1+2q\mu_1\varrho_1+2r\nu_1\varrho_1=0,$$

$$a\lambda_2^2+b\mu_2^2+c\nu_2^2+d\varrho_2^2+2l\mu_2\nu_2+2m\nu_2\lambda_2+2n\lambda_2\mu_2+2p\lambda_2\varrho_2+2q\mu_2\varrho_2+2r\nu_2\varrho_2=0,$$

. . . . . .

$$a\lambda_9^2+b\mu_9^2+c\nu_9^2+d\varrho_9^2+2l\mu_9\nu_9+2m\nu_9\lambda_9+2n\lambda_9\mu_9+2p\lambda_9\varrho_9+2q\mu_9\varrho_9+2r\nu_9\varrho_9=0.$$

Éliminant a, b, c, d, l, m, n, p, q, r entre les dix équations précédentes, on trouve pour l'équation planaire de la surface.

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 & \varrho^2 & \mu\nu & \nu\lambda & \lambda\mu & \lambda\varrho & \mu\varrho & \nu\varrho \\ \lambda_1^2 & \mu_1^2 & \nu_1^2 & \varrho_1^2 & \mu_1\nu_1 & \nu_1\lambda_1 & \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\varrho_1 & \mu_1\varrho_1 & \nu_1\varrho_1 \\ \lambda_2^2 & \mu_2^2 & \nu_2^2 & \varrho_2^2 & \mu_2\nu_2 & \nu_2\lambda_2 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\varrho_2 & \mu_2\varrho_2 & \nu_2\varrho_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_9^2 & \mu_9^2 & \nu_9^2 & \varrho_9^2 & \mu_9\nu_9 & \nu_9\lambda_9 & \lambda_9\mu_9 & \lambda_9\varrho_9 & \mu_9\varrho_9 & \nu_9\varrho_9 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 39.

Des raisonnements analogues à ceux du paragraphe précédent nous donnent dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, l'équation planaire d'une surface du second degré dont on a donné

1°. Neuf couples de plans conjugués.
2°. Huit „ „ „ „ et un plan tangent.

3°.	Sept	couples	de	plans	conjugués	et	deux	plans	tangents.
4°.	Six	„	„	„	„	„	trois	„	„
5°.	Cinq	„	„	„	„	„	quatre	„	„
6°.	Quatre	„	„	„	„	„	cinq	„	„
7°.	Trois	„	„	„	„	„	six	„	„
8°.	Deux	„	„	„	„	„	sept	„	„
9°.	Un	couple	„	„	„	„	huit	„	„

§. 40.

Déterminer l'équation de la surface du second degré dont le centre et six points sont donnés.

Coordonnées ordinaires.

Le centre soit $x_0\ y_0\ z_0$; les six points de la surface soient $x_1\ y_1\ z_1$, $x_2\ y_2\ z_2$, $x_3\ y_3\ z_3$, $x_4\ y_4\ z_4$, $x_5\ y_5\ z_5$, $x_6\ y_6\ z_6$. Prenons pour l'équation de la surface

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy + 2px + 2qy + 2rz + d = 0.$$

Que le point $x_0\ y_0\ z_0$ est le centre de la surface, s'exprime par

$$\begin{aligned} 2ax_0 + 2mz_0 + 2ny_0 + 2p &= 0 \\ 2by_0 + 2lz_0 + 2nx_0 + 2q &= 0 \\ 2cz_0 + 2ly_0 + 2mx_0 + 2r &= 0. \end{aligned}$$

Que la surface passe par les six points donnés, s'exprime par

$$\begin{aligned} &ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + 2ly_1z_1 + 2mz_1x_1 + 2nx_1y_1 + 2px_1 + 2qy_1 + 2rz_1 + d = 0 \\ &ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2 + 2ly_2z_2 + 2mz_2x_2 + 2nx_2y_2 + 2px_2 + 2qy_2 + 2rz_2 + d = 0 \\ &\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &ax_6^2 + by_6^2 + cz_6^2 + 2ly_6z_6 + 2mz_6x_6 + 2nx_6y_6 + 2px_6 + 2qy_6 + 2rz_6 + d = 0. \end{aligned}$$

Éliminant $a, b, c, l, m, n, p, q, r, d$ entre toutes les équations précédentes, on trouve pour l'équation de la surface

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy & x & y & z & 1 \\ 2x_0 & 0 & 0 & 0 & z_0 & y_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y_0 & 0 & z_0 & 0 & x_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_0 & y_0 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & y_6z_6 & z_6x_6 & x_6y_6 & x_6 & y_6 & z_6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Coordonnées quadriplanaires.

Le centre soit $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0\ \delta_0$; les six points de la surface soient $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1$, $\alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \delta_2$, etc.....; le plan à distance infinie soit

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0.$$

Le centre étant le pôle du plan à distance infinie, que $\alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0\ \delta_0$ est le centre de la surface

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta + 2p\alpha\delta + 2q\beta\delta + 2r\gamma\delta = 0$$

s'exprime par

$$\begin{aligned} 2a\alpha_0 + 2m\gamma_0 + 2n\beta_0 + 2p\delta_0 &= \varepsilon A, \\ 2b\beta_0 + 2l\gamma_0 + 2n\alpha_0 + 2q\delta_0 &= \varepsilon B, \\ 2c\gamma_0 + 2l\beta_0 + 2m\alpha_0 + 2r\delta_0 &= \varepsilon C, \\ 2d\delta_0 + 2p\alpha_0 + 2q\beta_0 + 2r\gamma_0 &= \varepsilon D. \end{aligned}$$

Que la surface passe par les six points donnés, s'exprime par

$$a\alpha_1^2 + b\beta_1^2 + c\gamma_1^2 + d\delta_1^2 + 2l\beta_1\gamma_1 + 2m\gamma_1\alpha_1 + 2n\alpha_1\beta_1 + 2p\alpha_1\delta_1 + 2q\beta_1\delta_1 + 2r\gamma_1\delta_1 = 0,$$

$$a\alpha_2^2 + b\beta_2^2 + c\gamma_2^2 + d\delta_2^2 + 2l\beta_2\gamma_2 + 2m\gamma_2\alpha_2 + 2n\alpha_2\beta_2 + 2p\alpha_2\delta_2 + 2q\beta_2\delta_2 + 2r\gamma_2\delta_2 = 0,$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a\alpha_6^2 + b\beta_6^2 + c\gamma_6^2 + d\delta_6^2 + 2l\beta_6\gamma_6 + 2m\gamma_6\alpha_6 + 2n\alpha_6\beta_6 + 2p\alpha_6\delta_6 + 2q\beta_6\delta_6 + 2r\gamma_6\delta_6 = 0.$$

Eliminant a, b, c, d, l, m, n, p, q, r, ε entre toutes les équations précédentes, on trouve pour l'équation de la surface

$$\begin{vmatrix}
\alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta & \alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta & 0 \\
2\alpha_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_0 & \beta_0 & \delta_0 & 0 & 0 & A \\
0 & 2\beta_0 & 0 & 0 & \gamma_0 & 0 & \alpha_0 & 0 & \delta_0 & 0 & B \\
0 & 0 & 2\gamma_0 & 0 & \beta_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \delta_0 & C \\
0 & 0 & 0 & 2\delta_0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & D \\
\alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \delta_1^2 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\delta_1 & \beta_1\delta_1 & \gamma_1\delta_1 & 0 \\
\alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \delta_2^2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2\alpha_2 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\delta_2 & \beta_2\delta_2 & \gamma_2\delta_2 & 0 \\
\alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \delta_3^2 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3\alpha_3 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_3\delta_3 & \beta_3\delta_3 & \gamma_3\delta_3 & 0 \\
\alpha_4^2 & \beta_4^2 & \gamma_4^2 & \delta_4^2 & \beta_4\gamma_4 & \gamma_4\alpha_4 & \alpha_4\beta_4 & \alpha_4\delta_4 & \beta_4\delta_4 & \gamma_4\delta_4 & 0 \\
\alpha_5^2 & \beta_5^2 & \gamma_5^2 & \delta_5^2 & \beta_5\gamma_5 & \gamma_5\alpha_5 & \alpha_5\beta_5 & \alpha_5\delta_5 & \beta_5\delta_5 & \gamma_5\delta_5 & 0 \\
\alpha_6^2 & \beta_6^2 & \gamma_6^2 & \delta_6^2 & \beta_6\gamma_6 & \gamma_6\alpha_6 & \alpha_6\beta_6 & \alpha_6\delta_6 & \beta_6\delta_6 & \gamma_6\delta_6 & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Au lieu du centre on pourrait donner un plan et son pôle.

§. 41.

Des raisonnements tout à-fait analogues à ceux du paragraphe précédent nous apprennent qu'on peut écrire dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, l'équation d'une surface du second degré dont on a donné, outre le centre,

1e Six couples de points conjugués;
2e Cinq „ „ „ „ et un point de la surface;
3e Quatre „ „ „ „ „ deux points „ „ „
4e Trois „ „ „ „ „ trois „ „ „ „
5e Deux „ „ „ „ „ quatre „ „ „ „
6e Un couple „ „ „ „ cinq „ „ „ „

Au lieu du centre on peut donner un plan avec son pôle.

La surface peut encore être déterminée par deux plans et leurs pôles, avec trois points de la surface ou avec trois couples de points conjugués.

§. 42.

Equation planaire de la surface du second degré qui a pour centre un point donné, et qui est tangente à six plans donnés.

Le centre soit $\alpha_0\lambda + \beta_0\mu + \gamma_0\nu + \delta_0\varrho = 0$; le plan à distance infinie soit A, B, C, D; les six plans données soient $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1\ \varrho_1$, etc. Pour que la surface

$$a\lambda^2 + b\mu^2 + c\nu^2 + d\varrho^2 + 2l\mu\nu + 2m\nu\lambda + 2n\lambda\mu + 2p\lambda\varrho + 2q\mu\varrho + 2r\nu\varrho = 0$$

ait pour centre le point donné, il faut qu'on ait

$$\begin{aligned} 2aA + 2mC + 2nB + 2pD &= \varepsilon\alpha_0 \\ 2bB + 2lC + 2nA + 2qD &= \varepsilon\beta_0 \\ 2cC + 2lB + 2mA + 2rD &= \varepsilon\gamma_0 \\ 2dD + 2pA + 2qB + 2rC &= \varepsilon\delta_0. \end{aligned}$$

Que la surface est tangente aux six plans donnés, s'exprime par

$$a\lambda_1^2 + b\mu_1^2 + c\nu_1^2 + d\varrho_1^2 + 2l\mu_1\nu_1 + 2m\nu_1\lambda_1 + 2n\lambda_1\mu_1 + 2p\lambda_1\varrho_1 + 2q\mu_1\varrho_1 + 2r\nu_1\varrho_1 = 0,$$

. . . . . .

$$a\lambda_6^2 + b\mu_6^2 + c\nu_6^2 + d\varrho_6^2 + 2l\mu_6\nu_6 + 2m\nu_6\lambda_6 + 2n\lambda_6\mu_6 + 2p\lambda_6\varrho_6 + 2q\mu_6\varrho_6 + 2r\nu_6\varrho_6 = 0.$$

Eliminant $a, b, c, d, l, m, n, p, q, r, \varepsilon$ entre les dix équations précédentes, on trouve pour l'équation de la surface

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 & \varrho^2 & \mu\nu & \nu\lambda & \lambda\mu & \lambda\varrho & \mu\varrho & \nu\varrho & 0 \\ 2A & 0 & 0 & 0 & 0 & C & B & D & 0 & 0 & \alpha_0 \\ 0 & 2B & 0 & 0 & C & 0 & A & 0 & D & 0 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 2C & 0 & B & A & 0 & 0 & 0 & D & \gamma_0 \\ 0 & 0 & 0 & 2D & 0 & 0 & 0 & A & B & C & \delta_0 \\ \lambda_1^2 & \mu_1^2 & \nu_1^2 & \varrho_1^2 & \mu_1\nu_1 & \nu_1\lambda_1 & \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\varrho_1 & \mu_1\varrho_1 & \nu_1\varrho_1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_6^2 & \mu_6^2 & \nu_6^2 & \varrho_6^2 & \mu_6\nu_6 & \nu_6\lambda_6 & \lambda_6\mu_6 & \lambda_6\varrho_6 & \mu_6\varrho_6 & \nu_6\varrho_6 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

De la même manière on trouve dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, l'équation d'une surface du second degré dont on a donné

1°, Le centre et six couples de plans conjugués;
2°, „ „ , cinq „ „ „ „ et un plan tangent;
3°, „ „ , quatre „ „ „ „ , deux plans tangents;
4°, „ „ , 3 „ „ „ „ , 3 „ „
5°, „ „ , 2 „ „ „ „ , 4 „ „
6°, „ „ , 1 couple „ „ „ , 5 „ „

On peut remplacer le centre par un plan quelconque et le pôle de ce plan

Aussi, la surface peut être déterminée par deux plans avec leurs pôles et trois plans tangents ou trois couples de plans tangents.

§. 43.

Equation de la sphère qui passe par quatre points donnés.

Coordonnées quadriplanaires.

La surface du second degré

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + 2l\beta\gamma + 2m\gamma\alpha + 2n\alpha\beta + 2p\alpha\delta + 2q\beta\delta + 2r\gamma\delta = 0$$

est une sphère, quand on a (voir Salmon, art. 221)

$$\frac{bp_2^2 + cp_3^2 - 2lp_2p_3}{BC^2} = \frac{cp_3^2 + ap_1^2 - 2mp_3p_1}{CA^2}$$
$$= \frac{ap_1^2 + bp_2^2 - 2np_1p_2}{AB^2} = \frac{ap_1^2 + dp_4^2 - 2pp_1p_4}{AD^2}$$
$$= \frac{bp_2^2 + dp_4^2 - 2qp_2p_4}{BD^2} = \frac{cp_3^2 + dp_4^2 - 2rp_3p_4}{CD^2},$$

où BC, CA, AB, AD, BD, CD sont les arêtes du tétraèdre de référence, et p_1, p_2, p_3, p_4 les perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D sur les faces opposées du tétraèdre.

Les équations précédentes peuvent s'écrire à l'aide d'une autre inconnue x

$$\begin{aligned}
bp_2^2 + cp_3^2 - 2lp_2p_3 &= x.BC^2\\
cp_3^2 + ap_1^2 - 2mp_3p_1 &= x.CA^2\\
ap_1^2 + bp_2^2 - 2np_1p_2 &= x.AB^2\\
ap_1^2 + dp_4^2 - 2pp_1p_4 &= x.AD^2\\
bp_2^2 + dp_4^2 - 2qp_2p_4 &= x.BD^2\\
cp_3^2 + dp_4^2 - 2rp_3p_4 &= x.CD^2.
\end{aligned}$$

Que la surface du second degré passe par les 4 points

$$\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1,\quad \alpha_2\ \beta_2\ \gamma_2\ \delta_2,\quad \alpha_3\ \beta_3\ \gamma_3\ \delta_3,\quad \alpha_4\ \beta_4\ \gamma_4\ \delta_4,$$

s'exprime par

$$a\alpha_1^2+b\beta_1^2+c\gamma_1^2+d\delta_1^2+2l\beta_1\gamma_1+2m\gamma_1\alpha_1+2n\alpha_1\beta_1+2p\alpha_1\delta_1+2q\beta_1\delta_1+2r\gamma_1\delta_1 = 0$$

$$a\alpha_2^2+b\beta_2^2+c\gamma_2^2+d\delta_2^2+2l\beta_2\gamma_2+\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$a\alpha_3^2+b\beta_3^2+c\gamma_3^2+d\delta_3^2+2l\beta_3\gamma_3+\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$a\alpha_4^2+b\beta_4^2+c\gamma_4^2+d\delta_4^2+2l\beta_4\gamma_4+\ldots\ldots\ldots\ldots = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Eliminant $a, b, c, d, l, m, n, p, q, r, x$ entre les dix équations précédentes et la première équation de ce §, on trouve pour l'équation de la sphère:

$$\begin{vmatrix}
\alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 & \beta\gamma & \gamma\alpha & \alpha\beta & \alpha\delta & \beta\delta & \gamma\delta & .\\
\alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & \delta_1^2 & \beta_1\gamma_1 & \gamma_1\alpha_1 & \alpha_1\beta_1 & \alpha_1\delta_1 & \beta_1\delta_1 & \gamma_1\delta_1 & .\\
\alpha_2^2 & \beta_2^2 & \gamma_2^2 & \delta_2^2 & \beta_2\gamma_2 & \gamma_2\alpha_2 & \alpha_2\beta_2 & \alpha_2\delta_2 & \beta_2\delta_2 & \gamma_2\delta_2 & .\\
\alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 & \delta_3^2 & \beta_3\gamma_3 & \gamma_3\alpha_3 & \alpha_3\beta_3 & \alpha_3\delta_3 & \beta_3\delta_3 & \gamma_3\delta_3 & .\\
\alpha_4^2 & \beta_4^2 & \gamma_4^2 & \delta_4^2 & \beta_4\gamma_4 & \gamma_4\alpha_4 & \alpha_4\beta_4 & \alpha_4\delta_4 & \beta_4\delta_4 & \gamma_4\delta_4 & .\\
. & p_2^2 & p_3^2 & . & -p_2p_3 & . & . & . & . & . & BC^2\\
p_1^2 & . & p_3^2 & . & . & -p_3p_1 & . & . & . & . & CA^2\\
p_1^2 & p_2^2 & . & . & . & . & -p_1p_2 & . & . & . & AB^2\\
p_1^2 & . & . & p_4^2 & . & . & . & -p_1p_4 & . & . & AD^2\\
. & p_2^2 & . & p_4^2 & . & . & . & . & -p_2p_5 & . & BD^2\\
. & . & p_3^2 & p_4^2 & . & . & . & . & . & -p_3p_4 & CD^2
\end{vmatrix} = 0.$$

Coordonnées ordinaires rectangles.

L'équation de la sphère soit

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0.$$

Les quatre points soient $x_1\ y_1\ z_1$, etc. Pour que la sphère passe par ces points, il faut qu'on ait

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2+2ax_1+2by_1+2cz_1+d=0$$
$$x_2^2+y_2^2+z_2^2+2ax_2+2by_2+2cz_2+d=0$$
$$x_3^2+y_3^2+z_3^2+2ax_3+2by_3+2cz_3+d=0$$
$$x_4^2+y_4^2+z_4^2+2ax_4+2by_4+2cz_4+d=0$$

Eliminant a, b, c, d, entre les cinq équations précédentes, on trouve pour l'équation de la sphère

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarques. 1. Pour un système de coordonnées obliques on doit remplacer $x^2+y^2+z^2$ par

$$x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma,$$

où α, β et γ sont les angles entre les axes de coordonnées. De même pour $x_1^2+y_1^2+z_1^2$, $x_2^2+y_2^2+z_2^2$, $x_3^2+y_3^2+z_3^2$, $x_4^2+y_4^2+z_4^2$.

2. On peut de même écrire dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, l'équation de la surface d'une sphère dont on a donné

1°. Quatre couples de points conjugués.
2°. Trois „ „ „ „ et un point.
3°. Deux „ „ „ „ „ deux points.
4°. Un couple „ „ „ „ trois „
5°. Le centre et un point.
6°. Le centre et un couple de points conjugués.

§. 44.

Déterminer l'équation du cône qui a pour sommet un point donné, et qui passe par cinq points donnés.

Coordonnées ordinaires.

Le sommet soit $x_0\ y_0\ z_0$; les cinq points de la surface soient $x_1\ y_1\ z_1$, etc. Pour que $x_0\ y_0\ z_0$ soit le sommet de la surface

$$ax^2+by^2+cz^2+2lyz+2mzx+2nxy+2px+2qy+2rz+d=0,$$

il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$2ax_0+2mz_0+2ny_0+2p=0$$
$$2by_0+2lz_0+2mx_0+2q=0$$
$$2cz_0+2ly_0+2mx_0+2r=0$$
$$2px_0+2qy_0+2rz_0+2d=0.$$

Pour que la surface passe par les points $x_1\ y_1\ z_1$, etc. il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$ax_1^2+by_1^2+cz_1^2+2ly_1z_1+2mz_1x_1+2nx_1y_1+2px_1+2qy_1+2rz_1+d=0$$

etc.

Éliminant $a, b, c, l, m, n, p, q, r, d$ entre toutes ces équations, on trouve pour l'équation du cône

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & z_3x_3 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4z_4 & z_4x_4 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & y_5z_5 & z_5x_5 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \\ 2x_0 & . & . & . & z_0 & y_0 & 1 & . & . & . \\ . & 2y_0 & . & z_0 & . & x_0 & . & 1 & . & . \\ . & . & 2z_0 & y_0 & x_0 & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & . & . & . & x_0 & y_0 & z_0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

De même, pour des coordonnées quadriplanaires.

Des raisonnements tout-à-fait analogues aux précédents, nous donnent dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, l'équation d'un cône dont on a donné, outre le centre,

1°. Cinq couples de points conjugués.
2°. Quatre „ „ „ „ et un point.
3°. Trois „ „ „ „ „ deux points.
4°. Deux „ „ „ „ „ trois „
5°. Un couple „ „ „ „ quatre „

§. 45.

Déterminer l'équation planaire de la conique qui doit être située dans un plan donné et qui est tangente à cinq plans donnés.

Le plan de la conique soit $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \varrho_0$; les cinq plans tangents soient $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1$, $\lambda_2\ \mu_2\ \nu_2$, $\lambda_3\ \mu_3\ \nu_3$, $\lambda_4\ \mu_4\ \nu_4$, $\lambda_5\ \mu_5\ \nu_5$.

Pour que la surface

$$a\lambda^2+b\mu^2+c\nu^2+d\varrho^2+2l\mu\nu+2m\nu\lambda+2n\lambda\mu+2p\lambda\varrho+2q\mu\varrho+2r\nu\varrho=0$$

soit une conique située dans le plan $\lambda_0\ \mu_0\ \nu_0\ \varrho_0$, il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$\begin{aligned}
2a\lambda_0+2m\nu_0+2n\mu_0+2p\varrho_0&=0\\
2b\mu_0+2l\nu_0+2m\lambda_0+2q\varrho_0&=0\\
2c\nu_0+2l\mu_0+2m\lambda_0+2r\varrho_0&=0\\
2p\lambda_0+2q\mu_0+2r\nu_0+2d\varrho_0&=0.
\end{aligned}$$

Que la surface est tangente aux plans $\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1\ \varrho_1$ etc. s'exprime par

$$a\lambda_1^2+b\mu_1^2+c\nu_1^2+d\varrho_1^2+2l\mu_1\nu_1+2m\nu_1\lambda_1+2n\lambda_1\mu_1+2p\lambda_1\varrho_1+2q\mu_1\varrho_1+2r\nu_1\varrho_1=0 \text{ etc. etc.}$$

Eliminant $a, b, c, d, l, m, n, p, q, r$ entre toutes ces équations, on trouve pour l'équation de la conique

$$\begin{vmatrix}
\lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 & \varrho^2 & \mu\nu & \nu\lambda & \lambda\mu & \lambda\varrho & \mu\varrho & \nu\varrho\\
\lambda_1^2 & \mu_1^2 & \nu_1^2 & \varrho_1^2 & \mu_1\nu_1 & \nu_1\lambda_1 & \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\varrho_1 & \mu_1\varrho_1 & \nu_1\varrho_1\\
\lambda_2^2 & \mu_2^2 & \nu_2^2 & \varrho_2^2 & \mu_2\nu_2 & \nu_2\lambda_2 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\varrho_2 & \mu_2\varrho_2 & \nu_2\varrho_2\\
\lambda_3^2 & \mu_3^2 & \nu_3^2 & \varrho_3^2 & \mu_3\nu_3 & \nu_3\lambda_3 & \lambda_3\mu_3 & \lambda_3\varrho_3 & \mu_3\varrho_3 & \nu_3\varrho_3\\
\lambda_4^2 & \mu_4^2 & \nu_4^2 & \varrho_4^2 & \mu_4\nu_4 & \nu_4\lambda_4 & \lambda_4\mu_4 & \lambda_4\varrho_4 & \mu_4\varrho_4 & \nu_4\varrho_4\\
\lambda_5^2 & \mu_5^2 & \nu_5^2 & \varrho_5^2 & \mu_5\nu_5 & \nu_5\lambda_5 & \lambda_5\mu_5 & \lambda_5\varrho_5 & \mu_5\varrho_5 & \nu_5\varrho_5\\
2\lambda_0 & . & . & . & . & \nu_0 & \mu_0 & \varrho_0 & . & .\\
. & 2\mu_0 & . & . & \nu_0 & . & \lambda_0 & . & \varrho_0 & .\\
. & . & 2\nu_0 & . & \mu_0 & \lambda_0 & . & . & . & \varrho_0\\
. & . & . & 2\varrho_0 & . & . & . & \lambda_0 & \mu_0 & \nu_0
\end{vmatrix}=0.$$

Les raisonnements précédents peuvent encore s'appliquer, quand un ou plusieurs des plans tangents sont remplacés par autant de couples de plans conjugués.

§. 46.

D'après tout ce qui a été dit dans III, on peut écrire dans la forme d'un déterminant égalé à zéro, l'équation d'une surface du second degré, toutes les fois que cette surface est parfaitement déterminée par un nombre suffisant des données suivantes:

un point,
un couple de points conjugués,
un plan tangent,
un couple de plans conjugués,
le centre,
un plan avec son pôle,
un point double.

V.

§. 47.

Poursuivant les raisonnements du §. 34, on trouve

Pour que dix points soient situés dans une même surface du second degré, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & y_2z_2 & z_2x_2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & y_3z_3 & z_3x_3 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & y_4z_4 & z_4x_4 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{10}^2 & y_{10}^2 & z_{10}^2 & y_{10}z_{10} & z_{10}x_{10} & x_{10}y_{10} & x_{10} & y_{10} & z_{10} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

On peut remplacer un nombre quelconque de ces points par autant de couples de points conjugués, comme dans les paragraphes 32 et 33.

§. 48.

Poursuivant les raisonnements du §. 38 on trouve

Pour que dix plans soient tangents à une même surface du second degré, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^2 & \mu_1^2 & \nu_1^2 & \varrho_1^2 & \mu_1\nu_1 & \mu_1\lambda_1 & \lambda_1\mu_1 & \lambda_1\varrho_1 & \mu_1\varrho_1 & \nu_1\varrho_1 \\ \lambda_2^2 & \mu_2^2 & \nu_2^2 & \varrho_2^2 & \mu_2\nu_2 & \mu_2\lambda_2 & \lambda_2\mu_2 & \lambda_2\varrho_2 & \mu_2\varrho_2 & \nu_2\varrho_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{10}^2 & \mu_{10}^2 & \nu_{10}^2 & \varrho_{10}^2 & \mu_{10}\nu_{10} & \mu_{10}\lambda_{10} & \lambda_{10}\mu_{10} & \lambda_{10}\varrho_{10} & \mu_{10}\varrho_{10} & \nu_{10}\varrho_{10} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut remplacer un nombre quelconque de ces plans tangents par autant de couples de plans conjugués, comme dans le §. 39.

§. 49.

Poursuivant les raisonnements du §. 40 on trouve

Pour que sept points soient situés dans une surface du second degré qui a pour centre le point $x_0\ y_0\ z_0$, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & 0 & 0 & 0 & z_0 & y_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2y_0 & 0 & z_0 & 0 & x_0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z_0 & y_0 & x_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & y_1z_1 & z_1x_1 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_7^2 & y_7^2 & z_7^2 & y_7z_7 & z_7x_7 & x_7y_7 & x_7 & y_7 & z_7 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Pour des coordonnées quadriplanaires on obtient un déterminant qui correspond au second déterminant du §. 40, comme le précédent correspond au premier déterminant de ce §.

On peut remplacer un nombre quelconque des sept points par autant de couples de points conjugués.

On peut continuer d'une manière analogue pour les paragraphes 42, 43, 44 et 45.

§. 50.

Déterminer les conditions qui expriment que quatre droites soient situées dans une même surface du second degré.

Les quatre droites soient

$$\begin{aligned} &p_1\alpha + q_1\beta + r_1\gamma + s_1\delta = 0, \quad p_2\alpha + q_2\beta + r_2\gamma + s_2\delta = 0; \\ &p_3\alpha + q_3\beta + r_3\gamma + s_3\delta = 0, \quad p_4\alpha + q_4\beta + r_4\gamma + s_4\delta = 0; \\ &p_5\alpha + q_5\beta + r_5\gamma + s_5\delta = 0, \quad p_6\alpha + q_6\beta + r_6\gamma + s_6\delta = 0; \\ &p_7\alpha + q_7\beta + r_7\gamma + s_7\delta = 0, \quad p_8\alpha + q_8\beta + r_8\gamma + s_8\delta = 0. \end{aligned}$$

Une droite quelconque

$$A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0, \quad A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma + D_1\delta = 0$$

qui rencontre 3 des quatre droites, doit rencontrer la quatrième. Que la droite quelconque rencontre les quatre droites, s'exprime par quatre équations

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ E & F & G & H \\ p_1 & q_1 & r_1 & s_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ etc.}$$

ou par les quatre équations

$$(AF-BE)(r_1s_2-r_2s_1)+(AG-CE)(s_1q_2-s_2q_1)$$
$$+(AH-DE)(q_1r_2-q_2r_1)+(BG-CF)(p_1s_2-p_2s_1)$$
$$+(BH-DF)(r_1p_2-r_2p_1)+(CH-DG)(p_1q_2-p_2q_1)=0.$$
$$(AF-BE)(r_3s_4-r_4s_3)+(AG-CE)(s_3q_4-s_4q_3)+\ldots\ldots=0$$
$$(AF-BE)(r_5s_6-r_6s_5)+(AG-CE)(s_5q_6-s_6q_5)+\ldots\ldots=0$$
$$(AF-BE)(r_7s_8-r_8s_7)+(AG-CE)(s_7q_8-s_8q_7)+\ldots\ldots=0$$

Pour que les quatre droites soient situées dans une même surface du second degré, il est nécessaire et suffisant que ces quatre équations puissent se réduire à trois, ce qui s'exprime par

$$\begin{vmatrix} r_1s_2-r_2s_1 & s_1q_2-s_2q_1 & q_1r_2-q_2r_1 & p_1s_2-p_2s_1 & r_1p_2-r_2p_1 & p_1q_2-p_2q_1 \\ r_3s_4-r_4s_3 & s_3q_4-s_4q_3 & q_3r_4-q_4r_3 & p_3s_4-p_4s_3 & r_3p_4-r_4p_3 & p_3q_4-p_4q_3 \\ r_5s_6-r_6s_5 & s_5q_6-s_6q_5 & q_5r_6-q_6r_5 & p_5s_6-p_6s_5 & r_5p_6-r_6p_5 & p_5q_6-p_6q_5 \\ r_7s_8-r_8s_7 & s_7q_8-s_8q_7 & q_7r_8-q_8r_7 & p_7s_8-p_8s_7 & r_7p_8-r_8p_7 & p_7q_8-p_8q_7 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 51.

Déterminer la condition qui exprime qu'une droite donnée soit tangente à la surface du second degré qui passe par trois autres droites données.

La surface du second degré qui passe par les trois droites, coupera l'autre droite en deux points. Quand ces deux points sont réels, il y passe par chacun de ces points une génératrice de la surface qui coupe les trois droites données; dans ce cas il y a donc deux droites qui rencontrent les 4 droites données. Ces deux droites coïncident, quand les deux points d'intersection coïncident, c'est-à-dire, quand la droite est tangente à la surface. Ces deux droites sont imaginaires, quand les points d'intersection sont imaginaires.

La condition cherchée est donc identique avec la condition qui exprime, que les deux droites qui rencontrent les quatre droites données, coïncident.

Les quatres droites données soient

$$A_1\alpha+B_1\beta+C_1\gamma+D_1\delta=0,\quad A_2\alpha+B_2\beta+C_2\gamma+D_2\delta=0;$$
$$A_3\alpha+B_3\beta+C_3\gamma+D_3\delta=0,\quad \text{etc.}\ldots$$
$$\text{etc.}\ldots$$

La droite
$$P_1\alpha+Q_1\beta+R_1\gamma+S_1\delta=0,$$
$$P_2\alpha+Q_2\beta+R_2\gamma+S_2\delta=0,\quad (p)$$

coupera la première de ces droites quand on a

$$\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & S_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 & S_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ou}$$

$$(P_1S_2-P_2S_1)(B_1C_2-B_2C_1)+(Q_1S_2-Q_2S_1)(C_1A_2-C_2A_1)$$
$$+(R_1S_2-R_2S_1)(A_1B_2-A_2B_1)+(Q_1R_2-Q_2R_1)(A_1D_2-A_2D_1)$$
$$+(R_1P_2-R_2P_1)(B_1D_2-B_2D_1)+(P_1Q_2-P_2Q_1)(C_1D_2-C_2D_1)=0.$$

Regardons $B_1C_2-B_2C_1$, $C_1A_2-C_2A_1$, $A_1B_2-A_2B_1$, $A_1D_2-A_2D_1$, $B_1D_2-B_2D_1$, $C_1D_2-C_2D_1$ comme les coordonnées de la droite, et désignons ces coordonnées respectivement par a_1, b_1, c_1, f_1, g_1, h_1. Désignons de même les coordonnées de la droite (p) par a, b, c, f, g, h. L'équation précédente devient alors

$$a_1f+b_1g+c_1h+f_1a+g_1b+h_1c=0.$$

De même, les conditions qui expriment que la droite (p) rencontre les autres droites sont

$$a_2f + b_2g + c_2h + f_2a + g_2b + h_2d = 0$$
$$a_3f + b_3g + c_3h + f_3a + g_3b + h_3d = 0$$
$$a_4f + b_4g + c_4h + f_4a + g_4b + h_4d = 0.$$

En outre, on a entre les coordonnées de chaque droite l'équation identique

$$af + bg + ch = 0.$$

Il nous faut donc déterminer la condition qui exprime que les deux systèmes de valeurs de $a, b, c, f, g, h,$ qui verifient cette équation du second degré et les quatre équations linéaires précédentes, coïncident. Et, d'après la propriété que j'ai demontrée dans le Tome L page 157 de cet Archiv, cette condition est

$$\begin{vmatrix}
. & . & . & 1 & . & . & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
. & . & . & . & 1 & . & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\
. & . & . & . & . & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\
1 & . & . & . & . & . & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\
. & 1 & . & . & . & . & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 \\
. & . & 1 & . & . & . & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\
a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1 & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & g_2 & h_2 & & & & \\
a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & g_3 & h_3 & & & & \\
a_4 & b_4 & c_4 & f_4 & g_4 & h_4 & & & &
\end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Ce déterminant est du 16e degré par rapport aux coefficients des équations des plans qui déterminent la droite. Dans les Comptes Rendus de 1861, Premier Semestre, M. Sylvester a exprimé la même condition au moyen d'un autre déterminant qui est aussi du 16e degré.

§. 52.

Quand le déterminant précédent D est positif, d'après ce que j'ai demontré Tome L page 157, les deux droites qui rencontrent les quatre droites données, sont imaginaires. Si D est négatif, les deux droites sont réelles. Ces deux propriétés peuvent s'exprimer de la manière suivante.

Si $D<0$, la surface qui passe par trois des quatres droites, rencontre la quatrième droite en deux points réels.

Si $D>0$, la surface qui passe par trois des quatre droites, rencontre la quatrième droite en deux points imaginaires.

La symétrie de D par rapport aux coordonnées des quatre droites nous fait voir: Quand pour l'une des quatre droites et la surface du 2^d degré qui passe par les autres droites, les points d'intersection sont réels, cela est vrai aussi pour chacune des autres droites et la surface correspondante.

De même pour des points d'intersection coïncidents ou imaginaires.

§. 53.

Appliquons ce qui a été dit dans les deux paragraphes précédents, pour voir si les deux directrices de ce que M. Plücker a appelé une Linien-Congruenz (Neue Geometrie des Raumes) sont réelles, coïncidentes, ou imaginaires.

Cela revient à voir, si les deux droites qui rencontrent quatre droites de la congruence, sont réelles, coïncidentes ou imaginaires.

Et, quand les deux complexes qui forment la congruence, sont représentes par les équations

$$\begin{aligned} Ar + Bs + C - D\sigma + E\varrho + F\eta &= 0, \\ A_1r + B_1s + C_1 - D_1\sigma + E_1\varrho + F_1\eta &= 0, \end{aligned}$$

on peut prendre pour ces quatre droites (voir Plücker, page 80)

$$\begin{aligned} A + Fy - Ez = 0, \quad & A_1 + F_1y - E_1z = 0; \\ B - Fx + Dz = 0, \quad & B_1 - F_1x + D_1z = 0; \\ C + Ex - Dy = 0, \quad & C_1 + E_1x - D_1y = 0; \\ Ax + By + Cz = 0, \quad & A_1x + B_1y + C_1z = 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées a, b, c, f, g, h, de ces droites sont respectivement

$$\begin{matrix} FE_1-F_1E, & 0 & , & 0 & , & 0 & , & FA_1-F_1A, & AE_1-A_1E; \\ 0 & FD_1-F_1D, & , & 0 & , & BF_1-B_1F, & , & 0 & DB_1-D_1B; \\ 0 & 0 & , & DE_1-D_1E, & , & EC_1-E_1C, & , & CD_1-C_1D, & 0 \\ BC_1-B_1C, & CA_1-C_1A, & , & AB_1-A_1B, & , & 0 & , & 0 & 0 \end{matrix}$$

Substituant ces valeurs dans le déterminant du §. 52, on les conditions cherchées.

§. 54.

Déterminer la condition qui exprime qu'il y sixième droite qui rencontre cinq droites donnée

Les coordonnées des cinq droites données soient

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1, \\ a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & g_2 & h_2, \text{ etc.} \end{matrix}$$

Appliquant les mêmes raisonnements que dans le §. 52, on trouve que la condition cherchée est en même temps la condition qui exprime qu'un même système de valeurs de a, b, c, f, g, h vérifie les équations

$$\begin{aligned}
af + bg + ch &= 0,\\
fa_1 + gb_1 + hc_1 + af_1 + bg_1 + ch_1 &= 0,\\
fa_2 + gb_2 + hc_2 + af_2 + bg_2 + ch_2 &= 0,\\
fa_3 + gb_3 + hc_3 + af_3 + bg_3 + ch_3 &= 0,\\
fa_4 + gb_4 + hc_4 + af_4 + bg_4 + ch_4 &= 0,\\
fa_5 + gb_5 + hc_5 + af_5 + bg_5 + ch_5 &= 0.
\end{aligned}$$

La dernière condition est d'après le paragraphe 1.

$$\begin{vmatrix}
. & . & . & 1 & . & . & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\
. & . & . & . & 1 & . & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\
. & . & . & . & . & 1 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\
1 & . & . & . & . & . & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\
. & 1 & . & . & . & . & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\
. & . & 1 & . & . & . & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\
a_1 & b_1 & c_1 & f_1 & g_1 & h_1 & & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & f_2 & g_2 & h_2 & & & & & \\
a_3 & b_3 & c_3 & f_3 & g_3 & h_3 & & & & & \\
a_4 & b_4 & c_4 & f_4 & g_4 & h_4 & & & & & \\
a_5 & b_5 & c_5 & f_5 & g_5 & h_5 & & & & &
\end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Ce déterminant est du degré 20 par rapport aux coefficients des équations des plans qui déterminent les cinq droites données. Dans les Comptes Rendus de 1861, Premier Semestre page 815, M. Sylvester a exprimé la même condition au moyen d'un autre déterminant qui est du même degré par rapport aux coefficients des équations des plans qui déterminent les 5 droites.

XXII.

(Durch besondere Umstände veranlasst, mussten unter diese Nummer zwei im Folgenden durch A. und B. bezeichnete, übrigens in keinem Zusammenhange unter einander stehende Aufsätze vereinigt werden.)

A.

Beschreibung eines Apparates zum Anschauungsunterricht in der descriptiven Geometrie.

Von

Herrn Professor *F. Hoza*,
Lehrer an der Oberrealschule in Königgrätz.

Die Anwendung von Modellen beim Unterricht in der descriptiven Geometrie hat den Zweck, dem Schüler vollkommen klare Vorstellungen von jenen Raumgebilden beizubringen, deren Abhängigkeitsgesetze die Grundlage dieser Wissenschaft bilden. Es ist nicht nöthig, dass für jedes vorkommende Problem ein eigenes Modell vorhanden sei, vielmehr handelt es sich bloss um die Veranschaulichung der Grundprobleme, aus denen alle übrigen zusammengesetzt werden. Diese Grundprobleme sind meistens einfacher Natur, jedoch ihre Anzahl ist ziemlich bedeutend.

Sollte daher der ausgesprochene Zweck erreicht werden, so müsste man eine Sammlung von vielen solchen Modellen besitzen. Bei allen Vorrichtungen, welche zur Veranschaulichung von Orthogonalprojectionen auf zwei zu einander senkrechte Ebenen dienen, kommen stets Theile vor, die jene zwei Projectionsebenen vorzustellen haben. Da sich nun diese Theile bei jedem Modelle wiederholen müssen, so hat man auf Mittel gedacht, wie diese Wiederholung vermieden werden könnte, damit eine einzige Vorrichtung für alle Fälle hinreiche. Obzwar man zu diesem Ziele auf mannig

faltigen Wegen gelangen könnte, existirt meines Wissens dennoch kein solid ausgeführter Apparat, der einen stetigen Gebrauch zuliesse. Ein solcher nun wurde von mir ausgeführt und ist auf Taf. V. Fig. 1. abgebildet. Nach einjähriger Verwendung desselben in der IV. Klasse der Oberrealschule, wo die Elemente der descriptiven Geometrie gelehrt werden, habe ich mich von seiner Brauchbarkeit überzeugt, und hoffe somit durch eine kurze Beschreibung desselben dem Wunsche mancher Fachmänner entgegenzukommen.

Zwei zu einander senkrechte Rahmen P_1 und P_2, deren jeder aus zwei Hälften besteht, sind an Rosetten R_1 und R_2 festgeschraubt. Die Axe A hat zwei zilindrische Anläufe a_1 und a_2; sie trägt an beiden Enden Schraubengewinde. Schraubenmuttern s_1 und s_2 pressen die Rosetten an die Anläufe und Flügelmuttern F_1, F_2 halten das Ganze in einer fixen Lage gegen den Rahmen H. An diesen angeschraubt ist die Scheibe S_1 und eine zweite Scheibe S_2 sitzt fest auf der zilindrischen Säule T, welche oben in Schraubengewinden endigt, so dass eine dritte Flügelmutter F_3 die beiden Scheiben fest aneinander pressen kann. Am untern Ende der Säule T sind drei prismatische Stäbe derart angeschraubt, dass sie einen das Ganze tragenden Dreifuss bilden, der aber in Taf V. Fig. 1 weggelassen wurde. Die beiden Rahmen P_1 und P_2 lassen sich daher sammt der Axe A um die horizontale Mittellinie dieser Axe und der Rahmen H sammt der Scheibe S_1 um die vertikale Mittellinie der Säule T drehen und in beliebigen Lagen durch Muttern F_1 F_2 F_3 festhalten.

P_1 und P_2 stellen die beiden Projectionsebenen vor, A ihre Durchschnittslinie, die Projectionsaxe. Linien werden durch Drähte veranschaulicht, welche an die Rahmen auf doppelte Art befestigt werden. Linien, die in einer der Projectionsebenen selbst liegen, befestigt man mittelst Klammern K, welche innen zwei zu einander senkrechte Rinnen zur Aufnahme von Drähten besitzen. Soll eine beliebige Gerade im Raume veranschaulicht werden, so befestigt man die verschiebbare Hülse N, in welche ein Draht D fest eingeschraubt ist, an den Rahmen so, dass D zu ihm senkrecht steht. Auch die Hülse N hat innen eine Rinne zum Durchstecken von Draht, der dann mit dem verlängert gedachten D genau auf der Projectionsebene zusammentrifft. Der Knopf M ist derart construirt, dass er zwei durch ihn gesteckte Drähte in beliebiger Lage festhält, wodurch zwei sich schneidende Linien versinnlicht werden können.

Wird daher ein solcher Knopf auf den Draht D gesteckt, so

kann ein zweiter Draht L in beliebiger Lage im Raume an ihn befestigt werden.

Uebrigens kann man auch die Drähte, wo sie zusammenkommen, mittelst feinem Binddraht zusammenhalten, und nachdem die ganze Zusammenstellung fertig ist, die Klammern, Hülsen und Knöpfe bis auf einige wenige wegnehmen, wodurch mehr Einfachheit und Klarheit erzielt wird.

Die Rahmen P_1, P_2, die Axe A und Drähte D sind von Stahl, alle übrigen Theile mit Ausnahme der messingenen Klammern, Hülsen und Knöpfe von Schmiedeeisen.

Der ganze Apparat hat eine Höhe von etwa 6 Fuss.

In Taf. V. Fig. 1. bedeuten ferner E^I E^{II} die beiden Spuren der Ebene E; und E'^I E'^{II} Spuren der Ebene E'. Sodann sind p, q Schnittpunkte ihrer entsprechenden Spuren und L ist die gerade Schnittlinie beider Ebenen. Die zur Projectionsaxe senkrechte Gerade G projicirt den Punkt p auf die zweite Projectionsebene nach p_2 und ebenso J den Punkt q nach q_1 auf die erste Projectionsebene. L_1 ist dann die erste und L_2 die zweite Projection der Schnittlinie L.

Will man nun das, was auf zwei Projectionsebenen sich befindet auf einer ebenen Tafel abbilden, so zeichnet man (Taf. V. Fig. 2.) die Projectionsaxe A, hierauf die Spuren E^I, E^{II}, E'^I, E'^{II} in ihrer bestimmten Lage gegen diese Axe. Die Tafel ist somit ein Bild beider sich in der Axe A schneidenden Projectionsebenen P_1 und P_2. Die zu A senkrechten Geraden G, J sowie die gesuchten Projectionen L_1, L_2 sind nun leicht zu zeichnen.

Die gerade Schnittlinie L zweier Ebenen E, E' ist daher durch die beiden Schnittpunkte p, q entsprechender Spuren vollkommen bestimmt und jede ihrer beiden Projectionen erhält man, wenn man den Schnittpunkt gleichnamiger Spuren mit jenem Punkte der Projectionsaxe verbindet, der die Projection des Schnittpunktes der andern Spuren auf die Axe ist.

Zum Schlusse bemerke ich noch, dass die Ausführung des Apparates die mechanische Werkstätte von Dr. F. Neumann in Prag (Universitätsgebäude) übernommen hat.

B.

Harmonische Beziehungen bei der Reflexion und Brechung des Lichtes.

Von

Herrn Professor *Carl Albrich*
an der Realschule in Hermannstadt in Siebenbürgen.

Die Ableitung der Vereinigungsweite für Centralstrahlen bei einem Hohlspiegel geschieht bekanntlich unter der Voraussetzung, dass alle von irgend einem Punkte der Axe zum Hohlspiegel gezogenen Geraden gleiche Grösse haben. Bezeichnen unter dieser Voraussetzung A einen leuchtenden Punkt in der Axe, B den Krümmungsmittelpunkt, B' die Mitte und C einen Randpunkt des Spiegels, so ist AC der einfallende Strahl, BC das Einfallsloth, und bezeichnet ferner A' den Punkt der Axe, in welchem der reflectirte Strahl dieselbe schneidet (zugleich das Bild von A), so ist $AB:A'B = AC:A'C$ oder nach obiger Voraussetzung: $AB:A'B = AB':A'B'$. Es sind also

> der leuchtende Punkt, das Bild desselben, der Krümmungsmittelpunkt und die Mitte des Spiegels vier harmonisch zugeordnete Punkte und die von einem Randpunkt des Spiegels zu diesen Punkten gezogenen Geraden harmonische Strahlen.

Aus den Eigenschaften harmonischer Punkte ergeben sich nun in ganz einfacher Weise die Folgerungen über die Lage des

Bildes bei veränderter Lage des leuchtenden Punktes. Zwei derselben B und B' bleiben fest, die beiden andern verändern ihre Lage derart, dass je näher A dem Punkte B rückt, um so näher auch A' diesem Punkte kommt, bis für den Fall, wo A in B liegt, auch A' in demselben Punkte ist. Weil der Mitte der Strecke BB' der unendlich entfernte Punkt zugeordnet ist, und umgekehrt; so vereinigen sich parallele Strahlen in der Mitte zwischen B und B'. Rückt A näher als B an den Spiegel, so muss, weil der zugeordnete Punkt A' auf derselben Seite von der Mitte der Strecke BB' liegt und harmonische Punkte so angeordnet sein müssen, dass man von B' nicht nach B gelangen kann, ohne über einen und nur über einen Punkt des andern Paares zu gehen, A' jenseits B liegen; aus gleichem Grunde muss, wenn A dem Spiegel näher steht, als die Mitte der Strecke BB', A' hinter dem Spiegel stehen.

Nehmen wir auf der Axe einer Sammellinse den leuchtenden Punkt A, einen Punkt B, der von der Mitte B' der Linse um die doppelte Brennweite absteht, und bestimmen auf derselben Seite der Linse, auf welcher diese drei Punkte liegen, einen vierten Punkt A' nach der Gleichung für die Bildweite der Centralstrahlen $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{p} - \frac{1}{a}$, worin α, p und a die bekannte Bedeutung haben und welchen wir das angenommene Bild des Punktes nennen wollen, so folgt aus obiger Gleichung:

$$2ap = 2a\alpha - 2\alpha p,$$

$$2ap - a\alpha = a\alpha - 2\alpha p,$$

$$a(2p - \alpha) = \alpha(a - 2p),$$

$$a - 2p : 2p - \alpha = a : \alpha,$$

$$AB : A'B = AB' : A'B'.$$

Der leuchtende Punkt, das angenommene Bild, der Punkt in der Entfernung der doppelten Brennweite und der optische Mittelpunkt der Linse bilden also wieder zwei Paare harmonisch zugeordneter Punkte.

Die Schlüsse über die Lage des angenommenen Bildes, somit auch des gegen den Mittelpunkt der Linse symmetrisch gelegenen wirklichen Bildes, ergeben sich nun aus den Eigenschaften harmonisch zugeordneter Punkte in gleicher Weise wie beim Hohlspiegel.

XXIII.

Das tetraedrische oder quadriplanare Coordinatensystem in allgemeiner analytischer Entwickelung.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

In dieser Abhandlung habe ich eine allgemeine analytische Entwickelung des tetraedrischen oder quadriplanaren Coordinatensystems, welches, eben so wie das trilineare Coordinatensystem in der Geometrie der Ebene, in der Geometrie des Raumes häufigere und allgemeinere Anwendung als bisher zu finden recht sehr verdient, zu geben versucht. Ein Hauptaugenmerk bei diesen Entwickelungen ist darauf gerichtet gewesen, alle Formeln in einer solchen Weise zu entwickeln und darzustellen, dass ihnen eine ganz allgemeine Anwendbarkeit gesichert wird, was man bei anderen Darstellungen dieses Gegenstandes häufig zu vermissen Veranlassung findet. Weitere Ausführungen dieser Abhandlung, der ich eine zu grosse Ausdehnung nicht geben durfte, und Anwendungen der gefundenen Formeln, hoffe ich derselben später in grösserer Anzahl folgen lassen zu können. Im Allgemeinen bemerke ich noch, dass im Folgenden eine vollständige Kenntniss meiner Abhandlung Thl. XXXIV. Nr. XI. Kapitel I. und II., auf welche zu verweisen ich öfters genöthigt sein werde, vorausgesetzt wird.

Erstes Kapitel.

Das tetraedrische Coordinatensystem im Allgemeinen.

§. 1.

Wir denken uns ein beliebiges Tetraeder $A_0A_1A_2A_3$, welches wir das Fundamentaltetraeder nennen werden, und führen die folgenden Bezeichnungen ein.

Die sechs Kanten des Fundamentaltetraeders

$$A_0A_1,\quad A_0A_2,\quad A_0A_3,\quad A_1A_2,\quad A_1A_3,\quad A_2A_3$$

bezeichnen wir beziehungsweise durch:

$$a_{01},\quad a_{02},\quad a_{03},\quad a_{12},\quad a_{13},\quad a_{23}.$$

Die drei Winkel:

$$\angle A_1A_0A_2,\quad \angle A_2A_0A_3,\quad \angle A_3A_0A_1$$

sollen beziehungsweise durch

$$\alpha_3,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2$$

bezeichnet werden. Auch wollen wir überhaupt die von den Kanten des Fundamentaltetraeders eingeschlossenen Winkel durch die einschliessenden Kanten bezeichnen, wonach also die drei vorstehenden an der Ecke A_0 liegenden Winkel durch

$$(a_{01}a_{02}),\quad (a_{02}a_{03}),\quad (a_{03}a_{01})$$

zu bezeichnen sein würden. Der Winkel $\angle A_1A_3A_2$ an der Ecke A_3 wäre durch $(a_{13}a_{23})$ zu bezeichnen. Auch selbst den von den sich nicht schneidenden Kanten A_0A_1 und A_2A_3 oder a_{01} und a_{23} gebildeten oder bestimmten Winkel würde man durch $(a_{01}a_{23})$ zu bezeichnen haben.

Die vier Seitenflächen

$$\Delta A_1A_2A_3,\quad \Delta A_2A_3A_0,\quad \Delta A_3A_0A_1,\quad \Delta A_0A_1A_2$$

welche den Ecken

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

gegenüberstehen, bezeichnen wir beziehungsweise durch:

$$F_0,\quad F_1,\quad F_2,\quad F_3.$$

Die den Ecken

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

oder den Seitenflächen

$$F_0, \quad F_1, \quad F_2, \quad F_3$$

entsprechenden Höhen des Fundamentaltetraeders wollen wir beziehungsweise durch

$$H_0, \quad H_1, \quad H_2, \quad H_3$$

bezeichnen.

Die von den Seitenflächen

$$F_0, F_1; \quad F_0, F_2; \quad F_0, F_3; \quad F_1, F_2; \quad F_1, F_3; \quad F_2, F_3$$

eingeschlossenen Winkel, welche an den Kanten

$$A_2A_3, \quad A_1A_3, \quad A_1A_2, \quad A_0A_3, \quad A_0A_2, \quad A_0A_1$$

oder

$$a_{23}, \quad a_{13}, \quad a_{12}, \quad a_{03}, \quad a_{02}, \quad a_{01}$$

liegen, bezeichnen wir beziehungsweise durch:

$$(F_0F_1), \quad (F_0F_2), \quad (F_0F_3), \quad (F_1F_2), \quad (F_1F_3), \quad (F_2F_3)$$

oder auch kürzer bloss durch:

$$(a_{23}), \quad (a_{13}), \quad (a_{12}), \quad (a_{03}), \quad (a_{02}), \quad (a_{01}).$$

Den körperlichen Inhalt des Fundamentaltetraeders wollen wir durch V bezeichnen.

Der Kürze wegen werde

1)..... $N = 1 - \cos\alpha_1{}^2 - \cos\alpha_2{}^2 - \cos\alpha_3{}^2 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3$

gesetzt *).

---

*) Dass die Grösse N stets positiv, also die Grösse $\sqrt{N}$ stets reell ist, darf hier als bekannt vorausgesetzt werden, lässt sich aber u. A. auch leicht auf folgende Art beweisen. Nach einer bekannten ganz allgemein gültigen Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist:

$$\cos(a_{01}) = \frac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\cos\alpha_3}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3},$$

also:

$$\sin(a_{01})^2 = \frac{\sin\alpha_2{}^2\sin\alpha_3{}^2 - (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\cos\alpha_3)^2}{\sin\alpha_2{}^2\sin\alpha_3{}^2},$$

Die von A_0 ausgehenden Kanten A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3, je natürlich unbestimmt über A_1, A_2, A_3 verlängert gedacht, nehm wir als die positiven Theile der Axen der x, y, z eines carte schen Coordinatensystems der xyz an, dessen Anfangspunkt a der Punkt A_0 ist.

Nach einer in der analytischen Geometrie gewöhnlichen B zeichnung ist also:

$$\alpha_3 = (xy), \qquad \alpha_1 = (yz), \qquad \alpha_2 = (zx)$$

und folglich nach 1):

2)

$$N = 1 - \cos(xy)^2 - \cos(yz)^2 - \cos(zx)^2 + 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(z$$

Die Coordinaten der Punkte

$$A_0, \qquad A_1, \qquad A_2, \qquad A_3$$

in dem Systeme der xyz sind beziehungsweise:

$$0, 0, 0; \quad a_{01}, 0, 0; \quad 0, a_{02}, 0; \quad 0, 0, a_{03}.$$

In demselben Coordinatensysteme sind die Gleichungen d Ebenen

$$A_2A_3A_0, \qquad A_3A_0A_1, \qquad A_0A_1A_2$$

oder

$$F_1, \qquad F_2, \qquad F_3$$

beziehungsweise:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Die Gleichung der Ebene $A_1A_2A_3$ oder F_0 in dem Coord natensysteme der xyz sei

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

---

woraus, wenn man in dem Zähler

$$\sin\alpha_2^2 = 1 - \cos\alpha_2^2, \qquad \sin\alpha_3^2 = 1 - \cos\alpha_3^2$$

setzt und den Zähler entwickelt, leicht

$$\sin(a_{01})^2 = \frac{1 - \cos\alpha_1^2 - \cos\alpha_2^2 - \cos\alpha_3^2 + 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{\sin\alpha_2^2\sin\alpha_3^2},$$

also:

$$\sin(a_{01})^2 = \frac{N}{\sin\alpha_2^2\sin\alpha_3^2}, \qquad N = \sin\alpha_2^2\sin\alpha_3^2\sin(a_{01})^2$$

erhalten wird, woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

so ist, weil diese Ebene durch die Punkte A_1, A_2, A_3 geht:

$$Aa_{01}+D=0, \qquad Ba_{02}+D=0, \qquad Ca_{03}+D=0;$$

also:

$$A=-\frac{D}{a_{01}}, \qquad B=-\frac{D}{a_{02}}, \qquad C=-\frac{D}{a_{03}};$$

und daher die Gleichung der in Rede stehenden Ebene:

$$-\frac{x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}+1=0$$

oder:

$$\frac{x}{a_{01}}+\frac{y}{a_{02}}+\frac{z}{a_{03}}-1=0.$$

Folglich sind die Gleichungen der Ebenen

$$A_1A_2A_3, \qquad A_2A_3A_0, \qquad A_3A_0A_1, \qquad A_0A_1A_2$$

oder

$$F_0, \qquad F_1, \qquad F_2, \qquad F_3$$

beziehungsweise:

$$3)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{x}{a_{01}}+\dfrac{y}{a_{02}}+\dfrac{z}{a_{03}}-1=0, \\ x=0, \\ y=0, \\ z=0. \end{cases}$$

Geht die Ebene $A_1A_2A_3$ oder F_0 überhaupt durch einen gewissen Punkt (abc), so ist ihre Gleichung:

$$4)\ \ldots\ldots\ldots \frac{x-a}{a_{01}}+\frac{y-b}{a_{02}}+\frac{z-c}{a_{03}}=0,$$

und wir können also auch die Gleichung dieser Ebene unter den Formen:

$$5)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{x-a_{01}}{a_{01}}+\dfrac{y}{a_{02}}+\dfrac{z}{a_{03}}=0, \\ \dfrac{x}{a_{01}}+\dfrac{y-a_{02}}{a_{02}}+\dfrac{z}{a_{03}}=0, \\ \dfrac{x}{a_{01}}+\dfrac{y}{a_{02}}+\dfrac{z-a_{03}}{a_{03}}=0 \end{cases}$$

darstellen, die freilich eigentlich von der Form der Gleichung dieser Ebene in 3) gar nicht verschieden sind.

§. 2.

Ein Punkt im Raume, dessen Coordinaten in dem vorher angenommenen cartesischen Coordinatensysteme x, y, z sind, sei P. Von diesem Punkte fällen wir auf die Ebenen

$$A_1A_2A_3, \quad A_2A_3A_0, \quad A_3A_0A_1, \quad A_0A_1A_2$$

oder:

$$F_0, \quad F_1, \quad F_2, \quad F_3$$

Perpendikel und betrachten diese Perpendikel, je nachdem sie von den Ebenen, auf denen sie senkrecht stehen, aus nach dem inneren oder nach dem äusseren Raume des Fundamentaltetraeders hin liegen, als positiv oder als negativ; dann werden diese vier Perpendikel, wenn wir sie mit den ihnen hiernach zukommenden Vorzeichen nehmen, und mit Rücksicht hierauf durch p_0, p_1, p_2, p_3 bezeichnen, die Tetraedrischen Coordinaten des Punktes P genannt *).

Zunächst wollen wir nun die tetraedrischen Coordinaten p_0, p_1, p_2, p_3 des beliebigen Punktes P mit seinen cartesischen Coordinaten x, y, z vergleichen.

Die Coordinate p_1 steht auf der Ebene $A_2A_3A_0$ oder F_1, deren Gleichung, wenn jetzt x als veränderliche oder laufende Coordinate aufgefasst wird,

$$x = 0$$

ist, senkrecht. Setzen wir nun in der Abhandlung Thl. XXXIV. Nr. XI. §. 19., auf welche Abhandlung wir uns, wie schon in der Einleitung erinnert, hier häufig zu beziehen Gelegenheit haben werden, wie es mit Rücksicht auf die in Rede stehende Ebene und das zu bestimmende Perpendikel p_1 erforderlich ist:

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0;$$

$$a_0 = x, \quad b_0 = y, \quad c_0 = z;$$

wo natürlich x, y, z jetzt die constanten oder gegebenen Coordinaten des Punktes P sind; ferner

$$K = 1, \quad L = 0, \quad M = 0;$$

---

*) Coordinate quadriplanari z. B. in dem in mehrfacher Beziehung ausgezeichneten Buche: Elementi di Geometria analitica per R. Rubini. Parte II. Geometria nello spazio. Napoli 1866. 8°. p. 210. — Französisch Coordonnées quadriplanaires.

so ist nach der dortigen Formel 13):

$$G_0 = \pm\frac{\sqrt{N}}{\sin(yz)} = \pm\frac{\sqrt{N}}{\sin\alpha_1},$$

wo $\sin(yz) = \sin\alpha_1$ stets positiv ist. Ferner ist nach der dortigen Formel 18) — ohne Beziehung der Vorzeichen auf einander — offenbar:

$$p_1 = \pm\frac{x\sqrt{N}}{\sin\alpha_1},$$

wo sich nun frägt, welches Zeichen man in dieser Formel zu nehmen hat, mit Rücksicht auf das Zeichen von p_1, welches hier nicht bloss als absolut wie P_0 a. a. O. aufzufassen ist. Mit Rücksicht auf die oben gegebene Bestimmung wegen der Vorzeichen von p_0, p_1, p_2, p_3 haben aber offenbar p_1 und x jederzeit gleiche Vorzeichen, so dass man also in der obigen Formel das obere Vorzeichen nehmen, folglich

$$p_1 = \frac{x\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}$$

setzen muss.

Ganz auf ähnliche Art hat man daher überhaupt die Formeln:

$$p_1 = \frac{x\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}, \qquad p_2 = \frac{y\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}, \qquad p_3 = \frac{z\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}.$$

Die Coordinate p_0 steht auf der Ebene $A_1A_2A_3$ oder F_0, deren Gleichung bekanntlich

$$\frac{x}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} - 1 = 0$$

oder etwa

$$\frac{x-a_{01}}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} = 0$$

ist, wo jetzt x, y, z veränderliche oder laufende Coordinaten bezeichnen, senkrecht. Also werden wir a. a. O. zu setzen haben:

$$a = a_{01}, \qquad b = 0, \qquad c = 0;$$

$$a_0 = x, \qquad b_0 = y, \qquad c_0 = z;$$

wo nun x, y, z die constanten oder gegebenen Coordinaten des Punktes P sind; ferner ist a. a. O. offenbar zu setzen:

$$K = \frac{1}{a_{01}}, \qquad L = \frac{1}{a_{02}}, \qquad M = \frac{1}{a_{03}};$$

und daher, wenn wir der Kürze wegen:

$$6) \ldots\ldots\ldots \Gamma = \frac{\sin\alpha_1^2}{a_{01}^2} + \frac{\sin\alpha_2^2}{a_{02}^2} + \frac{\sin\alpha_3^2}{a_{03}^2} + \frac{2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3)}{a_{01}a_{02}} + \frac{2(\cos\alpha_2\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1)}{a_{02}a_{03}} + \frac{2(\cos\alpha_3\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{a_{03}a_{01}}$$

setzen, a. a. O. zu setzen:

$$G_0 = \pm\sqrt{\frac{N}{\Gamma}}.$$

Folglich ist nach der Formel a. a. O. 18), ohne Beziehung der Vorzeichen auf einander, zu setzen:

$$p_0 = \pm\sqrt{\frac{N}{\Gamma}} \cdot \left\{\frac{a_{01} - x}{a_{01}} - \frac{y}{a_{02}} - \frac{z}{a_{03}}\right\},$$

wo sich nun frägt, welches Vorzeichen man in dieser Formel zu nehmen hat, natürlich mit Rücksicht auf die oben wegen der Vorzeichen von p_0, p_1, p_2, p_3 gegebene Bestimmung.

Wenn man in der obigen Gleichung

$$\frac{x}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} - 1 = \frac{x - a_{01}}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} = 0$$

der Ebene $A_1A_2A_3$ oder F_0, oder vielmehr in deren Function, für die laufenden Coordinaten x, y, z die Coordinaten 0, 0, 0 des Punktes A_0 und die constanten oder gegebenen Coordinaten x, y, z des Punktes P setzt, so sind die entsprechenden Werthe dieser Function:

$$-1 \text{ und } \frac{x}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} - 1.$$

Liegt der Punkt P, von der Ebene $A_1A_2A_3$ an gerechnet, nach dem inneren Raume des Fundamentaltetraeders hin, so liegen die Punkte A_0 und P auf einer und derselben Seite der Ebene $A_1A_2A_3$, und nach einem bekannten Satze *) haben also:

$$-1 \text{ und } \frac{x}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} - 1$$

*) M. s. meine Optischen Untersuchungen. Thl. I. Leipzig. 1846. S. 40.

gleiche Vorzeichen, es ist folglich:

$$\frac{x}{a_{01}}+\frac{y}{a_{02}}+\frac{z}{a_{03}}-1$$

negativ, daher:

$$1-\frac{x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}=\frac{a_{01}-x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}$$

positiv, und da nun in diesem Falle nach den oben wegen der Vorzeichen von p_0, p_1, p_2, p_3 gegebenen Bestimmungen auch p_0 positiv ist, so muss man in dem obigen Ausdrucke dieser tetraedrischen Coordinate das obere Zeichen nehmen, also:

$$p_0=\sqrt{\frac{N}{\Gamma}}\cdot\left\{\frac{a_{01}-x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}\right\}$$

oder:

$$p_0=\sqrt{\frac{N}{\Gamma}}\cdot\left(1-\frac{x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}\right)$$

setzen. Liegt der Punkt P, von der Ebene $A_1A_2A_3$ an gerechnet, nach dem äusseren Raume des Fundamentaltetraeders hin, so liegen die Punkte A_0 und P auf entgegengesetzten Seiten der Ebene $A_1A_2A_3$, und nach dem schon vorher angewandten Satze haben also:

$$-1 \text{ und } \frac{x}{a_{01}}+\frac{y}{a_{02}}+\frac{z}{a_{03}}-1$$

entgegengesetzte Vorzeichen, es ist folglich:

$$\frac{x}{a_{01}}+\frac{y}{a_{02}}+\frac{z}{a_{03}}-1$$

positiv, daher:

$$1-\frac{x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}=\frac{a_{01}-x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}$$

negativ, und da nun in diesem Falle nach den oben wegen der Vorzeichen von p_0, p_1, p_2, p_3 gegebenen Bestimmungen auch p_0 negativ ist, so muss man in dem obigen Ausdrucke dieser tetraedrischen Coordinate wieder das obere Zeichen nehmen, also

$$p_0=\sqrt{\frac{N}{\Gamma}}\cdot\left\{\frac{a_{01}-x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}\right\}$$

oder

$$p_0=\sqrt{\frac{N}{\Gamma}}\cdot\left(1-\frac{x}{a_{01}}-\frac{y}{a_{02}}-\frac{z}{a_{03}}\right)$$

setzen. Also ist in völliger Allgemeinheit

$$p_0 = \sqrt{\frac{N}{\Gamma}} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_{01}} - \frac{y}{a_{02}} - \frac{z}{a_{03}}\right)$$

zu setzen.

Daher haben wir jetzt die folgenden wichtigen ganz allgemein gültigen Formeln zwischen den cartesischen Coordinaten x, y, z und den tetraedrischen Coordinaten p_0, p_1, p_2, p_3 eines beliebigen Punktes P im Raume:

$$7) \quad \left\{ \begin{aligned} p_0 &= \sqrt{\frac{N}{\Gamma}} \cdot \left(1 - \frac{x}{a_{01}} - \frac{y}{a_{02}} - \frac{z}{a_{03}}\right), \\ p_1 &= \frac{x\sqrt{N}}{\sin \alpha_1}, \\ p_2 &= \frac{y\sqrt{N}}{\sin \alpha_2}, \\ p_3 &= \frac{z\sqrt{N}}{\sin \alpha_3}; \end{aligned} \right.$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$8) \quad \mathrm{G} = \sqrt{\frac{N}{\Gamma}}$$

setzen:

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} p_0 &= \mathrm{G}\left(1 - \frac{x}{a_{01}} - \frac{y}{a_{02}} - \frac{z}{a_{03}}\right), \\ p_1 &= \frac{x\sqrt{N}}{\sin \alpha_1}, \\ p_2 &= \frac{y\sqrt{N}}{\sin \alpha_2}, \\ p_3 &= \frac{z\sqrt{N}}{\sin \alpha_3}; \end{aligned} \right.$$

aus denen umgekehrt sogleich

$$10) \quad x = \frac{p_1 \sin \alpha_1}{\sqrt{N}}, \quad y = \frac{p_2 \sin \alpha_2}{\sqrt{N}}, \quad z = \frac{p_3 \sin \alpha_3}{\sqrt{N}}$$

folgt.

Hieraus ergiebt sich zugleich, dass die vier tetraedrischen Coordinaten p_0, p_1, p_2, p_3 eines beliebigen Punktes P im Raume nicht ganz unabhängig von einander, sondern durch eine Gleichung

mit einander verbunden sind. Führt man nämlich die Ausdrücke von x, y, z in 10) in die erste der Gleichungen 9) ein, so wird dieselbe:

$$11) \quad \ldots \quad p_0 = G\left(1 - \frac{p_1 \sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}} - \frac{p_2 \sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}} - \frac{p_3 \sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}\right),$$

oder:

$$12) \quad \ldots \quad p_0 + \frac{G p_1 \sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}} + \frac{G p_2 \sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}} + \frac{G p_3 \sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}} = G,$$

oder:

$$13) \quad \ldots \quad \frac{\sqrt{N}}{G} p_0 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}} p_1 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}} p_2 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}} p_3 = \sqrt{N}.$$

Wenn man die den Ecken A_0, A_1, A_2, A_3 oder den Seitenflächen F_0, F_1, F_2, F_3 entsprechenden Höhen H_0, H_1, H_2, H_3 des Fundamentaltetraeders bestimmen will, so hat man im Vorhergehenden offenbar zu setzen:

$$\begin{array}{llll} x = 0, & y = 0, & z = 0, & p_0 = H_0; \\ x = a_{01}, & y = 0, & z = 0, & p_1 = H_1; \\ x = 0, & y = a_{02}, & z = 0, & p_2 = H_2; \\ x = 0, & y = 0, & z = a_{03}, & p_3 = H_3; \end{array}$$

und erhält dadurch nach 9) die Formeln:

$$14) \ldots . H_0 = G, \quad H_1 = \frac{a_{01}\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}, \quad H_2 = \frac{a_{02}\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}, \quad H_3 = \frac{a_{03}\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}.$$

Nach einer bekannten Elementarformel ist:

$$15) \quad \ldots \quad \begin{cases} F_1 = \frac{1}{2} a_{02} a_{03} \sin\alpha_1, \\ F_2 = \frac{1}{2} a_{03} a_{01} \sin\alpha_2, \\ F_3 = \frac{1}{2} a_{01} a_{02} \sin\alpha_3. \end{cases}$$

Nach 14) und 15) ist:

$$3V = H_0 F_0 = G F_0,$$

$$3V = H_1 F_1 = \frac{a_{01}\sqrt{N}}{\sin\alpha_1} \cdot \frac{a_{02} a_{03} \sin\alpha_1}{2} = \frac{a_{01} a_{02} a_{03}\sqrt{N}}{2},$$

$$3V = H_2 F_2 = \frac{a_{02}\sqrt{N}}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{a_{03} a_{01} \sin\alpha_2}{2} = \frac{a_{01} a_{02} a_{03}\sqrt{N}}{2},$$

$$3V = H_3 F_3 = \frac{a_{03}\sqrt{N}}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{a_{01} a_{02} \sin\alpha_3}{2} = \frac{a_{01} a_{02} a_{03}\sqrt{N}}{2}.$$

folglich:

$$16) \ldots\ldots\ldots V = \frac{a_{01}a_{02}a_{03}\sqrt{N}}{6},$$

und

$$F_0 = \frac{3V}{G} = \frac{a_{01}a_{02}a_{03}\sqrt{N}}{2G},$$

also nach 8):

$$F_0 = \frac{a_{01}a_{02}a_{03}\sqrt{N}}{2\sqrt{\frac{N}{\Gamma}}};$$

und da nun F_0 eine reelle Grösse, nach dem Obigen (§. 1.) auch $\sqrt{N}$ eine reelle Grösse ist, so muss auch $\sqrt{\frac{N}{\Gamma}}$ eine reelle Grösse, folglich, so wie nach dem Obigen N, auch Γ positiv sein, und man kann also nach 8):

$$17) \ldots\ldots\ldots G = \sqrt{\frac{N}{\Gamma}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\Gamma}},$$

also nach Vorstehendem:

$$18) \ldots\ldots\ldots F_0 = \frac{a_{01}a_{02}a_{03}\sqrt{\Gamma}}{2}$$

setzen.

Wegen 17) kann man die Gleichung 13) auch unter der Form:

$$19) \ldots \sqrt{\Gamma}.p_0 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}}p_1 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}}p_2 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}}p_3 = \sqrt{N}$$

darstellen.

Nach 15) ist:

$$\frac{\sin\alpha_1}{a_{01}} = \frac{2F_1}{a_{01}a_{02}a_{03}},$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{a_{02}} = \frac{2F_2}{a_{01}a_{02}a_{03}},$$

$$\frac{\sin\alpha_3}{a_{03}} = \frac{2F_3}{a_{01}a_{02}a_{03}};$$

also wird die Gleichung 19):

$$\sqrt{\Gamma}.p_0 + \frac{2}{a_{01}a_{02}a_{03}}(F_1p_1 + F_2p_2 + F_3p_3) = \sqrt{N},$$

oder:

$$\frac{a_{01}a_{02}a_{03}\sqrt{\Gamma}}{2}p_0 + F_1p_1 + F_2p_2 + F_3p_3 = \frac{a_{01}a_{02}a_{03}\sqrt{N}}{2},$$

folglich nach 16) und 18):

20) . . . . . $F_0p_0 + F_1p_1 + F_2p_2 + F_3p_3 = 3V,$

was auch durch eine einfache geometrische Betrachtung, aber doch keineswegs sogleich mit derselben Allgemeinheit und Eleganz wie durch die vorhergehende allgemeine analytische Betrachtung, erhellet.

Offenbar kann man die Gleichung 20) auch unter der Form:

21) . . . . . $\frac{p_0}{H_0} + \frac{p_1}{H_1} + \frac{p_2}{H_2} + \frac{p_3}{H_3} = 1$

schreiben.

§. 3.

Auf die Seitenflächen

$$A_1A_2A_3, \quad A_2A_3A_0, \quad A_3A_0A_1, \quad A_0A_1A_2$$

oder:

$$F_0, \quad F_1, \quad F_2, \quad F_3$$

des Fundamentaltetraeders denken wir uns jetzt nach dem inneren Raume des Tetraeders, also nach den Seiten der Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 hin, Perpendikel errichtet. Im Raume sei eine beliebige gerade Linie gegeben, und die eine der beiden Richtungen dieser Geraden, auf welche Richtung sich alles Folgende beziehen soll, wenn wir von der in Rede stehenden Geraden schlechthin sprechen, schliesse mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z die 180^0 nicht übersteigenden Winkel α, β, γ ein; die von dieser Geraden mit den auf die Seitenflächen

$$F_0, \quad F_1, \quad F_2, \quad F_3$$

nach dem inneren Raume des Fundamentaltetraeders hin errichteten Perpendikeln eingeschlossenen, 180^0 nicht übersteigenden Winkel sollen aber beziehungsweise durch

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \quad W_3$$

bezeichnet werden.

Wie a. a. O. S. 134. 21) setzen wir für die in Rede stehende Gerade:

$$22) \ldots\ldots \begin{cases} X = \mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma, \\ Y = C\cos\alpha + \mathfrak{B}\cos\beta + A\cos\gamma, \\ Z = B\cos\alpha + A\cos\beta + \mathfrak{C}\cos\gamma; \end{cases}$$

wo alle Zeichen dieselbe Bedeutung haben wie a. a. O.

Bezeichnen wir nun die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche das auf F_1 errichtete Perpendikel mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch α_1, β_1, γ_1; so ist $\beta_1 = 90°$, $\gamma_1 = 90°$, folglich $\cos\beta_1 = 0$, $\cos\gamma_1 = 0$; und wenn daher für das in Rede stehende Perpendikel die Werthe von X, Y, Z durch X_1, Y_1, Z_1 bezeichnet werden; so ist nach 22):

$$X_1 = \mathfrak{A}\cos\alpha_1, \qquad Y_1 = C\cos\alpha_1, \qquad Z_1 = B\cos\alpha_1.$$

Nach der Formel a. a. O. S. 136. 27) ist:

$$\begin{aligned} N^2\cos W_1 = {} & XX_1 + YY_1 + ZZ_1 + (XY_1 + YX_1)\cos(xy) \\ & + (YZ_1 + ZY_1)\cos(yz) \\ & + (ZX_1 + XZ_1)\cos(zx) \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} N^2\cos W_1 = {} & \{X_1 + Y_1\cos(xy) + Z_1\cos(zx)\}X \\ & + \{X_1\cos(xy) + Y_1 + Z_1\cos(yz)\}Y \\ & + \{X_1\cos(zx) + Y_1\cos(yz) + Z_1\}Z, \end{aligned}$$

also, weil nach den Formeln a. a. O. S. 137. 31):

$$\begin{aligned} X_1 + Y_1\cos(xy) + Z_1\cos(zx) &= N\cos\alpha_1, \\ X_1\cos(xy) + Y_1 + Z_1\cos(yz) &= N\cos\beta_1 = 0, \\ X_1\cos(zx) + Y_1\cos(yz) + Z_1 &= N\cos\gamma_1 = 0 \end{aligned}$$

ist:

$$N\cos W_1 = X\cos\alpha_1.$$

Nach der Formel a. a. O. S. 136 29) ist aber:

$$N^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + 2X_1Y_1\cos(xy) + 2Y_1Z_1\cos(yz) + 2Z_1X_1\cos(zx),$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} N^2 &= \{\mathfrak{A}^2 + C^2 + B^2 + 2\mathfrak{A}C\cos(xy) + 2CB\cos(yz) + 2B\mathfrak{A}\cos(zx)\}\cos\alpha_1^2 \\ &= \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}[\mathfrak{A} + B\cos(zx) + C\cos(xy)] \\ + B[\mathfrak{A}\cos(zx) + B + C\cos(yz)] \\ + C[\mathfrak{A}\cos(xy) + B\cos(yz) + C] \end{array}\right\}\cos\alpha_1^2, \end{aligned}$$

und folglich, weil, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\mathfrak{A} + B\cos(zx) + C\cos(xy) = N,$$

$$\mathfrak{A}\cos(zx) + B + C\cos(yz) = 0,$$

$$\mathfrak{A}\cos(xy) + B\cos(yz) + C = 0$$

ist (m. vergl. a. a. O. S. 171. 1)):

$$N = \mathfrak{A}\cos\alpha_1^2 = \sin(yz)^2\cos\alpha_1^2,$$

also, weil unter den gemachten Voraussetzungen offenbar immer $\alpha_1 < 90^0$, daher $\cos\alpha_1$ positiv ist:

$$\cos\alpha_1 \sin(yz) = \sqrt{N},$$

folglich nach dem Obigen:

$$\sqrt{N}.\cos W_1 = \frac{X}{\sin(yz)},$$

oder:

$$X = \sin(yz).\sqrt{N}.\cos W_1.$$

Auf diese Weise erhält man überhaupt die folgenden merkwürdigen und wichtigen Formeln:

$$23) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \sin(yz).\sqrt{N}.\cos W_1, \\ Y = \sin(zx).\sqrt{N}.\cos W_2, \\ Z = \sin(xy).\sqrt{N}.\cos W_3. \end{array} \right.$$

Die Gleichung der Ebene $A_1A_2A_3$ oder F_0 ist bekanntlich:

$$\frac{x}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} - 1 = 0$$

oder

$$\frac{x - a_{01}}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} = 0.$$

Bezeichnen wir nun für das auf diese Ebene errichtete Perpendikel die Werthe von X, Y, Z durch X_0, Y_0, Z_0; so ist nach den Gleichungen a. a. O. S. 179. 15), wenn μ einen gewissen constanten Factor bezeichnet:

$$X_0 = \mu\left(\frac{\mathfrak{A}}{a_{01}} + \frac{C}{a_{02}} + \frac{B}{a_{03}}\right),$$

$$Y_0 = \mu\left(\frac{C}{a_{01}} + \frac{\mathfrak{B}}{a_{02}} + \frac{A}{a_{03}}\right),$$

$$Z_0 = \mu\left(\frac{B}{a_{01}} + \frac{A}{a_{02}} + \frac{\mathfrak{C}}{a_{03}}\right).$$

Nach der Formel a. a. O. S. 136. 27) ist:

$$\begin{aligned} N^2\cos W_0 &= XX_0 + YY_0 + ZZ_0 + (XY_0 + YX_0)\cos(xy) \\ &\qquad + (YZ_0 + ZY_0)\cos(yz) \\ &\qquad + (ZX_0 + XZ_0)\cos(zx) \\ &= \{X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)\}X \\ &\quad + \{X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)\}Y \\ &\quad + \{X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0\}Z. \end{aligned}$$

Nach Vorstehendem ist:

$$X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx) = \mu\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{A} + B\cos(zx) + C\cos(xy)}{a_{01}} \\ + \dfrac{A\cos(zx) + \mathfrak{B}\cos(xy) + C}{a_{02}} \\ + \dfrac{A\cos(xy) + B + \mathfrak{C}\cos(zx)}{a_{03}} \end{array}\right\},$$

$$X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz) = \mu\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{A}\cos(xy) + B\cos(yz) + C}{a_{01}} \\ + \dfrac{A\cos(yz) + \mathfrak{B} + C\cos(xy)}{a_{02}} \\ + \dfrac{A + B\cos(xy) + \mathfrak{C}\cos(yz)}{a_{03}} \end{array}\right\},$$

$$X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0 = \mu\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\mathfrak{A}\cos(zx) + B + C\cos(yz)}{a_{01}} \\ + \dfrac{A + \mathfrak{B}\cos(yz) + C\cos(zx)}{a_{02}} \\ + \dfrac{A\cos(yz) + B\cos(zx) + \mathfrak{C}}{a_{03}} \end{array}\right\};$$

aber, wie man leicht findet (m. vergl. a. a. O. S. 171. 1), 2), 3)):

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} + B\cos(zx) + C\cos(xy) = N, \\ &A\cos(zx) + \mathfrak{B}\cos(xy) + C = 0, \\ &A\cos(xy) + B + \mathfrak{C}\cos(zx) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}\cos(xy) + B\cos(yz) + C = 0, \\ &A\cos(yz) + \mathfrak{B} + C\cos(xy) = N, \\ &A + B\cos(xy) + \mathfrak{C}\cos(yz) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}\cos(zx) + B + C\cos(yz) = 0, \\ &A + \mathfrak{B}\cos(yz) + C\cos(zx) = 0, \\ &A\cos(yz) + B\cos(zx) + \mathfrak{C} = N; \end{aligned}$$

also:

$$X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx) = \frac{\mu N}{a_{01}},$$

$$X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz) = \frac{\mu N}{a_{02}},$$

$$X_0\cos(zx) + Y_0\cos(yz) + Z_0 = \frac{\mu N}{a_{03}};$$

folglich nach dem Obigen:

$$N\cos W_0 = \mu\left(\frac{X}{a_{01}} + \frac{Y}{a_{02}} + \frac{Z}{a_{03}}\right),$$

also nach 23):

$$\frac{\sqrt{N}}{\mu}\cos W_0 = \frac{\sin(yz)\cos W_1}{a_{01}} + \frac{\sin(zx)\cos W_2}{a_{02}} + \frac{\sin(xy)\cos W_3}{a_{03}}.$$

Nach der Formel a. a. O. S. 136. 29) ist:

$$\begin{aligned} N^2 &= X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 + 2X_0Y_0\cos(xy) + 2Y_0Z_0\cos(yz) + 2Z_0X_0\cos(zx) \\ &= X_0\{X_0 + Y_0\cos(xy) + Z_0\cos(zx)\} \\ &\quad + Y_0\{X_0\cos(xy) + Y_0 + Z_0\cos(yz)\} \\ &\quad + Z_0\{X_0\cos(zx) + Y^0\cos(yz) + Z_0\}, \end{aligned}$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$N = \mu\left(\frac{X_0}{a_{01}} + \frac{Y_0}{a_{02}} + \frac{Z_0}{a_{03}}\right),$$

folglich:

$$\begin{aligned} N &= \mu^2\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{a_{01}}\left(\frac{\mathfrak{A}}{a_{01}} + \frac{C}{a_{02}} + \frac{B}{a_{03}}\right) \\ + \frac{1}{a_{02}}\left(\frac{C}{a_{01}} + \frac{\mathfrak{B}}{a_{02}} + \frac{A}{a_{03}}\right) \\ + \frac{1}{a_{03}}\left(\frac{B}{a_{01}} + \frac{A}{a_{02}} + \frac{\mathfrak{C}}{a_{03}}\right) \end{array}\right\} \\ &= \mu^2\left(\frac{\mathfrak{A}}{a_{01}^2} + \frac{\mathfrak{B}}{a_{02}^2} + \frac{\mathfrak{C}}{a_{03}^2} + \frac{2C}{a_{01}a_{02}} + \frac{2A}{a_{02}a_{03}} + \frac{2B}{a_{03}a_{01}}\right), \end{aligned}$$

also:

$$N = \mu^2\left\{\begin{array}{l} \frac{\sin(yz)^2}{a_{01}^2} + \frac{\sin(zx)^2}{a_{02}^2} + \frac{\sin(xy)^2}{a_{03}^2} \\ + \frac{2[\cos(yz)\cos(zx) - \cos(xy)]}{a_{01}a_{02}} \\ + \frac{2[\cos(zx)\cos(xy) - \cos(yz)]}{a_{02}a_{03}} \\ + \frac{2[\cos(xy)\cos(yz) - \cos(zx)]}{a_{03}a_{01}} \end{array}\right\}$$

oder:

$$N = \mu^2 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\sin\alpha_1^{\,2}}{a_{01}^{\,2}} + \dfrac{\sin\alpha_2^{\,2}}{a_{02}^{\,2}} + \dfrac{\sin\alpha_3^{\,2}}{a_{03}^{\,2}} \\ + \dfrac{2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3)}{a_{01}a_{02}} \\ + \dfrac{2(\cos\alpha_2\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1)}{a_{02}a_{03}} \\ + \dfrac{2(\cos\alpha_3\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{a_{03}a_{01}} \end{array} \right\},$$

folglich nach 6):

$$N = \mu^2 \Gamma,$$

und daher nach 17):

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{N}{\Gamma}} = \pm\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\Gamma}} = \pm G,$$

wo sich nun frägt, welches Zeichen man zu nehmen hat.

Um dies zu bestimmen, wollen wir, was jedenfalls verstattet und erlaubt ist, ohne der Allgemeinheit zu schaden, das auf die Ebene $A_1A_2A_3$ oder F_0 errichtete Perpendikel durch den Punkt A_0, welcher der Anfang des Coordinatensystems der xyz ist, gehen lassen; dann sind (a. a. O. S. 134. 23))

$$\frac{x}{X_0} = \frac{y}{Y_0} = \frac{z}{Z_0}$$

die Gleichungen der Geraden, in welcher das Perpendikel liegt. Ist nun $(x_0y_0z_0)$ ein beliebiger Punkt des Perpendikels, so ist (a. a. O. S. 134. 22)):

$$\frac{x_0}{X_0} = \frac{y_0}{Y_0} = \frac{z_0}{Z_0} = \frac{r_0}{N},$$

wo r_0 die mit dem gehörigen Vorzeichen genommene Entfernung des Punktes $(x_0y_0z_0)$ von dem Punkte A_0 oder dem Anfange des Coordinatensystems der xyz bezeichnet. Die Gleichung der Ebene $A_1A_2A_3$ oder F_0 ist bekanntlich

$$\frac{x}{a_{01}} + \frac{y}{a_{02}} + \frac{z}{a_{03}} - 1 = 0,$$

und die Werthe, welche die Function dieser Gleichung erhält, wenn man für x, y, z die Werthe 0, 0, 0 und x_0, y_0, z_0 setzt, sind also beziehungsweise:

$$-1 \text{ und } \frac{x_0}{a_{01}} + \frac{y_0}{a_{02}} + \frac{z_0}{a_{03}} - 1,$$

ch dem Obigen:

$$-1 \text{ und } \frac{r_0}{N}\left(\frac{X_0}{a_{01}}+\frac{Y_0}{a_{02}}+\frac{Z_0}{a_{03}}\right)-1,$$

, wenn man für X_0, Y_0, Z_0 ihre aus dem Obigen bekannten cke einführt:

$$-1 \text{ und } \frac{\mu r_0}{N}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{a_{01}}\left(\frac{\mathfrak{A}}{a_{01}}+\frac{C}{a_{02}}+\frac{B}{a_{03}}\right)\\ +\frac{1}{a_{02}}\left(\frac{C}{a_{01}}+\frac{\mathfrak{B}}{a_{02}}+\frac{A}{a_{03}}\right)\\ +\frac{1}{a_{03}}\left(\frac{B}{a_{01}}+\frac{A}{a_{02}}+\frac{\mathfrak{C}}{a_{03}}\right)\end{array}\right\}-1,$$

ach dem Obigen, mit Rücksicht darauf, dass $\mu = \pm G$ ist:

$$-1 \text{ und } \frac{\mu r_0}{N}\cdot\frac{N}{\mu^2}-1=\frac{r_0}{\mu}-1=\pm\frac{r_0}{G}-1,$$

veil $G = H_0$ ist:

$$-1 \text{ und } \pm\frac{r_0}{H_0}-1.$$

ehmen wir nun den Punkt $(x_0y_0z_0)$ in der Geraden, in r das Perpendikel liegt, so an, dass er und der Punkt A_0 gegengesetzten Seiten der Ebene $A_1A_2A_3$ oder F_0 liegen, r_0 negativ und $(-r_0) > H_0$, also

$$\frac{(-r_0)}{H_0} > 1;$$

ist offenbar

$$+\frac{r_0}{H_0}-1$$

und

$$-\frac{r_0}{H_0}-1=\frac{(-r_0)}{H_0}-1$$

, und es haben folglich

$$-1 \text{ und } +\frac{r_0}{H_0}-1$$

, dagegen

$$-1 \text{ und } -\frac{r_0}{H_0}-1$$

engesetzte Vorzeichen. Weil nun aber die Punkte A_0 und

$(x_0y_0z_0)$ auf entgegengesetzten Seiten der Ebene $A_1A_2A_3$ oder liegen, so müssen in der That die Werthe, welche die Functi der Gleichung dieser Ebene erhält, wenn man in derselben x, y, z die Coordinaten der Punkte A_0 und $(x_0y_0z_0)$ setzt, n dem schon oben angewandten Satze entgegengesetzte Vorzeich haben; also können diese Werthe nach dem Obigen nur

$$-1 \text{ und } -\frac{r_0}{H_0}-1$$

sein, man muss folglich im Obigen überall die unteren Vorzeich nehmen, also

$$\mu = -G$$

setzen.

Daher hat man nach dem Obigen die Gleichung:

$$-\frac{\sqrt{N}}{G}\cos W_0 = \frac{\sin(yz)\cos W_1}{a_{01}} + \frac{\sin(zx)\cos W_2}{a_{02}} + \frac{\sin(xy)\cos W}{a_{03}}$$

oder:

24)

$$\sqrt{\Gamma}.\cos W_0 + \frac{\sin(yz)\cos W_1}{a_{01}} + \frac{\sin(zx)\cos W_2}{a_{02}} + \frac{\sin(xy)\cos W_3}{a_{03}} =$$

oder:

25)....$\sqrt{\Gamma}.\cos W_0 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}}\cos W_1 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}}\cos W_2 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}}\cos W_3$,

durch welche Gleichung die vier Winkel W_0, W_1, W_2, W_3 unt einander verbunden sind.

Mittelst der Gleichung 15) wird diese Gleichung:

$$\sqrt{\Gamma}.\cos W_0 + \frac{2}{a_{01}a_{02}a_{03}}(F_1\cos W_1 + F_2\cos W_2 + F_3\cos W_3) = 0,$$

also, weil nach 18):

$$\sqrt{\Gamma} = \frac{2}{a_{01}a_{02}a_{03}}F_0$$

ist:

26) . . $F_0\cos W_0 + F_1\cos W_1 + F_2\cos W_2 + F_3\cos W_3 = 0.$

Es findet aber auch zwischen den drei Winkeln W_1, W_2, W eine besondere Relation Statt, zu welcher man leicht auf folgend Art gelangt. Nach der Formel a. a. O. S. 136. 29) ist:

$$N^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY\cos(xy) + 2YZ\cos(yz) + 2ZX\cos(zx),$$

so nach 23):

$$\begin{aligned} \ldots\ldots N = \; & \sin(yz)^2 \cos W_1^2 \\ & + \sin(zx)^2 \cos W_2^2 \\ & + \sin(xy)^2 \cos W_3^2 \\ & + 2\cos(xy)\sin(yz)\sin(zx)\cos W_1 \cos W_2 \\ & + 2\sin(xy)\cos(yz)\sin(zx)\cos W_2 \cos W_3 \\ & + 2\sin(xy)\sin(yz)\cos(zx)\cos W_3 \cos W_1 \end{aligned}$$

der:

$$\begin{aligned} \ldots\ldots N = \; & \sin\alpha_1^2 \cos W_1^2 \\ & + \sin\alpha_2^2 \cos W_2^2 \\ & + \sin\alpha_3^2 \cos W_3^2 \\ & + 2\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \cos W_1 \cos W_2 \\ & + 2\cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos W_2 \cos W_3 \\ & + 2\sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \cos W_3 \cos W_1, \end{aligned}$$

deren weiterer Umgestaltung wir uns jetzt nicht aufhalten
len.

§. 4.

Wir wollen jetzt die Entfernung E zweier Punkte P' und P''
Raume durch ihre tetraedrischen Coordinaten p_0', p_1', p_2', p_3'
p_0'', p_1'', p_2'', p_3'' ausdrücken.

Bezeichnen wir die cartesischen Coordinaten der Punkte P'
P'' in dem Systeme der xyz durch x', y', z' und x'', y'', z'';
ist nach der Formel a. a. O. S. 132. 18):

$$\begin{aligned} = (x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2 & + 2(x'-x'')(y'-y'')\cos\alpha_3 \\ & + 2(y'-y'')(z'-z'')\cos\alpha_1 \\ & + 2(z'-z'')(x'-x'')\cos\alpha_2, \end{aligned}$$

o, weil nach 10):

$$x' = \frac{p_1' \sin\alpha_1}{\sqrt{N}}, \qquad y' = \frac{p_2' \sin\alpha_2}{\sqrt{N}}, \qquad z' = \frac{p_3' \sin\alpha_3}{\sqrt{N}};$$

$$x'' = \frac{p_1'' \sin\alpha_1}{\sqrt{N}}, \qquad y'' = \frac{p_2'' \sin\alpha_2}{\sqrt{N}}, \qquad z'' = \frac{p_3'' \sin\alpha_3}{\sqrt{N}}$$

$$29) \ldots E^2 = \frac{(p_1'-p_1'')^2 \sin\alpha_1^2}{N} + \frac{(p_2'-p_2'')\sin\alpha_2^2}{N} + \frac{(p_3'-p_3'')\sin\alpha_3^2}{N} + \frac{2(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'')\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3}{N} + \frac{2(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'')\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3}{N} + \frac{2(p_3'-p_3'')(p_1'-p_1'')\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3}{N}.$$

Nach 12) ist aber:

$$p_0'-p_0''+\frac{G\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}(p_1'-p_1'')+\frac{G\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}(p_2'-p_2'')+\frac{G\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}(p_3'-p_3'')$$

wo wir für $\frac{G}{\sqrt{N}}$ absichtlich nicht den abgekürzten Ausdruck setzen wollen. Multiplicirt man nun diese Gleichung nach Reihe mit

$$p_1'-p_1'', \quad p_2'-p_2'', \quad p_3'-p_3'';$$

so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}(p_0'-p_0'')(p_1'-p_1'') &+ \frac{G\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}(p_1'-p_1'')^2 \\ &+ \frac{G\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'') \\ &+ \frac{G\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}(p_3'-p_3'')(p_1'-p_1'')\end{aligned}\right\} =$$

$$\left.\begin{aligned}(p_0'-p_0'')(p_2'-p_2'') &+ \frac{G\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'') \\ &+ \frac{G\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}(p_2'-p_2'')^2 \\ &+ \frac{G\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'')\end{aligned}\right\} =$$

$$\left.\begin{aligned}(p_0'-p_0'')(p_3'-p_3'') &+ \frac{G\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}(p_3'-p_3'')(p_1'-p_1'') \\ &+ \frac{G\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'') \\ &+ \frac{G\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}(p_3'-p_3'')^2\end{aligned}\right\} =$$

folglich:

$$\frac{G\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}(p_1'-p_1'')^2 = -(p_0'-p_0'')(p_1'-p_1'') - \frac{G\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'') - \frac{G\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}(p_3'-p_3'')(p_1'-p_1''),$$

$$\frac{G\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}(p_2'-p_2'')^2 = -(p_0'-p_0'')(p_2'-p_2'') - \frac{G\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'') - \frac{G\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2''),$$

$$\frac{G\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}(p_3'-p_3'')^2 = -(p_0'-p_0'')(p_3'-p_3'') - \frac{G\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}(p_3'-p_3'')(p_1'-p_1'') - \frac{G\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'');$$

also:

$$(p_1'-p_1'')^2\sin\alpha_1^2 = -\frac{a_{01}\sqrt{N}}{G}(p_0'-p_0'')(p_1'-p_1'')\sin\alpha_1 - \frac{a_{01}}{a_{02}}(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'')\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - \frac{a_{01}}{a_{03}}(p_1'-p_1'')(p_3'-p_3'')\sin\alpha_1\sin\alpha_3,$$

$$(p_2'-p_2'')^2\sin\alpha_2^2 = -\frac{a_{02}\sqrt{N}}{G}(p_0'-p_0'')(p_2'-p_2'')\sin\alpha_2 - \frac{a_{02}}{a_{01}}(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'')\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - \frac{a_{02}}{a_{03}}(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'')\sin\alpha_2\sin\alpha_3,$$

$$(p_3'-p_3'')^2\sin\alpha_3^2 = -\frac{a_{03}\sqrt{N}}{G}(p_0'-p_0'')(p_3'-p_3'')\sin\alpha_3 - \frac{a_{03}}{a_{01}}(p_1'-p_1'')(p_3'-p_3'')\sin\alpha_1\sin\alpha_3 - \frac{a_{03}}{a_{02}}(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'')\sin\alpha_2\sin\alpha_3.$$

Führt man nun diese Ausdrücke in den aus 29) sich sogleich ergebenden Ausdruck von NE^2 ein, so erhält man mittelst früherer Formeln leicht Folgendes:

Der Factor von $(p_1' - p_1'')(p_2' - p_2'')$ ist:

$$2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 - \frac{a_{01}}{a_{02}}\sin\alpha_1\sin\alpha_2 - \frac{a_{02}}{a_{01}}\sin\alpha_1\sin\alpha_2$$
$$= -\frac{a_{01}^2 + a_{02}^2 - 2a_{01}a_{02}\cos\alpha_3}{a_{01}a_{02}}\sin\alpha_1\sin\alpha_2$$
$$= -\frac{a_{12}^2}{a_{01}a_{02}}\cdot\frac{2F_1}{a_{02}a_{03}}\cdot\frac{2F_2}{a_{03}a_{01}}$$
$$= -\frac{4a_{12}^2F_1F_2}{a_{01}^2a_{02}^2a_{03}^2} = -4a_{12}^2F_1F_2\cdot\frac{N}{36V^2} = -\frac{a_{12}^2NF_1F_2}{9V^2}.$$

Der Factor von $(p_1' - p_1'')(p_3' - p_3'')$ ist:

$$2\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3 - \frac{a_{01}}{a_{03}}\sin\alpha_1\sin\alpha_3 - \frac{a_{03}}{a_{01}}\sin\alpha_1\sin\alpha_3$$
$$= -\frac{a_{01}^2 + a_{03}^2 - 2a_{01}a_{03}\cos\alpha_2}{a_{01}a_{03}}\sin\alpha_1\sin\alpha_3$$
$$= -\frac{a_{13}^2}{a_{01}a_{03}}\cdot\frac{2F_1}{a_{02}a_{03}}\cdot\frac{2F_3}{a_{01}a_{02}}$$
$$= -\frac{4a_{13}^2F_1F_3}{a_{01}^2a_{02}^2a_{03}^2} = -4a_{13}^2F_1F_3\cdot\frac{N}{36V^2} = -\frac{a_{13}^2NF_1F_3}{9V^2}.$$

Der Factor von $(p_2' - p_2'')(p_3' - p_3'')$ ist:

$$2\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 - \frac{a_{02}}{a_{03}}\sin\alpha_2\sin\alpha_3 - \frac{a_{03}}{a_{02}}\sin\alpha_2\sin\alpha_3$$
$$= -\frac{a_{02}^2 + a_{03}^2 - 2a_{02}a_{03}\cos\alpha_1}{a_{02}a_{03}}\sin\alpha_2\sin\alpha_3$$
$$= -\frac{a_{23}^2}{a_{02}a_{03}}\cdot\frac{2F_2}{a_{03}a_{01}}\cdot\frac{2F_3}{a_{01}a_{02}}$$
$$= -\frac{4a_{23}^2F_2F_3}{a_{01}^2a_{02}^2a_{03}^2} = -4a_{23}^2F_2F_3\cdot\frac{N}{36V^2} = -\frac{a_{23}^2NF_2F_3}{9V^2}$$

Ferner ist:

$$\frac{a_{01}\sqrt{N}}{G}\sin\alpha_1 = a_{01}\sqrt{N}\cdot\frac{F_0}{3V}\cdot\frac{2F_1}{a_{02}a_{03}}$$
$$= \frac{2a_{01}^2\sqrt{N}}{3a_{01}a_{02}a_{03}V}F_0F_1 = \frac{2a_{01}^2\sqrt{N}}{3V}\cdot\frac{\sqrt{N}}{6V}F_0F_1$$
$$= \frac{a_{01}^2NF_0F_1}{9V^2},$$

$$\frac{a_{02}\sqrt{N}}{G}\sin\alpha_2 = a_{02}\sqrt{N}\cdot\frac{F_0}{3V}\cdot\frac{2F_2}{a_{03}a_{01}}$$
$$= \frac{2a_{02}^2\sqrt{N}}{3a_{01}a_{02}a_{03}V}F_0F_2 = \frac{2a_{02}^2\sqrt{N}}{3V}\cdot\frac{\sqrt{N}}{6V}F_0F_2$$
$$= \frac{a_{02}^2NF_0F_2}{9V^2},$$

$$\frac{a_{03}\sqrt{N}}{G}\sin\alpha_3 = a_{03}\sqrt{N}\cdot\frac{F_0}{3V}\cdot\frac{2F_3}{a_{01}a_{02}}$$
$$= \frac{2a_{03}^2\sqrt{N}}{3a_{01}a_{02}a_{03}V}F_0F_3 = \frac{2a_{03}^2\sqrt{N}}{3V}\cdot\frac{\sqrt{N}}{6V}F_0F_3$$
$$= \frac{a_{03}^2NF_0F_3}{9V^2};$$

also sind in dem Ausdrucke von NE^2 die Factoren von

$(p_0'-p_0'')(p_1'-p_1'')$, $(p_0'-p_0'')(p_2'-p_2'')$, $(p_0'-p_0'')(p_3'-p_3'')$

beziehungsweise:

$$-\frac{a_{01}^2NF_0F_1}{9V^2},\quad -\frac{a_{02}^2NF_0F_2}{9V^2},\quad -\frac{a_{03}^2NF_0F_3}{9V^2}.$$

Daher erhalten wir jetzt den folgenden sehr merkwürdigen Ausdruck:

30) . . . . $9V^2E^2 = -a_{01}^2F_0F_1(p_0'-p_0'')(p_1'-p_1'')$
$-a_{02}^2F_0F_2(p_0'-p_0'')(p_2'-p_2'')$
$-a_{03}^2F_0F_3(p_0'-p_0'')(p_3'-p_3'')$
$-a_{12}^2F_1F_2(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'')$
$-a_{13}^2F_1F_3(p_1'-p_1'')(p_3'-p_3'')$
$-a_{23}^2F_2F_3(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'').$

Die tetraedrischen Coordinaten der Punkte

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

sind beziehungsweise:

$H_0, 0, 0, 0;\quad 0, H_1, 0, 0;\quad 0, 0, H_2, 0;\quad 0, 0, 0, H_3.$

Wenn wir nun die Entfernungen

$$E_0,\quad E_1,\quad E_2,\quad E_3$$

des Punktes $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ von den Punkten

$$A_0,\quad A_1,\quad A_2,\quad A_3$$

finden wollen, so müssen wir in der allgemeinen Formel 30) für

$$p_0'', \quad p_1'', \quad p_2'', \quad p_3''$$

nach und nach

$$\begin{matrix} H_0, & 0, & 0, & 0; \\ 0, & H_1, & 0, & 0; \\ 0, & 0, & H_2, & 0; \\ 0, & 0, & 0, & H_3 \end{matrix}$$

setzen, wodurch wir die folgenden Formeln erhalten:

31) . . . . . $9V^2E_0^2 = -a_{01}^2F_0F_1(p_0'-H_0)p_1'$
$-a_{02}^2F_0F_2(p_0'-H_0)p_2'$
$-a_{03}^2F_0F_3(p_0'-H_0)p_3'$
$-a_{12}^2F_1F_2p_1'p_2'$
$-a_{13}^2F_1F_3p_1'p_3'$
$-a_{23}^2F_2F_3p_2'p_3'$,

32) . . . . . $9V^2E_1^2 = -a_{01}^2F_0F_1p_0'(p_1'-H_1)$
$-a_{02}^2F_0F_2p_0'p_2'$
$-a_{03}^2F_0F_3p_0'p_3'$
$-a_{12}^2F_1F_2(p_1'-H_1)p_2'$
$-a_{13}^2F_1F_3(p_1'-H_1)p_3'$
$-a_{23}^2F_2F_3p_2'p_3'$,

33) . . . . . $9V^2E_2^2 = -a_{01}^2F_0F_1p_0'p_1'$
$-a_{02}^2F_0F_2p_0'(p_2'-H_2)$
$-a_{03}^2F_0F_3p_0'p_3'$
$-a_{12}^2F_1F_2p_1'(p_2'-H_2)$
$-a_{13}^2F_1F_3p_1'p_3'$
$-a_{23}^2F_2F_3(p_2'-H_2)p_3'$,

34) . . . . . $9V^2E_3^2 = -a_{01}^2F_0F_1p_0'p_1'$
$-a_{02}^2F_0F_2p_0'p_2'$
$-a_{03}^2F_0F_3p_0'(p_3'-H_3)$
$-a_{12}^2F_1F_2p_1'p_2'$
$-a_{13}^2F_1F_3p_1'(p_3'-H_3)$
$-a_{23}^2F_2F_3p_2'(p_3'-H_3)$.

Hieraus folgt durch Addition:

$$
\begin{aligned}
35) \ldots\ldots\ldots\ & 9V^2(E_0^2+E_1^2+E_2^2+E_3^2) \\
&= -a_{01}^2F_0F_1\{4p_0'p_1'-(p_1'H_0+p_0'H_1)\} \\
&\quad -a_{02}^2F_0F_2\{4p_0'p_2'-(p_2'H_0+p_0'H_2)\} \\
&\quad -a_{03}^2F_0F_3\{4p_0'p_3'-(p_3'H_0+p_0'H_3)\} \\
&\quad -a_{12}^2F_1F_2\{4p_1'p_2'-(p_2'H_1+p_1'H_2)\} \\
&\quad -a_{13}^2F_1F_3\{4p_1'p_3'-(p_3'H_1+p_1'H_3)\} \\
&\quad -a_{23}^2F_2F_3\{4p_2'p_3'-(p_3'H_2+p_2'H_3)\}.
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir die tetraedrischen Coordinaten des Mittelpunkts einer mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugelfläche durch $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$ und die tetraedrischen Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Kugelfläche durch p_0, p_1, p_2, p_3; so ist nach 30) die tetraedrische Gleichung dieser Kugelfläche:

$$
\begin{aligned}
36) \ldots\ldots\ 9V^2r^2 = & -a_{01}^2F_0F_1(p_0-\bar{\omega}_0)(p_1-\bar{\omega}_1) \\
& -a_{02}^2F_0F_2(p_0-\bar{\omega}_0)(p_2-\bar{\omega}_2) \\
& -a_{03}^2F_0F_3(p_0-\bar{\omega}_0)(p_3-\bar{\omega}_3) \\
& -a_{12}^2F_1F_2(p_1-\bar{\omega}_1)(p_2-\bar{\omega}_2) \\
& -a_{13}^2F_1F_3(p_1-\bar{\omega}_1)(p_3-\bar{\omega}_3) \\
& -a_{23}^2F_2F_3(p_2-\bar{\omega}_2)(p_3-\bar{\omega}_3)
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\left.
\begin{aligned}
37) \ldots\ldots\ 9V^2r^2 & + a_{01}^2F_0F_1(p_0-\bar{\omega}_0)(p_1-\bar{\omega}_1) \\
& + a_{02}^2F_0F_2(p_0-\bar{\omega}_0)(p_2-\bar{\omega}_2) \\
& + a_{03}^2F_0F_3(p_0-\bar{\omega}_0)(p_3-\bar{\omega}_3) \\
& + a_{12}^2F_1F_2(p_1-\bar{\omega}_1)(p_2-\bar{\omega}_2) \\
& + a_{13}^2F_1F_3(p_1-\bar{\omega}_1)(p_3-\bar{\omega}_3) \\
& + a_{23}^2F_2F_3(p_2-\bar{\omega}_2)(p_3-\bar{\omega}_3)
\end{aligned}
\right\} = 0.
$$

Wir werden auf diese Gleichung späterhin zurückkommen.

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie.

§. 5.

Die eine der beiden Richtungen einer geraden Linie im Raume schliesse mit den positiven Theilen der Axen der x, y, z die 180° nicht übersteigenden Winkel α, β, γ ein, und wie a. a. O. S. 134. 21) sei:

$$X = \mathfrak{A}\cos\alpha + C\cos\beta + B\cos\gamma,$$

$$Y = C\cos\alpha + \mathfrak{B}\cos\beta + A\cos\gamma,$$

$$Z = B\cos\alpha + A\cos\beta + \mathfrak{C}\cos\gamma;$$

geht dann diese gerade Linie durch den Punkt $(x'y'z')$, so sind (a. a. O. S. 134. 22), 23)) ihre Gleichungen:

$$\frac{x-x'}{X} = \frac{y-y'}{Y} = \frac{z-z'}{Z} = \frac{r}{N},$$

wo r die Entfernung des Punktes (xyz) von dem Punkte $(x'y'z')$ bezeichnet, indem man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem der Punkt (xyz) in dem der beiden von dem Punkte $(x'y'z')$ ausgehenden Theile der geraden Linie, welchem die Winkel α, β, γ entsprechen, oder in dem entgegengesetzten Theile derselben liegt.

Wie früher in §. 3. errichten wir auf die Seitenflächen

$$A_1A_2A_3, \quad A_2A_3A_0, \quad A_3A_0A_1, \quad A_0A_1A_2$$

oder

$$F_0, \quad F_1, \quad F_2, \quad F_3$$

des Fundamentaltetraeders nach dessen innerem Raume hin Perpendikel, und bezeichnen die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die durch die Winkel α, β, γ bestimmte Richtung unserer geraden Linie mit diesen Perpendikeln einschliesst, beziehungsweise durch

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \quad W_3.$$

Sind dann die tetraedrischen Coordinaten der Punkte (xyz) und $(x'y'z')$ beziehungsweise p_0, p_1, p_2, p_3 und p_0', p_1', p_2', p_3'; so ist nach 10):

$$x = \frac{p_1 \sin \alpha_1}{\sqrt{N}}, \quad y = \frac{p_2 \sin \alpha_2}{\sqrt{N}}, \quad z = \frac{p_3 \sin \alpha_3}{\sqrt{N}};$$

$$x' = \frac{p_1' \sin \alpha_1}{\sqrt{N}}, \quad y' = \frac{p_2' \sin \alpha_2}{\sqrt{N}}, \quad z' = \frac{p_3' \sin \alpha_3}{\sqrt{N}};$$

und nach 23) ist:

$$X = \sin \alpha_1 . \sqrt{N} . \cos W_1,$$

$$Y = \sin \alpha_2 . \sqrt{N} . \cos W_2,$$

$$Z = \sin \alpha_3 . \sqrt{N} . \cos W_3;$$

also sind die tetraedrischen Gleichungen unserer Geraden nach dem Obigen offenbar:

38) . . . . . $\frac{p_1 - p_1'}{\cos W_1} = \frac{p_2 - p_2'}{\cos W_2} = \frac{p_3 - p_3'}{\cos W_3} = r.$

Nach 19) ist nun:

$$\sqrt{\Gamma} . p_0 + \frac{\sin \alpha_1}{a_{01}} p_1 + \frac{\sin \alpha_2}{a_{02}} p_2 + \frac{\sin \alpha_3}{a_{03}} p_3 = \sqrt{N},$$

$$\sqrt{\Gamma} . p_0' + \frac{\sin \alpha_1}{a_{01}} p_1' + \frac{\sin \alpha_2}{a_{02}} p_2' + \frac{\sin \alpha_3}{a_{03}} p_3' = \sqrt{N};$$

also durch Subtraction:

$$\sqrt{\Gamma} . (p_0 - p_0') + \frac{\sin \alpha_1}{a_{01}} (p_1 - p_1') + \frac{\sin \alpha_2}{a_{02}} (p_2 - p_2') + \frac{\sin \alpha_3}{a_{03}} (p_3 - p_3') = 0,$$

folglich nach 38):

$$p_0 - p_0' = -\frac{r}{\sqrt{\Gamma}} \left(\frac{\sin \alpha_1 \cos W_1}{a_{01}} + \frac{\sin \alpha_2 \cos W_2}{a_{02}} + \frac{\sin \alpha_3 \cos W_3}{a_{03}} \right).$$

Nach 25) ist:

$$\cos W_0 = -\frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \left(\frac{\sin \alpha_1 \cos W_1}{a_{01}} + \frac{\sin \alpha_2 \cos W_2}{a_{02}} + \frac{\sin \alpha_3 \cos W_3}{a_{03}} \right).$$

Also ist durch Division:

$$\frac{p_0 - p_0'}{\cos W_0} = r,$$

und nach 38) sind folglich die tetraedrischen Gleichungen der Geraden:

39) . . . $\frac{p_0 - p_0'}{\cos W_0} = \frac{p_1 - p_1'}{\cos W_1} = \frac{p_2 - p_2'}{\cos W_2} = \frac{p_3 - p_3'}{\cos W_3} = r.$

Hiernach haben also die tetraedrischen Gleichungen der Geraden im Allgemeinen die Form:

$$40) \ldots\ldots \frac{p_0-p_0'}{J} = \frac{p_1-p_1'}{K} = \frac{p_2-p_2'}{L} = \frac{p_3-p_3'}{M},$$

wo aber, wenn λ einen beliebigen constanten Factor bezeichnet:

$$41) \ldots. J = \lambda\cos W_0,\ K = \lambda\cos W_1,\ L = \lambda\cos W_2,\ M = \lambda\cos W_3$$

sein muss; und da nun nach 26):

$$F_0\cos W_0 + F_1\cos W_1 + F_2\cos W_2 + F_3\cos W_3 = 0$$

ist, so ist:

$$42) \ldots\ldots\ldots F_0J + F_1K + F_2L + F_3M = 0.$$

Setzen wir ferner der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} 43) \ldots\ldots \Omega = {} & K^2\sin\alpha_1^2 + L^2\sin\alpha_2^2 + M^2\sin\alpha_3^2 \\ & + 2KL\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3 \\ & + 2LM\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3 \\ & + 2MK\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3, \end{aligned}$$

so ist nach 28):

$$\lambda^2 N = \Omega,$$

also:

$$44) \ldots\ldots\ldots\ldots \lambda = \pm\sqrt{\frac{\Omega}{N}}.$$

Da nach 39)

$$\frac{p_0-p_0'}{\cos W_0} = \frac{p_1-p_1'}{\cos W_1} = \frac{p_2-p_2'}{\cos W_2} = \frac{p_3-p_3'}{\cos W_3} = r,$$

und nach Vorstehendem:

$$\cos W_0 = \frac{J}{\lambda},\quad \cos W_1 = \frac{K}{\lambda},\quad \cos W_2 = \frac{L}{\lambda},\quad \cos W_3 = \frac{M}{\lambda}$$

ist; so ist:

$$45) \ldots \frac{p_0-p_0'}{J} = \frac{p_1-p_1'}{K} = \frac{p_2-p_2'}{L} = \frac{p_3-p_3'}{M} = \frac{r}{\lambda},$$

also nach 44):

$$46) \ldots\ldots \frac{p_0-p_0'}{J} = \frac{p_1-p_1'}{K} = \frac{p_2-p_2'}{L} = \frac{p_3-p_3'}{M} = \pm r\sqrt{\frac{N}{\Omega}}.$$

§. 6.

Wir wollen uns jetzt zwei gerade Linien im Raume denken, und wollen annehmen, dass zwei bestimmte Richtungen dieser beiden Geraden mit den auf gewöhnliche Weise auf die Seitenflächen des Fundamentaltetraeders errichteten Perpendikeln die 180° nicht übersteigenden Winkel

$$W_0',\ W_1',\ W_2',\ W_3' \quad \text{und} \quad W_0'',\ W_1'',\ W_2'',\ W_3''$$

einschliessen; der von diesen Richtungen der beiden Geraden eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel sei W. Lassen wir nun von dem Punkte A_0 zwei diesen beiden Richtungen entsprechende, nämlich parallele und nach denselben Seiten hin gezogene, Gerade ausgehen, so ist, wenn $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ und $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ zwei beliebige Punkte in diesen beiden Geraden sind, deren Entfernungen von dem Punkte A_0 wir beziehungsweise durch r' und r'' bezeichnen, nach 39):

$$\frac{p_0'-H_0}{\cos W_0'}=\frac{p_1'}{\cos W_1'}=\frac{p_2'}{\cos W_2'}=\frac{p_3'}{\cos W_3'}=r',$$

$$\frac{p_0''-H_0}{\cos W_0''}=\frac{p_1''}{\cos W_1''}=\frac{p_2''}{\cos W_2''}=\frac{p_3''}{\cos W_3''}=r''.$$

Nach 31) ist:

$$\begin{aligned}9V^2r'^2 = &-a_{01}{}^2F_0F_1(p_0'-H_0)p_1'\\ &-a_{02}{}^2F_0F_2(p_0'-H_0)p_2'\\ &-a_{03}{}^2F_0F_3(p_0'-H_0)p_3'\\ &-a_{12}{}^2F_1F_2p_1'p_2'\\ &-a_{13}{}^2F_1F_3p_1'p_3'\\ &-a_{23}{}^2F_2F_3p_2'p_3',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9V^2r''^2 = &-a_{01}{}^2F_0F_1(p_0''-H_0)p_1''\\ &-a_{02}{}^2F_0F_2(p_0''-H_0)p_2''\\ &-a_{03}{}^2F_0F_3(p_0''-H_0)p_3''\\ &-a_{12}{}^2F_1F_2p_1''p_2''\\ &-a_{13}{}^2F_1F_3p_1''p_3''\\ &-a_{23}{}^2F_2F_3p_2''p_3'';\end{aligned}$$

und bezeichnen wir die Entfernung der beiden Punkte $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ und $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ von einander durch r, so ist nach 30):

$$\begin{aligned}9V^2r^2 = &-a_{01}^2F_0F_1(p_0'-p_0'')(p_1'-p_1'')\\ &-a_{02}^2F_0F_2(p_0'-p_0'')(p_2'-p_2'')\\ &-a_{03}^2F_0F_3(p_0'-p_0'')(p_3'-p_3'')\\ &-a_{12}^2F_1F_2(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'')\\ &-a_{13}^2F_1F_3(p_1'-p_1'')(p_3'-p_3'')\\ &-a_{23}^2F_2F_3(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'').\end{aligned}$$

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist:

$$2r'r''\cos W = r'^2 + r''^2 - r^2,$$

also:

$$18V^2r'r''\cos W = 9V^2r'^2 + 9V^2r''^2 - 9V^2r^2,$$

und folglich nach den vorhergehenden Ausdrücken von

$$9V^2r'^2, \qquad 9V^2r''^2, \qquad 9V^2r^2,$$

wie man sogleich übersieht:

$$\begin{aligned}&18V^2r'r''\cos W\\ =&-a_{01}^2F_0F_1\{(p_0'-H_0)p_1'+(p_0''-H_0)p_1''-(p_0'-p_0'')(p_1'-p_1'')\}\\ &-a_{02}^2F_0F_2\{(p_0'-H_0)p_2'+(p_0''-H_0)p_2''-(p_0'-p_0'')(p_2'-p_2'')\}\\ &-a_{03}^2F_0F_3\{(p_0'-H_0)p_3'+(p_0''-H_0)p_3''-(p_0'-p_0'')(p_3'-p_3'')\}\\ &-a_{12}^2F_1F_2\{(p_1'p_2'+p_1''p_2''-(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'')\}\\ &-a_{13}^2F_1F_3\{(p_1'p_3'+p_1''p_3''-(p_1'-p_1'')(p_3'-p_3'')\}\\ &-a_{23}^2F_2F_3\{(p_2'p_3'+p_2''p_3''-(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3'')\},\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}&18V^2r'r''\cos W\\ =&-a_{01}^2F_0F_1\{(p_0'-H_0)p_1''+(p_0''-H_0)p_1'\}\\ &-a_{02}^2F_0F_2\{(p_0'-H_0)p_2''+(p_0''-H_0)p_2'\}\\ &-a_{03}^2F_0F_3\{(p_0'-H_0)p_3''+(p_0''-H_0)p_3'\}\\ &-a_{12}^2F_1F_2(p_1'p_2''+p_1''p_2')\\ &-a_{13}^2F_1F_3(p_1'p_3''+p_1''p_3')\\ &-a_{23}^2F_2F_3(p_2'p_3''+p_2''p_3').\end{aligned}$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\begin{aligned}p_0'-H_0 &= r'\cos W_0', & p_0''-H_0 &= r''\cos W_0'',\\ p_1' &= r'\cos W_1', & p_1'' &= r''\cos W_1'',\\ p_2' &= r'\cos W_2', & p_2'' &= r''\cos W_2'',\\ p_3' &= r'\cos W_3'; & p_3'' &= r''\cos W_3''\end{aligned}$$

so erhält man, wenn man diese Ausdrücke in die vorstehende Formel einführt und zugleich mit $r'r''$ auf beiden Seiten aufhebt, folgende merkwürdige Formel:

$$\begin{aligned}\ldots 18V^2\cos W = &-a_{01}{}^2F_0F_1(\cos W_0'\cos W_1'' + \cos W_0''\cos W_1')\\ &-a_{02}{}^2F_0F_2(\cos W_0'\cos W_2'' + \cos W_0''\cos W_2')\\ &-a_{03}{}^2F_0F_3(\cos W_0'\cos W_3'' + \cos W_0''\cos W_3')\\ &-a_{12}{}^2F_1F_2(\cos W_1'\cos W_2'' + \cos W_1''\cos W_2')\\ &-a_{13}{}^2F_1F_3(\cos W_1'\cos W_3'' + \cos W_1''\cos W_3')\\ &-a_{23}{}^2F_2F_3(\cos W_2'\cos W_3'' + \cos W_2''\cos W_3').\end{aligned}$$

Wenn die beiden Geraden parallel und nach derselben Seite hin gerichtet sind, so ist $W = 0$ und

$$W_0' = W_0'', \quad W_1' = W_1'', \quad W_2' = W_2'', \quad W_3' = W_3'';$$

also, wenn wir jetzt die Winkel, welche die beiden Geraden mit den auf die Seitenflächen des Fundamentaltetraeders errichteten Perpendikeln einschliessen, durch W_0, W_1, W_2, W_3 bezeichnen, nach der vorhergehenden Formel:

48) $$\begin{aligned}9V^2 = &-a_{01}{}^2F_0F_1\cos W_0\cos W_1\\ &-a_{02}{}^2F_0F_2\cos W_0\cos W_2\\ &-a_{03}{}^2F_0F_3\cos W_0\cos W_3\\ &-a_{12}{}^2F_1F_2\cos W_1\cos W_2\\ &-a_{13}{}^2F_1F_3\cos W_1\cos W_3\\ &-a_{23}{}^2F_2F_3\cos W_2\cos W_3.\end{aligned}$$

Wenn wir die durch die Winkel W_0, W_1, W_2, W_3 bestimmte Gerade einer Seitenfläche des Fundamentaltetraeders, etwa der Seitenfläche $A_1A_2A_3$ oder F_0, parallel sein lassen, so ist $W_0 = 90^0$, also $\cos W_0 = 0$, und folglich nach 48):

49) $$\begin{aligned}9V^2 = &-a_{12}{}^2F_1F_2\cos W_1\cos W_2\\ &-a_{13}{}^2F_1F_3\cos W_1\cos W_3\\ &-a_{23}{}^2F_2F_3\cos W_2\cos W_3.\end{aligned}$$

Wenn wir die durch die Winkel W_0, W_1, W_2, W_3 bestimmte Gerade einer Kante des Fundamentaltetraeders, etwa der Kante A_0A_1 oder a_{01}, parallel annehmen, so ist $W_2 = 90^0$, $W_3 = 90^0$, also $\cos W_2 = 0$, $\cos W_3 = 0$, folglich nach 48):

50) $$9V^2 = -a_{01}{}^2F_0F_1\cos W_0\cos W_1.$$

Weil nun aber nach 26)

$$F_0\cos W_0 + F_1\cos W_1 + F_2\cos W_2 + F_3\cos W_3 = 0,$$

also unter der gemachten Voraussetzung

$$F_0 \cos W_0 + F_1 \cos W_1 = 0,$$

folglich

$$F_1 \cos W_1 = -F_0 \cos W_0$$

ist, so ist:

$$9V^2 = a_{01}{}^2 F_0{}^2 \cos W_0{}^2,$$

also:

51) . . . . . $3V = \pm a_{01} F_0 \cos W_0,$

wenn man das obere oder das untere Zeichen nimmt, jenachdem der Winkel W_0 ein spitzer oder ein stumpfer Winkel ist. Mittelst einer sehr einfachen Betrachtung erhellet auf der Stelle, dass der absolute Werth von $a_{01} \cos W_0$ die Höhe des Tetraeders in Bezug auf die Seitenfläche F_0 ist, so dass also die vorstehende Formel nichts weiter als der Ausdruck des bekannten elementargeometrischen Satzes von dem Inhalte des Tetraeders oder der dreiseitigen Pyramide ist.

Die Bedingungsgleichung, dass die beiden im Vorhergehenden betrachteten Geraden auf einander senkrecht stehen, ist

$$W = 90^0, \quad \text{also} \quad \cos W = 0;$$

folglich nach 47):

52)

$$\left.\begin{aligned}
&a_{01}{}^2 F_0 F_1 (\cos W_0' \cos W_1'' + \cos W_0'' \cos W_1') \\
&+ a_{02}{}^2 F_0 F_2 (\cos W_0' \cos W_2'' + \cos W_0'' \cos W_2') \\
&+ a_{03}{}^2 F_0 F_3 (\cos W_0' \cos W_3'' + \cos W_0'' \cos W_3') \\
&+ a_{12}{}^2 F_1 F_2 (\cos W_1' \cos W_2'' + \cos W_1'' \cos W_2') \\
&+ a_{13}{}^2 F_1 F_3 (\cos W_1' \cos W_3'' + \cos W_1'' \cos W_3') \\
&+ a_{23}{}^2 F_2 F_3 (\cos W_2' \cos W_3'' + \cos W_2'' \cos W_3')
\end{aligned}\right\} = 0.$$

§. 7.

Wenn die Gleichungen der beiden im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Geraden die folgenden sind:

53)

$$\frac{p_0 - p_0'}{J'} = \frac{p_1 - p_1'}{K'} = \frac{p_2 - p_2'}{L'} = \frac{p_3 - p_3'}{M'},$$

$$\frac{p_0 - p_0''}{J''} = \frac{p_1 - p_1''}{K''} = \frac{p_2 - p_2''}{L''} = \frac{p_3 - p_3''}{M''};$$

so ist nach 41):

$$\cos W_0' = \frac{J'}{\lambda'}, \quad \cos W_1' = \frac{K'}{\lambda'}, \quad \cos W_2' = \frac{L'}{\lambda'}, \quad \cos W_3' = \frac{M'}{\lambda'};$$

$$\cos W_0'' = \frac{J''}{\lambda''}, \quad \cos W_1'' = \frac{K''}{\lambda''}, \quad \cos W_2'' = \frac{L''}{\lambda''}, \quad \cos W_3'' = \frac{M''}{\lambda''};$$

also nach 47):

$$\begin{aligned} 54) \ldots . \ 18\lambda'\lambda'' V^2 \cos W = &- a_{01}^2 F_0 F_1 (J'K'' + J''K') \\ &- a_{02}^2 F_0 F_2 (J'L'' + J''L') \\ &- a_{03}^2 F_0 F_3 (J'M'' + J''M') \\ &- a_{12}^2 F_1 F_2 (K'L'' + K''L') \\ &- a_{13}^2 F_1 F_3 (K'M'' + K''M') \\ &- a_{23}^2 F_2 F_3 (L'M'' + L''M'); \end{aligned}$$

wo, wenn wir nach 43):

55)

$$\begin{aligned} \Omega' = \ & K'^2 \sin\alpha_1^2 + L'^2 \sin\alpha_2^2 + M'^2 \sin\alpha_3^2 \\ & + 2K'L' \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \\ & + 2L'M' \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \\ & + 2M'K' \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega'' = \ & K''^2 \sin\alpha_1^2 + L''^2 \sin\alpha_2^2 + M''^2 \sin\alpha_3^2 \\ & + 2K''L'' \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 \\ & + 2L''M'' \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \\ & + 2M''K'' \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3 \end{aligned}$$

setzen, nach 44):

$$56) \ldots \ldots \ldots \ldots \lambda'\lambda'' = \pm \frac{\sqrt{\Omega'\Omega''}}{N}$$

ist.

Die Bedingungsgleichung der Perpendicularität der beiden durch die Gleichungen 53) charakterisirten Geraden ist nach 52):

$$57) \ldots \ldots \left.\begin{aligned} & a_{01}^2 F_0 F_1 (J'K'' + J''K') \\ + \ & a_{02}^2 F_0 F_2 (J'L'' + J''L') \\ + \ & a_{03}^2 F_0 F_3 (J'M'' + J''M') \\ + \ & a_{12}^2 F_1 F_2 (K'L'' + K''L') \\ + \ & a_{13}^2 F_1 F_3 (K'M'' + K''M') \\ + \ & a_{23}^2 F_2 F_3 (L'M'' + L''M') \end{aligned}\right\} = 0.$$

Wenn die Gleichungen einer durch die Winkel W_0, W_1, W_2, W_3 bestimmten Geraden:

$$58) \quad \ldots \ldots \frac{p_0 - p_0'}{J} = \frac{p_1 - p_1'}{K} = \frac{p_2 - p_2'}{L} = \frac{p_3 - p_3'}{M}$$

sind, so ist

$$\cos W_0 = \frac{J}{\lambda}, \quad \cos W_1 = \frac{K}{\lambda}, \quad \cos W_2 = \frac{L}{\lambda}, \quad \cos W_3 = \frac{M}{\lambda};$$

und folglich nach 48):

$$59) \quad \ldots \ldots \ldots \quad 9\lambda^2 V^2 = \begin{aligned} &- a_{01}{}^2 F_0 F_1 JK \\ &- a_{02}{}^2 F_0 F_2 JL \\ &- a_{03}{}^2 F_0 F_3 JM \\ &- a_{12}{}^2 F_1 F_2 KL \\ &- a_{13}{}^2 F_1 F_3 KM \\ &- a_{23}{}^2 F_2 F_3 LM, \end{aligned}$$

wo, für:

$$60) \quad \ldots \ldots \quad \Omega = \begin{aligned} &K^2 \sin \alpha_1{}^2 + L^2 \sin \alpha_2{}^2 + M^2 \sin \alpha_3{}^2 \\ &+ 2KL \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ &+ 2LM \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ &+ 2MK \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \sin \alpha_3, \end{aligned}$$

nach 44):

$$61) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \lambda^2 = \frac{\Omega}{N}$$

ist.

§. 8.

Wir wollen jetzt die Gleichungen einer Geraden suchen, welche durch zwei gegebene Punkte $(p_0' p_1' p_2' p_3')$ und $(p_0'' p_1'' p_2'' p_3'')$ geht.

Weil die zu bestimmende Gerade durch den Punkt $(p_0' p_1' p_2' p_3')$ gehen soll, so haben nach dem Vorhergehenden ihre Gleichungen die Form:

$$\frac{p_0 - p_0'}{J} = \frac{p_1 - p_1'}{K} = \frac{p_2 - p_2'}{L} = \frac{p_3 - p_3'}{M},$$

wo

$$F_0 J + F_1 K + F_2 L + F_3 M = 0$$

ist. Da nun aber diese Gerade auch durch den Punkt $(p_0'' p_1'' p_2'' p_3'')$ gehen soll, so muss

$$\frac{p_0''-p_0'}{J}=\frac{p_1''-p_1'}{K}=\frac{p_2''-p_2'}{L}=\frac{p_3''-p_3'}{M}$$

sein, so dass, wenn k einen gewissen Factor bezeichnet:

$$J=k(p_0'-p_0''),\qquad K=k(p_1'-p_1''),$$
$$L=k(p_2'-p_2''),\qquad M=k(p_3'-p_3'')$$

ist. Folglich sind nach dem Obigen die Gleichungen der durch die beiden gegebenen Punkte gehenden Geraden:

62) . . . $$\frac{p_0-p_0'}{p_0'-p_0''}=\frac{p_1-p_1'}{p_1'-p_1''}=\frac{p_2-p_2'}{p_2'-p_2''}=\frac{p_3-p_3'}{p_3'-p_3''},$$

und natürlich ganz eben so:

63) . . . $$\frac{p_0-p_0''}{p_0'-p_0''}=\frac{p_1-p_1''}{p_1'-p_1''}=\frac{p_2-p_2''}{p_2'-p_2''}=\frac{p_3-p_3''}{p_3'-p_3''},$$

wo nach dem Obigen:

$$F_0(p_0'-p_0'')+F_1(p_1'-p_1'')+F_2(p_2'-p_2'')+F_3(p_3'-p_3'')=0$$

ist, wie sich auch von selbst versteht, weil nach 20) bekanntlich:

$$F_0p_0'+F_1p_1'+F_2p_2'+F_3p_3'=3V,$$
$$F_0p_0''+F_1p_1''+F_2p_2''+F_3p_3''=3V$$

ist.

§. 9.

Wir suchen jetzt die Bedingungen der Parallellität zweier durch die Gleichungen:

64) . . . $$\begin{cases}\dfrac{p_0-p_0'}{J'}=\dfrac{p_1-p_1'}{K'}=\dfrac{p_2-p_2'}{L'}=\dfrac{p_3-p_3'}{M'},\\ \dfrac{p_0-p_0''}{J''}=\dfrac{p_1-p_1''}{K''}=\dfrac{p_2-p_2''}{L''}=\dfrac{p_3-p_3''}{M''}\end{cases}$$

charakterisirten geraden Linien.

Nach 10) ist:

$$p_1=\frac{x\sqrt{N}}{\sin\alpha_1},\qquad p_2=\frac{y\sqrt{N}}{\sin\alpha_2},\qquad p_3=\frac{z\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}$$

und:

$$p_1' = \frac{x'\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}, \quad p_2' = \frac{y'\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}, \quad p_3' = \frac{z'\sqrt{N}}{\sin\alpha_3};$$

$$p_1'' = \frac{x''\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}, \quad p_2'' = \frac{y''\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}, \quad p_3'' = \frac{z''\sqrt{N}}{\sin\alpha_3};$$

also sind nach 64) die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden in cartesischen Coordinaten:

$$\frac{\frac{x\sqrt{N}}{\sin\alpha_1} - \frac{x'\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}}{K'} = \frac{\frac{y\sqrt{N}}{\sin\alpha_2} - \frac{y'\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}}{L'} = \frac{\frac{z\sqrt{N}}{\sin\alpha_3} - \frac{z'\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}}{M'},$$

$$\frac{\frac{x\sqrt{N}}{\sin\alpha_1} - \frac{x''\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}}{K''} = \frac{\frac{y\sqrt{N}}{\sin\alpha_2} - \frac{y''\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}}{L''} = \frac{\frac{z\sqrt{N}}{\sin\alpha_3} - \frac{z''\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}}{M''};$$

folglich:

$$\frac{x-x'}{K'\sin\alpha_1} = \frac{y-y'}{L'\sin\alpha_2} = \frac{z-z'}{M'\sin\alpha_3},$$

$$\frac{x-x''}{K''\sin\alpha_1} = \frac{y-y''}{L''\sin\alpha_2} = \frac{z-z''}{M''\sin\alpha_3}.$$

Folglich sind (a. a. O. S. 151. 58)) die Bedingungen der Parallellität der beiden Geraden:

$$\frac{K'\sin\alpha_1}{K''\sin\alpha_1} = \frac{L'\sin\alpha_2}{L''\sin\alpha_2} = \frac{M'\sin\alpha_3}{M''\sin\alpha_3},$$

also:

65) . . . . . $\frac{K'}{K''} = \frac{L'}{L''} = \frac{M'}{M''}$.

Daher ist nach einem bekannten einfachen arithmetischen Satze:

$$\frac{F_1K'}{F_1K''} = \frac{F_2L'}{F_2L''} = \frac{F_3M'}{F_3M''} = \frac{F_1K' + F_2L' + F_3M'}{F_1K'' + F_2L'' + F_3M''},$$

und folglich, weil bekanntlich

$$F_0J' + F_1K' + F_2L' + F_3M' = 0,$$

$$F_0J'' + F_1K'' + F_2L'' + F_3M'' = 0;$$

also:

$$F_0J' = -(F_1K' + F_2L' + F_3M'),$$

$$F_0J'' = -(F_1K'' + F_2L'' + F_3M'');$$

folglich:

$$\frac{F_0J'}{F_0J''} = \frac{F_1K' + F_2L' + F_3M'}{F_1K'' + F_2L'' + F_3M''}$$

ist:

$$\frac{F_0J'}{F_0J''} = \frac{F_1K'}{F_1K''} = \frac{F_2L'}{F_2L''} = \frac{F_3M'}{F_3M''};$$

also:

66) . . . . . $$\frac{J'}{J''} = \frac{K'}{K''} = \frac{L'}{L''} = \frac{M'}{M''},$$

welches die Bedingungen der Parallellität der beiden gegebenen Geraden sind, wobei aber sogleich aus der vorhergehenden Entwickelung ganz von selbst erhellet, dass man, wenn man nur irgend welche drei der vier vorstehenden Brüche oder Verhältnisse einander gleich setzt, die vollständigen Bedingungen der Parallellität der beiden Geraden erhält, weil dann die Gleichheit dieser drei Brüche oder Verhältnisse mit dem vierten von selbst folgt.

§. 10.

Es seien

$$\frac{p_0 - p_0'}{J'} = \frac{p_1 - p_1'}{K'} = \frac{p_2 - p_2'}{L'} = \frac{p_3 - p_3'}{M'}$$

die Gleichungen einer Geraden, ein gegebener Punkt sei $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$, und es soll nun durch diesen gegebenen Punkt eine der gegebenen Geraden parallele Gerade gelegt werden, wobei man nicht zu übersehen hat, dass

$$F_0J' + F_1K' + F_2L' + F_3M' = 0$$

ist.

Die Gleichungen jeder durch den Punkt $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ gehenden Geraden sind von der Form:

$$\frac{p_0 - p_0''}{J''} = \frac{p_1 - p_1''}{K''} = \frac{p_2 - p_2''}{L''} = \frac{p_3 - p_3''}{M''},$$

wo

$$F_0J'' + F_1K'' + F_2L'' + F_3M'' = 0$$

sein muss. Nach dem vorhergehenden Paragraphen sind die Bedingungen, dass diese durch den Punkt $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ gehende Gerade der gegebenen Geraden parallel ist:

$$\frac{J'}{J''} = \frac{K'}{K''} = \frac{L'}{L''} = \frac{M'}{M''}$$

oder

$$\frac{J''}{J'} = \frac{K''}{K'} = \frac{L''}{L'} = \frac{M''}{M'},$$

also, wenn δ einen beliebigen Factor bezeichnet:

$$J'' = \delta J', \quad K'' = \delta K', \quad L'' = \delta L', \quad M'' = \delta M';$$

und die Gleichungen der zu bestimmenden Geraden sind folglich:

$$\frac{p_0 - p_0''}{\delta J'} = \frac{p_1 - p_1''}{\delta K'} = \frac{p_2 - p_2''}{\delta L'} = \frac{p_3 - p_3''}{\delta M'};$$

also:

$$\frac{p_0 - p_0''}{J'} = \frac{p_1 - p_1''}{K'} = \frac{p_2 - p_2''}{L'} = \frac{p_3 - p_3''}{M'}.$$

Weil nach dem Obigen:

$$F_0 J'' = \delta F_0 J', \quad F_1 K'' = \delta F_1 K', \quad F_2 L'' = \delta F_2 L', \quad F_3 M'' = \delta F_3 M'$$

ist, so ist:

$$F_0 J'' + F_1 K'' + F_2 L'' + F_3 M'' = \delta(F_0 J' + F_1 K' + F_2 L' + F_3 M'),$$

folglich, weil nach dem Obigen

$$F_0 J' + F_1 K' + F_2 L' + F_3 M' = 0$$

ist:

$$F_0 J'' + F_1 K'' + F_2 L'' + F_3 M'' = 0,$$

wie es sein muss.

§. 11.

Wir wollen uns nun mit den Bedingungen des Schneidens zweier durch die Gleichungen:

$$67) \ldots \begin{cases} \frac{p_0 - p_0'}{J'} = \frac{p_1 - p_1'}{K'} = \frac{p_2 - p_2'}{L'} = \frac{p_3 - p_3'}{M'}, \\ \frac{p_0 - p_0''}{J''} = \frac{p_1 - p_1''}{K''} = \frac{p_2 - p_2''}{L''} = \frac{p_3 - p_3''}{M''} \end{cases}$$

charakterisirten Geraden beschäftigen.

Zuvor bemerken wir, dass bekanntlich:

$$68) \quad \begin{cases} F_0p_0' + F_1p_1' + F_2p_2' + F_3p_3' = 3V, \\ F_0p_0'' + F_1p_1'' + F_2p_2'' + F_3p_3'' = 3V; \end{cases}$$

also:

$$69) \quad F_0(p_0'-p_0'')+F_1(p_1'-p_1'')+F_2(p_2'-p_2'')+F_3(p_3'-p_3'')=0;$$

ferner dass bekanntlich:

$$70) \quad \begin{cases} F_0J' + F_1K' + F_2L' + F_3M' = 0, \\ F_0J'' + F_1K'' + F_2L'' + F_3M'' = 0; \end{cases}$$

also auch:

$$71) \quad F_0(J'-J'') + F_1(K'-K'') + F_2(L'-L'') + F_3(M'-M'') = 0$$

ist. Aus den zwei Gleichungen 70) ergeben sich, wenn man aus denselben nach und nach

$$F_3, \quad F_2, \quad F_1, \quad F_0$$

eliminirt, die vier folgenden Gleichungen:

$$72) \quad \begin{cases} F_0(J'M''-J''M')+F_1(K'M''-K''M')+F_2(L'M''-L''M') = 0, \\ F_0(J'L''-J''L')+F_1(K'L''-K''L')-F_3(L'M''-L''M') = 0, \\ F_0(J'K''-J''K')-F_2(K'L''-K''L')-F_3(K'M''-K''M') = 0, \\ F_1(J'K''-J''K')+F_2(J'L''-J''L')+F_3(J'M''-J''M') = 0. \end{cases}$$

Wenn nun die beiden durch die Gleichungen 67) charakterisirten Geraden sich wirklich schneiden sollen, wenn es für dieselben einen wirklichen Durchschnittspunkt, den wir der Kürze wegen durch $(p_0p_1p_2p_3)$ bezeichnen wollen, geben soll, so müssen sich p_0, p_1, p_2, p_3 so bestimmen lassen, dass durch ihre Werthe die zwei Gleichungen:

$$73) \quad \begin{cases} \frac{p_0-p_0'}{J'} = \frac{p_1-p_1'}{K'} = \frac{p_2-p_2'}{L'} = \frac{p_3-p_3'}{M'}, \\ \frac{p_0-p_0''}{J''} = \frac{p_1-p_1''}{K''} = \frac{p_2-p_2''}{L''} = \frac{p_3-p_3''}{M''} \end{cases}$$

vollständig erfüllt werden, wobei zugleich erforderlich ist, dass auch die Gleichung:

$$74) \quad F_0p_0 + F_1p_1 + F_2p_2 + F_3p_3 = 3V$$

erfüllt sei. Setzen wir aber:

$$75) \quad \begin{cases} \frac{p_0-p_0'}{J'} = \frac{p_1-p_1'}{K'} = \frac{p_2-p_2'}{L'} = \frac{p_3-p_3'}{M'} = r', \\ \frac{p_0-p_0''}{J''} = \frac{p_1-p_1''}{K''} = \frac{p_2-p_2''}{L''} = \frac{p_3-p_3''}{M''} = r''; \end{cases}$$

so wird es erforderlich sein, dass die zwei Grössen r', so bestimmen lassen, dass ihre Werthe den vier Gleichu

$$76) \quad \begin{cases} p_0' + J'r' = p_0'' + J''r'', \\ p_1' + K'r' = p_1'' + K''r'', \\ p_2' + L'r' = p_2'' + L''r'', \\ p_3' + M'r' = p_3'' + M''r''; \end{cases}$$

oder, was Dasselbe ist, den vier Gleichungen:

$$77) \quad \begin{cases} p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r', \\ p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r', \\ p_2' - p_2'' = L''r'' - L'r', \\ p_3' - p_3'' = M''r'' - M'r' \end{cases}$$

vollständig genügen, weil, wenn dies der Fall ist, dann im

$$78) \quad \begin{cases} p_0 = p_0' + J'r' = p_0'' + J''r'', \\ p_1 = p_1' + K'r' = p_1'' + K''r'', \\ p_2 = p_2' + L'r' = p_2'' + L''r'', \\ p_3 = p_3' + M'r' = p_3'' + M''r'' \end{cases}$$

gesetzt werden kann, woraus dann die Erfüllung der Gleic 75) von selbst folgt. Auch ist dann:

$$\begin{aligned} & F_0p_0 + F_1p_1 + F_2p_2 + F_3p_3 \\ = \; & F_0p_0' + F_1p_1' + F_2p_2' + F_3p_3' \\ & + (F_0J' + F_1K' + F_2L' + F_3M')r' \\ = \; & F_0p_0'' + F_1p_1'' + F_2p_2'' + F_3p_3'' \\ & + (F_0J'' + F_1K'' + F_2L'' + F_3M'')r'', \end{aligned}$$

also nach 68) und 70):

$$F_0p_0 + F_1p_1 + F_2p_2 + F_3p_3 = 3V,$$

wie es nach 74) sein muss.

Wir wollen nun annehmen, dass die beiden Geraden sich wirklich schneiden, dass es also einen Durchschnittspunkt $(p_0 p_1 p_2 p_3)$ wirklich gebe; dann finden die Gleichungen 75), 76), 77) wirklich Statt, und wir haben also die vier wirklich existirenden Gleichungen:

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r',$$
$$p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r',$$
$$p_2' - p_2'' = L''r'' - L'r',$$
$$p_3' - p_3'' = M''r'' - M'r'.$$

Wenn wir, um aus der

1sten, 2ten, 3ten; 1sten, 2ten, 4ten;

1sten, 3ten, 4ten; 2ten, 3ten, 4ten

dieser Gleichungen die Grössen r', r'' ganz zu eliminiren, die drei Gleichungen in jedem dieser vier Gleichungssysteme nach und nach mit den Grössen:

$$K'L'' - K''L' \quad L'J'' - L''J', \quad J'K'' - J''K';$$
$$K'M'' - K''M', \quad M'J'' - M''J', \quad J'K'' - J''K';$$
$$L'M'' - L''M', \quad M'J'' - M''J', \quad J'L'' - J''L';$$
$$L'M'' - L''M', \quad M'K'' - M''K', \quad K'L'' - K''L'$$

multipliciren, und die betreffenden Gleichungen dann zu einander addiren; so erhalten wir die vier folgenden Gleichungen:

79)

$$(K'L'' - K''L')(p_0' - p_0'') + (L'J'' - L''J')(p_1' - p_1'') + (J'K'' - J''K')(p_2' - p_2'') = 0,$$
$$(K'M'' - K''M')(p_0' - p_0'') + (M'J'' - M''J')(p_1' - p_1'') + (J'K'' - J''K')(p_3' - p_3'') = 0,$$
$$(L'M'' - L''M')(p_0' - p_0'') + (M'J'' - M''J')(p_2' - p_2'') + (J'L'' - J''L')(p_3' - p_3'') = 0,$$
$$(L'M'' - L''M')(p_1' - p_1'') + (M'K'' - M''K')(p_2' - p_2'') + (K'L'' - K''L')(p_3' - p_3'') = 0$$

oder:

80)

$$(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')+(J'K''-J''K')(p_2'-p_2'')=0,$$

$$(K'M''-K''M')(p_0'-p_0'')-(J'M''-J''M')(p_1'-p_1'')+(J'K''-J''K')(p_3'-p_3'')=0,$$

$$(L'M''-L''M')(p_0'-p_0'')-(J'M''-J''M')(p_2'-p_2'')+(J'L''-J''L')(p_3'-p_3'')=0,$$

$$(L'M''-L''M')(p_1'-p_1'')-(K'M''-K''M')(p_2'-p_2'')+(K'L''-K''L')(p_3'-p_3'')=0.$$

Es lässt sich zeigen, dass, wenn von diesen vier Gleichungen nur die eine erfüllt ist, dann immer, als eine unmittelbare Folge daraus, auch die drei anderen Gleichungen erfüllt sind.

Um dies zu zeigen, wollen wir annehmen, dass etwa die erste Gleichung erfüllt sei, dass also

$$(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')+(J'K''-J''K')(p_2'-p_2'')=0$$

sei; dann lässt sich unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Gleichungen 69) und 72) auf folgende Art schliessen.

Es ist:

$$F_2(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-F_2(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')+F_2(J'K''-J''K')(p_2'-p_2'')=0,$$

$$F_0(J'K''-J''K')(p_0'-p_0'')-F_2(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-F_3(K'M''-K''M')(p_0'-p_0'')=0,$$

$$F_1(J'K''-J''K')(p_1'-p_1'')+F_2(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')+F_3(J'M''-J''M')(p_1'-p_1'')=0;$$

also, wenn man addirt:

$$\left.\begin{aligned}&-F_3(K'M''-K''M')(p_0'-p_0'')+F_3(J'M''-J''M')(p_1'-p_1'')\\&+(J'K''-J''K')\{F_0(p_0'-p_0'')+F_1(p_1'-p_1'')+F_2(p_2'-p_2'')\}\end{aligned}\right\}=0,$$

folglich:

$$-F_3\{(K'M''-K''M')(p_0'-p_0'')-(J'M''-J''M')(p_1'-p_1'')+(J'K''-J''K')(p_3'-p_3'')\}=0,$$

und daher, wenn man mit dem nicht verschwindenden Factor $-F_3$ dividirt:

$$(K'M''-K''M')(p_0'-p_0'')-(J'M''-J''M')(p_1'-p_1'')$$
$$+(J'K''-J''K')(p_3'-p_3'')=0,$$

welches die zweite Gleichung in 80) ist.

Ferner ist:

$$F_1(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-F_1(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')$$
$$+F_1(J'K''-J''K')(p_2'-p_2'')=0,$$

$$F_0(J'L''-J''L')(p_0'-p_0'')+F_1(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')$$
$$-F_3(L'M''-L''M')(p_0'-p_0'')=0,$$

$$F_1(J'K''-J''K')(p_2'-p_2'')+F_2(J'L''-J''L')(p_2'-p_2'')$$
$$+F_3(J'M''-J''M')(p_2'-p_2'')=0;$$

also, wenn man von der ersten Gleichung die zweite und dritte Gleichung subtrahirt:

$$\left.\begin{array}{l}F_3(L'M''-L''M')(p_0'-p_0'')-F_3(J'M''-J''M')(p_2'-p_2'')\\ -(J'L''-J''L')\{F_0(p_0'-p_0'')+F_1(p_1'-p_1'')+F_2(p_2'-p_2'')\}\end{array}\right\}=0,$$

folglich:

$$F_3\{(L'M''-L''M')(p_0'-p_0'')-(J'M''-J''M')(p_2'-p_2'')$$
$$+(J'L''-J''L')(p_3'-p_3'')\}=0,$$

und daher, wenn man mit dem nicht verschwindenden Factor F_3 dividirt:

$$(L'M''-L''M')(p_0'-p_0'')-(J'M''-J''M')(p_2'-p_2'')$$
$$+(J'L''-J''L')(p_3'-p_3'')=0,$$

welches die dritte Gleichung in 80) ist.

Endlich ist:

$$F_0(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-F_0(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')$$
$$+F_0(J'K''-J''K')(p_2'-p_2'')=0,$$

$$F_0(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')+F_1(K'L''-K''L')(p_1'-p_1'')$$
$$-F_3(L'M''-L''M')(p_1'-p_1'')=0,$$

$$F_0(J'K''-J''K')(p_2'-p_2'')-F_2(K'L''-K''L')(p_2'-p_2'')$$
$$-F_3(K'M''-K''M')(p_2'-p_2'')=0;$$

also, wenn man zu der ersten Gleichung die zweite Gleichung addirt und dann die dritte Gleichung subtrahirt:

$$\left.\begin{array}{l} -F_3(L'M''-L''M')(p_1'-p_1'') + F_3(K'M''-K''M')(p_2'-p_2'') \\ +(K'L''-K''L')\{F_0(p_0'-p_0'')+F_1(p_1'-p_1'')+F_2(p_2'-p_2'')\} \end{array}\right\} = 0,$$

folglich:

$$-F_3\{(L'M''-L''M')(p_1'-p_1'')-(K'M''-K''M')(p_2'-p_2'') + (K'L''-K''L')(p_3'-p_3'')\} = 0,$$

und daher, wenn man mit dem nicht verschwindenden Factor $-F_3$ dividirt:

$$(L'M''-L''M')(p_1'-p_1'')-(K'M''-K''M')(p_2'-p_2'') + (K'L''-K''L')(p_3'-p_3'') = 0,$$

welches die vierte Gleichung in 80) ist.

Hierdurch ist also bewiesen, dass die vier Gleichungen 80) immer zugleich erfüllt sind.

Bezeichnet man die Functionen auf den linken Seiten der vier Gleichungen 80) nach der Reihe durch I, II, III, IV; so ergeben sich aus dem Vorhergehenden auch die drei folgenden Gleichungen:

$$81) \quad \left\{\begin{array}{l} F_2.\mathrm{I} = -F_3.\mathrm{II}, \\ F_1.\mathrm{I} = F_3.\mathrm{III}, \\ F_0.\mathrm{I} = -F_3.\mathrm{IV}. \end{array}\right.$$

Aus dem Bisherigen ergiebt sich nun aber auch, dass, wenn überhaupt die beiden durch die Gleichungen 67) charakterisirten Geraden sich schneiden sollen, die vier Gleichungen 80) erfüllt sein müssen, oder vielmehr das wichtige Resultat, dass, wenn diese vier Gleichungen nicht erfüllt sind, eigentlich wenn nur eine derselben nicht erfüllt ist, die beiden durch die Gleichungen 67) charakterisirten Geraden sich nicht schneiden werden. Bei jeder Untersuchung über das Schneiden der beiden in Rede stehenden Geraden wird man also unbedingt immer zuerst zu untersuchen haben, ob wenigstens eine der Gleichungen 80) erfüllt ist, indem, wenn dies nicht der Fall ist, man versichert ist, dass die beiden Geraden sich nicht schneiden. Auch bei der nun anzustellenden ferneren Untersuchung werden wir also anzunehmen haben, dass die vier Gleichungen 80) erfüllt sind.

Wenn die zwei Gleichungen:

$$82) \quad \left\{\begin{array}{l} p_0'-p_0'' = J''r''-J'r', \\ p_1'-p_1'' = K''r''-K'r' \end{array}\right.$$

erfüllt sind, so folgt aus denselben:

$$\begin{aligned}(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')\\ = \{J''(K'L''-K''L')-K''(J'L''-J''L')\}r''\\ -\{J'(K'L''-K''L')-K'(J'L''-J''L')\}r'\\ =-(J'K''-J''K')(L''r''-L'r'),\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')\\ +(J'K''-J''K')(L''r''-L'r')=0;\end{aligned}$$

und weil nun in Folge der vorher gemachten Voraussetzung nach 80)

$$\begin{aligned}(K'L''-K''L')(p_0'-p_0'')-(J'L''-J''L')(p_1'-p_1'')\\ +(J'K''-J''K')(p_2'-p_2'')=0\end{aligned}$$

ist, so folgt aus diesen beiden Gleichungen durch Subtraction:

$$(J'K''-J''K')\{(L''r''-L'r')-(p_2'-p_2'')\}=0,$$

also, wenn nicht

$$J'K''-J''K'=0$$

ist:

$$L''r''-L'r'-(p_2'-p_2'')=0$$

oder:

83) . . . . . $p_2'-p_2''=L''r''-L'r'$,

so dass also auch diese Gleichung unter den gemachten Voraussetzungen erfüllt ist, und folglich die drei Gleichungen:

84) . . . . . $\begin{cases} p_0'-p_0''=J''r''-J'r', \\ p_1'-p_1''=K''r''-K'r', \\ p_2'-p_2''=L''r''-L'r' \end{cases}$

Statt finden.

Wenn aber überhaupt diese drei Gleichungen erfüllt sind, so folgt aus denselben:

$$\begin{aligned}F_0(p_0'-p_0'')+F_1(p_1'-p_1'')+F_2(p_2'-p_2'')\\ =(F_0J''+F_1K''+F_2L'')r''-(F_0J'+F_1K'+F_2L')r',\end{aligned}$$

also nach 69) und 70):

$$-F_3(p_3'-p_3'')=-F_3M''r''+F_3M'r',$$

folglich; wenn man durch das nicht verschwindende $-F_3$ dividirt

85) . . . . . $p_3' - p_3'' = M''r'' - M'r'$,

so dass also auch diese Gleichung erfüllt ist, folglich überhaupt die vier Gleichungen:

86) . . . . . $\begin{cases} p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r', \\ p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r', \\ p_2' - p_2'' = L''r'' - L'r', \\ p_3' - p_3'' = M''r'' - M'r' \end{cases}$

erfüllt sind.

Wenn man nun aber aus den beiden Gleichungen:

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r',$$
$$p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r'$$

zuerst r'', dann r' eliminirt, so erhält man:

$$K''(p_0' - p_0'') - J''(p_1' - p_1'') = -(J'K'' - J''K')r',$$
$$K'(p_0' - p_0'') - J'(p_1' - p_1'') = -(J'K'' - J''K')r'';$$

also, wenn nicht

$$J'K'' - J''K' = 0$$

ist:

87) . . . . $\begin{cases} r' = -\dfrac{K''(p_0' - p_0'') - J''(p_1' - p_1'')}{J'K'' - J''K'}, \\ r'' = -\dfrac{K'(p_0' - p_0'') - J'(p_1' - p_1'')}{J'K'' - J''K'}; \end{cases}$

welches unter der gemachten Voraussetzung endliche völlig bestimmte Werthe sind.

Aus allem Bisherigen ergiebt sich nun ganz unzweideutig das Resultat, dass, wenn die nothwendigen Bedingungsgleichungen 80) erfüllt sind und nicht

$$J'K'' - J''K' = 0$$

ist, es für die beiden gegebenen Geraden immer einen Durchschnittspunkt giebt, dessen Coordinaten p_0, p_1, p_2, p_3 durch die Formeln 87) und 78) bestimmt werden.

Wenn nun aber

$$J'K'' - J''K' = 0$$

t, so ist nach 80):

$$(K'L'' - K''L')(p_0' - p_0'') - (J'L'' - J''L')(p_1' - p_1'') = 0,$$

lso:

$$(J'L'' - J''L')(p_1' - p_1'') = (K'L'' - K''L')(p_0' - p_0'');$$

nd ist nun die Gleichung

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r'$$

erfüllt, so ist:

$$\begin{aligned}(J'L'' - J''L')(p_1' - p_1'') &= (K'L'' - K''L')(J''r'' - J'r') \\ &= (K'L'' - K''L')J''r'' - (K'L'' - K''L')J'r' \\ &= \{(J'L'' - J''L')K'' - (J'K'' - J''K')L''\}r'' \\ &\quad - \{(J'L'' - J''L')K' - (J'K'' - J''K')L'\}r',\end{aligned}$$

lso, weil

$$J'K'' - J''K' = 0$$

ist:

$$(J'L'' - J''L')(p_1' - p_1'') = (J'L'' - J''L')(K''r'' - K'r'),$$

nd folglich, wenn nicht

$$J'L'' - J''L' = 0$$

ist:

$$p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r'.$$

Hieraus sieht man, dass in diesem Falle, wenn die Gleichung

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r'$$

erfüllt ist, unter der Voraussetzung, dass nicht

$$J'L'' - J''L' = 0$$

ist, dann immer auch die Gleichung:

$$p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r'$$

erfüllt ist. Wenn man nun aber aus den Gleichungen:

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r',$$

$$p_2' - p_2'' = L''r'' - L'r'$$

zuerst r'', dann r' eliminirt, so erhält man:

$$L''(p_0' - p_0'') - J''(p_2' - p_2'') = -(J'L'' - J''L')r',$$
$$L'(p_0' - p_0'') - J'(p_2' - p_2'') = -(J'L'' - J''L')r'';$$

also, wenn nicht

$$J'L'' - J''L' = 0$$

ist:

88) . . . .
$$\begin{cases} r' = -\dfrac{L''(p_0' - p_0'') - J''(p_2' - p_2'')}{J'L'' - J''L'}, \\ r'' = -\dfrac{L'(p_0' - p_0'') - J'(p_2' - p_2'')}{J'L'' - J''L'}; \end{cases}$$

welches unter der gemachten Voraussetzung endliche völlig bestimmte Werthe von r' und r'' sind, durch welche die Gleichungen:

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r',$$
$$p_2' - p_2'' = L''r'' - L'r'$$

erfüllt werden. Dann ist aber nach dem Vorhergehenden auch die Gleichung

$$p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r'$$

erfüllt, und es sind also die drei Gleichungen

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r',$$
$$p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r',$$
$$p_2' - p_2'' = L''r'' - L'r'$$

erfüllt, aus denen sich dann ferner ganz ebenso wie oben die Gleichung

$$p_3' - p_3'' = M''r'' - M'r'$$

ergiebt, so dass also nun wieder die vier Gleichungen:

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r',$$
$$p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r',$$
$$p_2' - p_2'' = L''r'' - L'r',$$
$$p_3' - p_3'' = M''r'' - M'r'$$

vollständig erfüllt sind, es folglich nach dem Obigen einen Durch-

schnittspunkt der beiden Geraden giebt, dessen Coordinaten p_0, p_1, p_2, p_3 durch die Formeln 88) und 78) bestimmt werden.

Wenn daher die nothwendigen Bedingungsgleichungen 80) erfüllt sind, und

$$J'K'' - J''K' = 0,$$

aber nicht

$$J'L'' - J''L' = 0$$

ist, so giebt es für die beiden gegebenen Geraden immer einen Durchschnittspunkt, dessen Coordinaten p_0, p_1, p_2, p_3 durch die Formeln 88) und 78) bestimmt werden.

Wenn endlich

$$J'K'' - J''K' = 0,$$
$$J'L'' - J''L' = 0$$

ist, so ist:

$$\frac{J'}{J''} = \frac{K'}{K''} = \frac{L'}{L''},$$

welches nach 66) in §. 9. die Bedingungen der Parallellität der beiden Geraden sind, für die es also in diesem Falle keinen Durchschnittspunkt giebt.

Um einem leicht möglichen Missverständnisse zu begegnen, bemerken wir, dass, wenn die nothwendigen Bedingungsgleichungen 80) nicht erfüllt sind, die beiden Geraden sich durchkreuzen können, ohne sich wirklich zu schneiden.

Die als erfüllt vorausgesetzten vier Gleichungen:

$$p_0' - p_0'' = J''r'' - J'r',$$
$$p_1' - p_1'' = K''r'' - K'r',$$
$$p_2' - p_2'' = L''r'' - L'r',$$
$$p_3' - p_3'' = M''r'' - M'r'$$

lassen sich auf verschiedene Arten zu dreien combiniren; nimmt man z. B. die drei ersten, so erhält man:

$$(K'' - L'')(p_0' - p_0'') + (L'' - J'')(p_1' - p_1'') + (J'' - K'')(p_2' - p_2'')$$
$$= \{J''(K'' - L'') + K''(L'' - J'') + L''(J'' - K'')\}r''$$
$$-\{J'(K'' - L'') + K'(L'' - J'') + L'(J'' - K'')\}r',$$

$$(K'-L')(p_0'-p_0'')+(L'-J')(p_1'-p_1'')+(J'-K')(p_2'-p_2'')$$
$$=\{J''(K'-L')+K''(L'-J')+L''(J'-K')\}r''$$
$$-\{J'(K'-L')+K'(L'-J')+L'(J'-K')\}r';$$

also:

89)

$$(K''-L'')(p_0'-p_0'')+(L''-J'')(p_1'-p_1'')+(J''-K'')(p_2'-p_2'')$$
$$=-\{(J'K''-J''K')+(K'L''-K''L')+(L'J''-L''J')\}r',$$

$$(K'-L')(p_0'-p_0'')+(L'-J')(p_1'-p_1'')+(J'-K')(p_2'-p_2'')$$
$$=-\{(J'K''-J''K')+(K'L''-K''L')+(L'J''-L''J')\}r''.$$

§. 12.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Geraden über, welche durch einen gegebenen Punkt geht und auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht.

Die Gleichungen der gegebenen Geraden seien:

$$\frac{p_0-p_0'}{J'}=\frac{p_1-p_1'}{K'}=\frac{p_2-p_2'}{L'}=\frac{p_3-p_3'}{M'},$$

und p_0'', p_1'', p_2'', p_3'' seien die Coordinaten des gegebenen Punktes.

Da die zu bestimmende Gerade durch den Punkt $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ gehen soll, so haben ihre Gleichungen die Form:

$$\frac{p_0-p_0''}{J''}=\frac{p_1-p_1''}{K''}=\frac{p_2-p_2''}{L''}=\frac{p_3-p_3''}{M''}.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunkts der zu bestimmenden Geraden mit der gegebenen Geraden der Kürze wegen durch p_0, p_1, p_2, p_3 selbst, so haben wir nach den vorstehenden Gleichungen die folgenden Gleichungen zwischen diesen Coordinaten:

90) ....
$$\begin{cases}\dfrac{p_0-p_0'}{J'}=\dfrac{p_1-p_1'}{K'}=\dfrac{p_2-p_2'}{L'}=\dfrac{p_3-p_3'}{M'}=r',\\[2ex] \dfrac{p_0-p_0''}{J''}=\dfrac{p_1-p_1''}{K''}=\dfrac{p_2-p_2''}{L''}=\dfrac{p_3-p_3''}{M''}=r''.\end{cases}$$

Weil die zu bestimmende Gerade auf der gegebenen Geraden senkrecht stehen soll, so muss nach 57) die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &a_{01}{}^2F_0F_1(J'K'' + J''K') \\ +\,&a_{02}{}^2F_0F_2(J'L'' + J''L') \\ +\,&a_{03}{}^2F_0F_3(J'M'' + J''M') \\ +\,&a_{12}{}^2F_1F_2(K'L'' + K''L') \\ +\,&a_{13}{}^2F_1F_3(K'M'' + K''M') \\ +\,&a_{23}{}^2F_2F_3(L'M'' + L''M') \end{aligned}\right\} = 0$$

tatt finden. Weil nun aber nach 90)

91)

$$J'' = \frac{1}{r''}(p_0 - p_0''), \quad K'' = \frac{1}{r''}(p_1 - p_1''),$$

$$L'' = \frac{1}{r''}(p_2 - p_2''), \quad M'' = \frac{1}{r''}(p_3 - p_3'')$$

t, so wird diese Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &a_{01}{}^2F_0F_1\{J'(p_1 - p_1'') + K'(p_0 - p_0'')\} \\ +\,&a_{02}{}^2F_0F_2\{J'(p_2 - p_2'') + L'(p_0 - p_0'')\} \\ +\,&a_{03}{}^2F_0F_3\{J'(p_3 - p_3'') + M'(p_0 - p_0'')\} \\ +\,&a_{12}{}^2F_1F_2\{K'(p_2 - p_2'') + L'(p_1 - p_1'')\} \\ +\,&a_{13}{}^2F_1F_3\{K'(p_3 - p_3'') + M'(p_1 - p_1'')\} \\ +\,&a_{23}{}^2F_2F_3\{L'(p_3 - p_3'') + M'(p_2 - p_2'')\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

so:

$$\begin{aligned} &a_{01}{}^2F_0F_1\{J'(p_1 - p_1') + K'(p_0 - p_0')\} \\ +\,&a_{02}{}^2F_0F_2\{J'(p_2 - p_2') + L'(p_0 - p_0')\} \\ +\,&a_{03}{}^2F_0F_3\{J'(p_3 - p_3') + M'(p_0 - p_0')\} \\ +\,&a_{12}{}^2F_1F_2\{K'(p_2 - p_2') + L'(p_1 - p_1')\} \\ +\,&a_{13}{}^2F_1F_3\{K'(p_3 - p_3') + M'(p_1 - p_1')\} \\ +\,&a_{23}{}^2F_2F_3\{L'(p_3 - p_3') + M'(p_2 - p_2')\} \\ = \;&a_{01}{}^2F_0F_1\{J'(p_1'' - p_1') + K'(p_0'' - p_0')\} \\ +\,&a_{02}{}^2F_0F_2\{J'(p_2'' - p_2') + L'(p_0'' - p_0')\} \\ +\,&a_{03}{}^2F_0F_3\{J'(p_3'' - p_3') + M'(p_0'' - p_0')\} \\ +\,&a_{12}{}^2F_1F_2\{K'(p_2'' - p_2') + L'(p_1'' - p_1')\} \\ +\,&a_{13}{}^2F_1F_3\{K'(p_3'' - p_3') + M'(p_1'' - p_1')\} \\ +\,&a_{23}{}^2F_2F_3\{L'(p_3'' - p_3') + M'(p_2'' - p_2')\}, \end{aligned}$$

folglich, weil nach 90)

92)

$$p_0 - p_0' = J'r', \quad p_1 - p_1' = K'r', \quad p_2 - p_2' = L'r', \quad p_3 - p_3' = M'r'$$

ist:

$$93) \quad \left.\begin{array}{l} 2a_{01}^2F_0F_1J'K' \\ +2a_{02}^2F_0F_2J'L' \\ +2a_{03}^2F_0F_3J'M' \\ +2a_{12}^2F_1F_2K'L' \\ +2a_{13}^2F_1F_3K'M' \\ +2a_{23}^2F_2F_3L'M' \end{array}\right\} r'$$

$$\begin{aligned} = \; & a_{01}^2F_0F_1\{J'(p_1''-p_1')+K'(p_0''-p_0')\} \\ & +a_{02}^2F_0F_2\{J'(p_2''-p_2')+L'(p_0''-p_0')\} \\ & +a_{03}^2F_0F_3\{J'(p_3''-p_3')+M'(p_0''-p_0')\} \\ & +a_{12}^2F_1F_2\{K'(p_2''-p_2')+L'(p_1''-p_1')\} \\ & +a_{13}^2F_1F_3\{K'(p_3''-p_3')+M'(p_1''-p_1')\} \\ & +a_{23}^2F_2F_3\{L'(p_3''-p_3')+M'(p_2''-p_2')\}, \end{aligned}$$

also, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{aligned} 94) \ldots Q = \; & a_{01}^2F_0F_1\{J'(p_1''-p_1')+K'(p_0''-p_0')\} \\ & +a_{02}^2F_0F_2\{J'(p_2''-p_2')+L'(p_0''-p_0')\} \\ & +a_{03}^2F_0F_3\{J'(p_3''-p_3')+M'(p_0''-p_0')\} \\ & +a_{12}^2F_1F_2\{K'(p_2''-p_2')+L'(p_1''-p_1')\} \\ & +a_{13}^2F_1F_3\{K'(p_3''-p_3')+M'(p_1''-p_1')\} \\ & +a_{23}^2F_2F_3\{L'(p_3''-p_3')+M'(p_2''-p_2')\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 95) \ldots Q' = \; & a_{01}^2F_0F_1J'K' \\ & +a_{02}^2F_0F_2J'L' \\ & +a_{03}^2F_0F_3J'M' \\ & +a_{12}^2F_1F_2K'L' \\ & +a_{13}^2F_1F_3K'M' \\ & +a_{23}^2F_2F_3L'M' \end{aligned}$$

setzen:

$$96) \ldots 2Q'r' = Q, \qquad r' = \frac{Q}{2Q'}.$$

Die Coordinaten p_0, p_1, p_2, p_3 werden nun mittelst der Gleichungen 92) gefunden.

Bezeichnen wir die Länge des von dem gegebenen Punkte auf die gegebene Gerade gefällten Perpendikels durch P, so ist nach 30):

$$97) \quad \ldots \quad 9V^2P^2 = -a_{01}{}^2F_0F_1(p_0-p_0'')(p_1-p_1'') - a_{02}{}^2F_0F_2(p_0-p_0'')(p_2-p_2'') - a_{03}{}^2F_0F_3(p_0-p_0'')(p_3-p_3'') - a_{12}{}^2F_1F_2(p_1-p_1'')(p_2-p_2'') - a_{13}{}^2F_1F_3(p_1-p_1'')(p_3-p_3'') - a_{23}{}^2F_2F_3(p_2-p_2'')(p_3-p_3''),$$

also nach 92):

$$98) \quad \ldots \quad 9V^2P^2 = -a_{01}{}^2F_0F_1(p_0'-p_0''+J'r')(p_1'-p_1''+K'r') - a_{02}{}^2F_0F_2(p_0'-p_0''+J'r')(p_2'-p_2''+L'r') - a_{03}{}^2F_0F_3(p_0'-p_0''+J'r')(p_3'-p_3''+M'r') - a_{12}{}^2F_1F_2(p_1'-p_1''+K'r')(p_2'-p_2''+L'r') - a_{13}{}^2F_1F_3(p_1'-p_1''+K'r')(p_3'-p_3''+M'r') - a_{23}{}^2F_2F_3(p_2'-p_2''+L'r')(p_3'-p_3''+M'r').$$

Bezeichnen wir die Entfernung der beiden Punkte $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ und $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ von einander durch E, so ist nach 30):

$$99) \quad \ldots \quad 9V^2E^2 = -a_{01}{}^2F_0F_1(p_0'-p_0'')(p_1'-p_1'') - a_{02}{}^2F_0F_2(p_0'-p_0'')(p_2'-p_2'') - a_{03}{}^2F_0F_3(p_0'-p_0'')(p_3'-p_3'') - a_{12}{}^2F_1F_2(p_1'-p_1'')(p_2'-p_2'') - a_{13}{}^2F_1F_3(p_1'-p_1'')(p_3'-p_3'') - a_{23}{}^2F_2F_3(p_2'-p_2'')(p_3'-p_3''),$$

und entwickeln wir also die Producte auf der rechten Seite der Gleichung 98), so erhalten wir leicht:

$$9V^2P^2 = 9V^2E^2 + r' . Q - r'^2 . Q',$$

also nach 96):

$$9V^2P^2 = 9V^2E^2 + \frac{Q^2}{2Q'} - \frac{Q^2}{4Q'} = 9V^2E^2 + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{Q^2}{Q'},$$

folglich:

$$100) \quad \ldots \quad P^2 = E^2 + \frac{1}{36} \cdot \frac{Q^2}{Q'V^2}.$$

Setzen wir:

$$101) \quad \ldots \quad \Omega' = K'^2 \sin\alpha_1{}^2 + L'^2 \sin\alpha_2{}^2 + M'^2 \sin\alpha_3{}^2 + 2K'L' \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_3 + 2L'M' \cos\alpha_1 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 + 2M'K' \sin\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_3$$

und:

102) . . . . . $\lambda'^2 = \frac{\Omega'}{N}$,

so ist nach 59):

103) . . . . . $Q' = -9\lambda'^2 V^2$,

und nach 96) ist:

104) . . . . . $Q = 2r'Q'$;

also ist:

$$\frac{Q^2}{Q'V^2} = \frac{4r'^2Q'^2}{Q'V^2} = \frac{4r'^2Q'}{V^2} = -36\lambda'^2r'^2,$$

folglich nach 100):

105) . . . . . $P^2 = E^2 - \lambda'^2r'^2$.

Auch ist:

$$P^2 = E^2 - \lambda'^2 \cdot \frac{Q^2}{4Q_1^2} = E^2 - \frac{1}{\lambda'^2} \cdot \frac{Q^2}{324V^4},$$

folglich:

106) . . . . . $P^2 = E^2 - \frac{N}{\Omega'} \cdot \left(\frac{Q}{18V^2}\right)^2$

oder:

107) . . . . . $E^2 - P^2 = \frac{N}{\Omega'} \cdot \left(\frac{Q}{18V^2}\right)^2$.

Nach 91) und 92) kann man offenbar:

108) . . . . .
$$\begin{cases} J'' = p_0 - p_0'' = p_0' - p_0'' + J'r', \\ K'' = p_1 - p_1'' = p_1' - p_1'' + K'r', \\ L'' = p_2 - p_2'' = p_2' - p_2'' + L'r', \\ M'' = p_3 - p_3'' = p_3' - p_3'' + M'r' \end{cases}$$

setzen, mit Rücksicht darauf, dass diese Werthe von J'', K'', L'', M'', weil

$$F_0(p_0' - p_0'') + F_1(p_1' - p_1'') + F_2(p_2' - p_2'') + F_3(p_3' - p_3'') =$$
$$F_0J' + F_1K' + F_2L' + F_3M' = 0$$

ist, offenbar der Gleichung

$$F_0J'' + F_1K'' + F_2L'' + F_3M'' = 0$$

genügen, wie es erforderlich ist.

Drittes Kapitel.

Die Ebene.

§. 13.

Wenn in cartesischen Coordinaten die Gleichung einer Ebene

$$K(x-a)+L(y-b)+M(z-c)=0$$

ist, und auf diese Ebene von den Punkten $(a_0b_0c_0)$ und $(a_1b_1c_1)$ die Perpendikel P_0 und P_1 gefällt sind; so ist, wenn wir

$$G'=\sqrt{\frac{N}{\mathfrak{A}K^2+\mathfrak{B}L^2+\mathfrak{C}M^2+2CKL+2ALM+2BMK}}$$

setzen, bekanntlich (m. s. a. a. O. §. 19.):

$$P_0=\pm G'\{K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0)\},$$

$$P_1=\pm G'\{K(a-a_1)+L(b-b_1)+M(c-c_1)\};$$

mit der Bedingung, dass, indem man P_0 und P_1 als positiv betrachtet, oder absolut nimmt, in diesen Formeln die Vorzeichen so genommen werden, dass die Grössen auf den rechten Seiten der Gleichheitszeichen positiv werden. Liegen nun aber die Punkte $(a_0b_0c_0)$ und $(a_1b_1c_1)$ auf derselben Seite der gegebenen Ebene, so haben nach einem bekannten, schon früher angewandten Satze die Grössen

$$K(a_0-a)+L(b_0-b)+M(c_0-c) \quad \text{und} \quad K(a_1-a)+L(b_1-b)+M(c_1-c),$$

also auch die Grössen

$$K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0) \quad \text{und} \quad K(a-a_1)+L(b-b_1)+M(c-c_1),$$

gleiche Vorzeichen; liegen dagegen die Punkte $(a_0b_0c_0)$ und $(a_1b_1c_1)$ auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Ebene, so haben nach demselben Satze die Grössen

$$K(a_0-a)+L(b_0-b)+M(c_0-c) \quad \text{und} \quad K(a_1-a)+L(b_1-b)+M(c_1-c),$$

also auch die Grössen

$$K(a-a_0)+L(b-b_0)+M(c-c_0) \quad \text{und} \quad K(a-a_1)+L(b-b_1)+M(c-c_1),$$

entgegengesetzte Vorzeichen.

Betrachtet man nun aber die Perpendikel nicht immer als positiv oder absolut, sondern giebt ihnen gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem die Punkte $(a_0b_0c_0)$ und $(a_1b_1c_1)$, und also auch die Perpendikel P_0 und P_1 selbst, auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Ebene liegen; so muss man offenbar mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$P_0 = \pm G'\{K(a-a_0) + L(b-b_0) + M(c-c_0)\},$$
$$P_1 = \pm G'\{K(a-a_1) + L(b-b_1) + M(c-c_1)\}$$

setzen, wobei es unbestimmt gelassen wird, auf welcher Seite der gegebenen Ebene die Perpendikel als positiv, auf welcher Seite dieselben als negativ betrachtet werden.

Hat man von beliebig vielen Punkten

$$(a_0b_0c_0),\quad (a_1b_1c_1),\quad (a_2b_2c_2),\quad (a_3b_3c_3),\ \ldots\ldots$$

die Perpendikel

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3,\ \ldots\ldots$$

auf die gegebene Ebene gefällt, und nimmt alle auf einer und derselben Seite dieser Ebene liegenden Perpendikel mit demselben Vorzeichen, alle auf entgegengesetzten Seiten der Ebene liegenden Perpendikel mit entgegengesetzten Vorzeichen; so muss man mit Beziehung der oberen und unteren Vorzeichen auf einander:

$$P_0 = \pm G'\{K(a-a_0) + L(b-b_0) + M(c-c_0)\},$$
$$P_1 = \pm G'\{K(a-a_1) + L(b-b_1) + M(c-c_1)\},$$
$$P_2 = \pm G'\{K(a-a_2) + L(b-b_2) + M(c-c_2)\},$$
$$P_3 = \pm G'\{K(a-a_3) + L(b-b_3) + M(c-c_3)\},$$

u. s. w.

setzen.

Ist die Gleichung der Ebene unter der Form

$$Kx + Ly + Mz + N = 0$$

gegeben, und geht diese Ebene durch den Punkt (abc), so ist:

$$Ka + Lb + Mc + N = 0$$

also:

$$N = -Ka - Lb - Mc,$$

folglich:

$$Kx + Ly + Mz + N = K(x-a) + L(y-b) + M(z-c),$$

also:

$$K(a_0-a) + L(b_0-b) + M(c_0-c) = Ka_0 + Lb_0 + Mc_0 + N,$$
$$K(a_1-a) + L(b_1-b) + M(c_1-c) = Ka_1 + Lb_1 + Mc_1 + N,$$
$$K(a_2-a) + L(b_2-b) + M(c_2-c) = Ka_2 + Lb_2 + Mc_2 + N,$$
$$K(a_3-a) + L(b_3-b) + M(c_3-c) = Ka_3 + Lb_3 + Mc_3 + N,$$

u. s. w.

oder:

$$K(a-a_0) + L(b-b_0) + M(c-c_0) = -(Ka_0 + Lb_0 + Mc_0 + N),$$
$$K(a-a_1) + L(b-b_1) + M(c-c_1) = -(Ka_1 + Lb_1 + Mc_1 + N),$$
$$K(a-a_2) + L(b-b_2) + M(c-c_2) = -(Ka_2 + Lb_2 + Mc_2 + N),$$
$$K(a-a_3) + L(b-b_3) + M(c-c_3) = -(Ka_3 + Lb_3 + Mc_3 + N),$$

u. s. w.

Daher kann man mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander auch:

$$P_0 = \pm G'(Ka_0 + Lb_0 + Mc_0 + N),$$
$$P_1 = \pm G'(Ka_1 + Lb_1 + Mc_1 + N),$$
$$P_2 = \pm G'(Ka_2 + Lb_2 + Mc_2 + N),$$
$$P_3 = \pm G'(Ka_3 + Lb_3 + Mc_3 + N),$$

u. s. w.

setzen.

§. 14.

Zwischen cartesischen Coordinaten hat die allgemeine Gleichung der Ebene bekanntlich im Allgemeinen die Form:

109) . . . . . $Ax + By + Cz + D = 0.$

Nach 10) ist aber:

$$x = \frac{p_1 \sin \alpha_1}{\sqrt{N}}, \qquad y = \frac{p_2 \sin \alpha_2}{\sqrt{N}}, \qquad z = \frac{p_3 \sin \alpha_3}{\sqrt{N}};$$

und zwischen den tetraedrischen Coordinaten p_1, p_2, p_3 hat also die Gleichung der Ebene die Form:

$$110) \quad \frac{A\sin\alpha_1}{\sqrt{N}}p_1 + \frac{B\sin\alpha_2}{\sqrt{N}}p_2 + \frac{C\sin\alpha_3}{\sqrt{N}}p_3 + D = 0.$$

Nach 12) ist:

$$p_0 + \frac{G\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_1 + \frac{G\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_2 + \frac{G\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_3 = G,$$

also:

$$\frac{1}{G}p_0 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_1 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_2 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_3 = 1,$$

folglich:

$$D = \frac{D}{G}p_0 + \frac{D\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_1 + \frac{D\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_2 + \frac{D\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_3;$$

daher ist nach 110) die Gleichung der Ebene:

$$111) \quad \left.\begin{aligned} &\frac{D}{G}p_0 + \left(A + \frac{D}{a_{01}}\right)\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{N}}p_1 \\ &+ \left(B + \frac{D}{a_{02}}\right)\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{N}}p_2 \\ &+ \left(C + \frac{D}{a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{N}}p_3 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Sind f_1, f_2, f_3 die gehörig als positiv oder negativ betrachteten Entfernungen der Durchschnittspunkte der gegebenen Ebene mit den Axen der x, y, z von dem Punkte A_0, so ist:

$$Af_1 + D = 0, \qquad Bf_2 + D = 0, \qquad Cf_3 + D = 0;$$

also:

$$A = -\frac{D}{f_1}, \qquad B = -\frac{D}{f_2}, \qquad C = -\frac{D}{f_3};$$

und folglich nach 111) die Gleichung der Ebene:

$$112) \quad \left.\begin{aligned} &\frac{\sqrt{N}}{G}p_0 + \left(\frac{1}{a_{01}} - \frac{1}{f_1}\right)\sin\alpha_1 \cdot p_1 \\ &+ \left(\frac{1}{a_{02}} - \frac{1}{f_2}\right)\sin\alpha_2 \cdot p_2 \\ &+ \left(\frac{1}{a_{03}} - \frac{1}{f_3}\right)\sin\alpha_3 \cdot p_3 \end{aligned}\right\} = 0$$

oder nach 17):

113) . . . . $$\left.\begin{aligned}\sqrt{\Gamma}.p_0 &+ \left(\frac{1}{a_{01}} - \frac{1}{f_1}\right)\sin\alpha_1 . p_1 \\ &+ \left(\frac{1}{a_{02}} - \frac{1}{f_2}\right)\sin\alpha_2 . p_2 \\ &+ \left(\frac{1}{a_{03}} - \frac{1}{f_3}\right)\sin\alpha_3 . p_3\end{aligned}\right\} = 0.$$

Bezeichnen wir die von den Punkten A_0, A_1, A_2, A_3 auf die gegebene Ebene gefällten, mit den gehörigen Vorzeichen genommenen Perpendikel beziehungsweise durch $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\omega}_3$; so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen, wenn γ einen gewissen Factor bezeichnet, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\bar{\omega}_0 = \pm\gamma(A.0 + B.0 + C.0 + D) = \pm\gamma D,$$
$$\bar{\omega}_1 = \pm\gamma(Aa_{01} + B.0 + C.0 + D) = \pm\gamma(Aa_{01} + D),$$
$$\bar{\omega}_2 = \pm\gamma(A.0 + Ba_{02} + C.0 + D) = \pm\gamma(Ba_{02} + D),$$
$$\bar{\omega}_3 = \pm\gamma(A.0 + B.0 + Ca_{03} + D) = \pm\gamma(Ca_{03} + D);$$

folglich:

$$D = \pm\frac{\bar{\omega}_0}{\gamma},$$

$$A + \frac{D}{a_{01}} = \pm\frac{\bar{\omega}_1}{\gamma a_{01}}, \qquad B + \frac{D}{a_{02}} = \pm\frac{\bar{\omega}_2}{\gamma a_{02}}, \qquad C + \frac{D}{a_{03}} = \pm\frac{\bar{\omega}_3}{\gamma a_{03}};$$

also nach 111) die Gleichung der Ebene:

114) . . . . . $$\left.\begin{aligned}\frac{\bar{\omega}_0}{G}p_0 &+ \frac{\bar{\omega}_1\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_1 \\ &+ \frac{\bar{\omega}_2\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_2 \\ &+ \frac{\bar{\omega}_3\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_3\end{aligned}\right\} = 0,$$

folglich nach 14):

115) . . . . . $$\frac{\bar{\omega}_0}{H_0}p_0 + \frac{\bar{\omega}_1}{H_1}p_1 + \frac{\bar{\omega}_2}{H_2}p_2 + \frac{\bar{\omega}_3}{H_3}p_3 = 0.$$

Weil bekanntlich

$$\frac{1}{H_0} = \frac{F_0}{3V}, \quad \frac{1}{H_1} = \frac{F_1}{3V}, \quad \frac{1}{H_2} = \frac{F_2}{3V}, \quad \frac{1}{H_3} = \frac{F_3}{3V}$$

ist, so lässt sich die Gleichung der Ebene auch unter der Form:

116) . . . . $\bar{\omega}_0 F_0 p_0 + \bar{\omega}_1 F_1 p_1 + \bar{\omega}_2 F_2 p_2 + \bar{\omega}_3 F_3 p_3 = 0$

darstellen.

Im Allgemeinen hat die Gleichung der Ebene zwischen tetraedrischen Coordinaten die Form:

117) . . . . . $A_0 p_0 + A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = 0.$

Geht die Ebene durch den Punkt $(p_0' p_1' p_2' p_3')$, so ist

$$A_0 p_0' + A_1 p_1' + A_2 p_2' + A_3 p_3' = 0,$$

und folglich:

118)

$$A_0(p_0 - p_0') + A_1(p_1 - p_1') + A_2(p_2 - p_2') + A_3(p_3 - p_3') = 0$$

die Gleichung der Ebene.

§. 15.

Wenn die Gleichung einer Ebene in tetraedrischen Coordinaten

119) . . . . . $A_0 p_0 + A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = 0$

ist, so ist, weil nach 10) und 11):

$$p_0 = G - \frac{G \sin \alpha_1}{a_{01} \sqrt{N}} p_1 - \frac{G \sin \alpha_2}{a_{02} \sqrt{N}} p_2 - \frac{G \sin \alpha_3}{a_{03} \sqrt{N}} p_3,$$

$$p_1 = \frac{x \sqrt{N}}{\sin \alpha_1}, \qquad p_2 = \frac{y \sqrt{N}}{\sin \alpha_2}, \qquad p_3 = \frac{z \sqrt{N}}{\sin \alpha_3}$$

ist, die Gleichung der Ebene in cartesischen Coordinaten:

$$\left.\begin{aligned} &G A_0 + \left(A_1 - \frac{G A_0 \sin \alpha_1}{a_{01} \sqrt{N}}\right) \frac{\sqrt{N}}{\sin \alpha_1} x \\ &+ \left(A_2 - \frac{G A_0 \sin \alpha_2}{a_{02} \sqrt{N}}\right) \frac{\sqrt{N}}{\sin \alpha_2} y \\ &+ \left(A_3 - \frac{G A_0 \sin \alpha_3}{a_{03} \sqrt{N}}\right) \frac{\sqrt{N}}{\sin \alpha_3} z \end{aligned}\right\} = 0,$$

also:

120) . . . . . $\left.\begin{aligned} &G A_0 + \left(\frac{A_1 \sqrt{N}}{\sin \alpha_1} - \frac{G A_0}{a_{01}}\right) x \\ &+ \left(\frac{A_2 \sqrt{N}}{\sin \alpha_2} - \frac{G A_0}{a_{02}}\right) y \\ &+ \left(\frac{A_3 \sqrt{N}}{\sin \alpha_3} - \frac{G A_0}{a_{03}}\right) z \end{aligned}\right\} = 0,$

oder:

121) . . . . .
$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{A_1\sqrt{N}}{GA_0\sin\alpha_1}-\frac{1}{a_{01}}\right)x\\&+\left(\frac{A_2\sqrt{N}}{GA_0\sin\alpha_2}-\frac{1}{a_{02}}\right)y\\&+\left(\frac{A_3\sqrt{N}}{GA_0\sin\alpha_3}-\frac{1}{a_{03}}\right)z+1\end{aligned}\right\}=0,$$

die Gleichung der Ebene in cartesischen Coordinaten.

Wenn die Gleichung der Ebene in tetraedrischen Coordinaten unter der Form

122)
$$A_0(p_0-p_0')+A_1(p_1-p_1')+A_2(p_2-p_2')+A_3(p_3-p_3')=0$$

dargestellt ist, so ist nach 120):

$$\left.\begin{aligned}&GA_0+\left(\frac{A_1\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}-\frac{GA_0}{a_{01}}\right)x'\\&+\left(\frac{A_2\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}-\frac{GA_0}{a_{02}}\right)y'\\&+\left(\frac{A_3\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}-\frac{GA_0}{a_{03}}\right)z'\end{aligned}\right\}=0,$$

und folglich:

123) . . . . .
$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{A_1\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}-\frac{GA_0}{a_{01}}\right)(x-x')\\&+\left(\frac{A_2\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}-\frac{GA_0}{a_{02}}\right)(y-y')\\&+\left(\frac{A_3\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}-\frac{GA_0}{a_{03}}\right)(z-z')\end{aligned}\right\}=0$$

oder:

124) . . . . .
$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{GA_0}{a_{01}}-\frac{A_1\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}\right)(x-x')\\&+\left(\frac{GA_0}{a_{02}}-\frac{A_2\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}\right)(y-y')\\&+\left(\frac{GA_0}{a_{03}}-\frac{A_3\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}\right)(z-z')\end{aligned}\right\}=0$$

die Gleichung der Ebene in cartesischen Coordinaten.

Weil nach 17) und 18)

$$\sqrt{N}=G\sqrt{\Gamma}=\frac{2GF_0}{a_{01}a_{02}a_{03}}$$

und nach 15):

$$\frac{G}{a_{01}} = \frac{2GF_1}{a_{01}a_{02}a_{03}\sin\alpha_1},$$

$$\frac{G}{a_{02}} = \frac{2GF_2}{a_{01}a_{02}a_{03}\sin\alpha_2},$$

$$\frac{G}{a_{03}} = \frac{2GF_3}{a_{01}a_{02}a_{03}\sin\alpha_3}$$

ist, so ist:

$$\frac{GA_0}{a_{01}} - \frac{A_1\sqrt{N}}{\sin\alpha_1} = \frac{2G}{a_{01}a_{02}a_{03}} \cdot \frac{A_0F_1 - A_1F_0}{\sin\alpha_1},$$

$$\frac{GA_0}{a_{02}} - \frac{A_2\sqrt{N}}{\sin\alpha_2} = \frac{2G}{a_{01}a_{02}a_{03}} \cdot \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{\sin\alpha_2},$$

$$\frac{GA_0}{a_{03}} - \frac{A_3\sqrt{N}}{\sin\alpha_3} = \frac{2G}{a_{01}a_{02}a_{03}} \cdot \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{\sin\alpha_3};$$

also:

$$\frac{1}{a_{01}} - \frac{A_1\sqrt{N}}{GA_0\sin\alpha_1} = \frac{2}{a_{01}a_{02}a_{03}A_0} \cdot \frac{A_0F_1 - A_1F_0}{\sin\alpha_1},$$

$$\frac{1}{a_{02}} - \frac{A_2\sqrt{N}}{GA_0\sin\alpha_2} = \frac{2}{a_{01}a_{02}a_{03}A_0} \cdot \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{\sin\alpha_2},$$

$$\frac{1}{a_{03}} - \frac{A_3\sqrt{N}}{GA_0\sin\alpha_3} = \frac{2}{a_{01}a_{02}a_{03}A_0} \cdot \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{\sin\alpha_3};$$

und folglich nach 121) und 124) die Gleichung der Ebe cartesischen Coordinaten:

125) ....
$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{\sin\alpha_1}x + \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{\sin\alpha_2}y + \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{\sin\alpha_3}z = \frac{a_{01}a_{02}a_{03}A_0}{2}$$

oder:

126)

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{\sin\alpha_1}(x - x') + \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{\sin\alpha_2}(y - y') + \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{\sin\alpha_3}(z - z'$$

Sind

127) . . . $$\frac{p_0 - p_0'}{J} = \frac{p_1 - p_1'}{K} = \frac{p_2 - p_2'}{L} = \frac{p_3 - p_3'}{M}$$

die Gleichungen einer Geraden in tetraedrischen Coordinate kann ganz wie in §. 9. leicht gezeigt werden, dass

$$128) \quad \frac{x-x'}{K\sin\alpha_1} = \frac{y-y'}{L\sin\alpha_2} = \frac{z-z'}{M\sin\alpha_3}$$

deren Gleichungen in cartesischen Coordinaten sind.

§. 16.

Wir wollen nun die Bedingungen aufsuchen, dass eine Ebene und eine Gerade auf einander senkrecht stehen.

Nehmen wir an, dass diese Ebene und diese Gerade sich in dem Punkte $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ treffen, so kann man ihre Gleichungen unter der Form:

$$129) \quad \begin{cases} A_0(p_0-p_0') + A_1(p_1-p_1') + A_2(p_2-p_2') + A_3(p_3-p_3') = 0, \\ \dfrac{p_0-p_0'}{J} = \dfrac{p_1-p_1'}{K} = \dfrac{p_2-p_2'}{L} = \dfrac{p_3-p_3'}{M} \end{cases}$$

darstellen, und nach dem vorhergehenden Paragraphen sind folglich die Gleichungen in cartesischen Coordinaten:

$$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}(x-x') + \frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}(y-y') + \frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}(z-z') = 0,$$

$$\frac{x-x'}{K\sin\alpha_1} = \frac{y-y'}{L\sin\alpha_2} = \frac{z-z'}{M\sin\alpha_3}.$$

Folglich sind (m. s. a. a. O. S. 176. 11)), wenn wir der Kürze wegen:

$$130) \quad T_1 = \frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}\sin\alpha_1^2 + \frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_3) + \frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}(\cos\alpha_3\cos\alpha_1-\cos\alpha_2),$$

$$T_2 = \frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_3) + \frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}\sin\alpha_2^2 + \frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}(\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_1),$$

$$T_3 = \frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}(\cos\alpha_3\cos\alpha_1-\cos\alpha_2) + \frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}(\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_1) + \frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}\sin\alpha_3^2$$

setzen, die Bedingungsgleichungen der Perpendicularität:

$$131) \quad \frac{K\sin\alpha_1}{T_1} = \frac{L\sin\alpha_2}{T_2} = \frac{M\sin\alpha_3}{T_3}.$$

Weil nun aber nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie:

$$132) \quad \begin{cases} \cos(F_2F_3) = \dfrac{\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\cos\alpha_3}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}, \\ \cos(F_1F_3) = \dfrac{\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3\cos\alpha_1}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}, \\ \cos(F_1F_2) = \dfrac{\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} \end{cases}$$

st, so ist, wenn wir:

$$\begin{aligned} 133) \quad U_1 = {} & A_0\{F_1 - F_2\cos(F_1F_2) - F_3\cos(F_1F_3)\} \\ & - A_1F_0 + A_2F_0\cos(F_1F_2) + A_3F_0\cos(F_1F_3), \\ U_2 = {} & A_0\{F_2 - F_1\cos(F_1F_2) - F_3\cos(F_2F_3)\} \\ & + A_1F_0\cos(F_1F_2) - A_2F_0 + A_3F_0\cos(F_2F_3), \\ U_3 = {} & A_0\{F_3 - F_1\cos(F_1F_3) - F_2\cos(F_2F_3)\} \\ & + A_1F_0\cos(F_1F_3) + A_2F_0\cos(F_2F_3) - A_3F_0 \end{aligned}$$

setzen:

$$T_1 = U_1\sin\alpha_1, \qquad T_2 = U_2\sin\alpha_2, \qquad T_3 = U_3\sin\alpha_3;$$

und nach 131) sind folglich die Bedingungsgleichungen der Perpendicularität:

$$134) \quad \frac{K}{U_1} = \frac{L}{U_2} = \frac{M}{U_3}.$$

Leicht überzeugt man sich aber von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

$$135) \quad \begin{cases} F_0 = F_1\cos(F_0F_1) + F_2\cos(F_0F_2) + F_3\cos(F_0F_3), \\ F_1 = F_0\cos(F_0F_1) + F_2\cos(F_1F_2) + F_3\cos(F_1F_3), \\ F_2 = F_0\cos(F_0F_2) + F_1\cos(F_1F_2) + F_3\cos(F_2F_3), \\ F_3 = F_0\cos(F_0F_3) + F_1\cos(F_1F_3) + F_2\cos(F_2F_3); \end{cases}$$

also ist:

$$\begin{aligned} U_1 &= F_0\{A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3)\}, \\ U_2 &= F_0\{A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3)\}, \\ U_3 &= F_0\{A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3\}; \end{aligned}$$

und die Bedingungsgleichungen der Perpendicularität sind folglich nach 134):

136)

$$\frac{K}{A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3)}$$
$$= \frac{L}{A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3)}$$
$$= \frac{M}{A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3}$$

Bezeichnen wir diese drei gleichen Brüche durch k, so ist:

$$F_1K + F_2L + F_3M$$
$$= k\left\{\begin{array}{l} A_0[F_1\cos(F_0F_1) + F_2\cos(F_0F_2) + F_3\cos(F_0F_3)] \\ + A_1[-F_1 + F_2\cos(F_1F_2) + F_3\cos(F_1F_3)] \\ + A_2[F_1\cos(F_1F_2) - F_2 + F_3\cos(F_2F_3)] \\ + A_3[F_1\cos(F_1F_3) + F_2\cos(F_2F_3) - F_3] \end{array}\right\}$$
$$= k\{A_0F_0 - A_1F_0\cos(F_0F_1) - A_2F_0\cos(F_0F_2) - A_3F_0\cos(F_0F_3)\}$$
$$= -kF_0\{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)\}$$

und folglich, weil bekanntlich

$$F_0J + F_1K + F_2L + F_3M = 0$$

ist:

$$J = k\{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)\},$$

also:

$$\frac{J}{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)} = k.$$

Folglich sind nach 136) die Bedingungsgleichungen der Perpendicularität:

137)

$$\frac{J}{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)}$$
$$= \frac{K}{A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3)}$$
$$= \frac{L}{A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3)}$$
$$= \frac{M}{A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3}.$$

§. 17.

Die Gleichungen der durch den Punkt $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ gelegten, auf der durch die Gleichung

138) . . . . . $A_0p_0 + A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 = 0$

charakterisirten Ebene senkrecht stehenden Geraden sind nach dem vorhergehenden Paragraphen offenbar:

139)

$$\frac{p_0 - p_0''}{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)}$$
$$= \frac{p_1 - p_1''}{A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3)}$$
$$= \frac{p_2 - p_2''}{A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3)}$$
$$= \frac{p_3 - p_3''}{A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3}.$$

Bezeichnen wir diese gleichen Brüche durch ϱ und den Fusspunkt des Perpendikels auf der Ebene wie schon im vorhergehenden Paragraphen durch $(p_0'p_1'p_2'p_3')$, so haben wir zur Bestimmung dieser Coordinaten nach 139) die Formeln:

$$p_0' - p_0'' = \varrho\{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)\},$$
$$p_1' - p_1'' = \varrho\{A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3)\},$$
$$p_2' - p_2'' = \varrho\{A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3)\},$$
$$p_3' - p_3'' = \varrho\{A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3\}.$$

Wegen der Gleichung der Ebene ist:

$$A_0p_0' + A_1p_1' + A_2p_2' + A_3p_3' = 0,$$

und setzen wir nun der Kürze wegen:

140) . . . . . $\Delta = A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''$,

so ist:

$$A_0(p_0' - p_0'') + A_1(p_1' - p_1'') + A_2(p_2' - p_2'') + A_3(p_3' - p_3'') = -\Delta.$$

Leicht findet man, wenn der Kürze wegen:

141) . . $$\begin{aligned} Q = {} & A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - 2A_0A_1\cos(F_0F_1) \\ & - 2A_0A_2\cos(F_0F_2) \\ & - 2A_0A_3\cos(F_0F_3) \\ & - 2A_1A_2\cos(F_1F_2) \\ & - 2A_1A_3\cos(F_1F_3) \\ & - 2A_2A_3\cos(F_2F_3) \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} & A_0\{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)\} \\ & + A_1\{A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3)\} \\ & + A_2\{A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3)\} \\ & + A_3\{A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3\} \\ & = -Q, \end{aligned}$$

also nach dem Vorhergehenden offenbar:

142) . . . . . $\varrho = \frac{\Delta}{Q}$,

was nach dem Obigen zur Bestimmung der Coordinaten p_0', p_1', p_2', p_3' des Fusspunkts des Perpendikels die Formeln:

143)

$$p_0' = p_0'' + \frac{\{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)\}\Delta}{Q},$$

$$p_1' = p_1'' + \frac{\{A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3)\}\Delta}{Q},$$

$$p_2' = p_2'' + \frac{\{A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3)\}\Delta}{Q},$$

$$p_3' = p_3'' + \frac{\{A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3\}\Delta}{Q}$$

giebt.

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 135) ist offenbar:

144)

$$\begin{aligned} & F_0\{-A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3)\} \\ & + F_1\{A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3)\} \\ & + F_2\{A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3)\} \\ & + F_3\{A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3\} \\ & = 0, \end{aligned}$$

folglich nach 143):

$$F_0p_0' + F_1p_1' + F_2p_2' + F_3p_3' = F_0p_0'' + F_1p_1'' + F_2p_2'' + F_3p_3'',$$

also, weil

$$F_0p_0'' + F_1p_1'' + F_2p_2'' + F_3p_3'' = V$$

ist, auch

$$F_0p_0' + F_1p_1' + F_2p_2' + F_3p_3' = V,$$

wie es sein muss.

Wir wollen nun die Entfernung P des Punktes $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ von der durch die Gleichung 138), die man auch unter der Form:

$$A_0(p_0-p_0') + A_1(p_1-p_1') + A_2(p_2-p_2') + A_3(p_3-p_3') = 0$$

schreiben kann, charakterisirten Ebene bestimmen, wozu man auf verschiedenen Wegen gelangen und dadurch verschiedene Ausdrücke gewinnen kann. Wir geben jedoch für jetzt dem folgenden Wege den Vorzug.

Nach §. 16. ist die Gleichung der gegebenen Ebene zwischen cartesischen Coordinaten:

$$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}(x-x') + \frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}(y-y') + \frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}(z-z') = 0.$$

Handelt es sich also um die Bestimmung des Perpendikels P, so müssen wir zuerst die Grösse

$$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}(x'-x'') + \frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}(y'-y'') + \frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}(z'-z'')$$

bestimmen (m. s. a. a. O. S. 181. 18)).

Nach 10) ist diese Grösse:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{N}}(p_1'-p_1'')\\
&+\frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{N}}(p_2'-p_2'')\\
&+\frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}\cdot\frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{N}}(p_3'-p_3'')\\
=&\ \frac{\left\{\begin{array}{l}(A_0F_1-A_1F_0)(p_1'-p_1'')\\+(A_0F_2-A_2F_0)(p_2'-p_2'')\\+(A_0F_3-A_3F_0)(p_3'-p_3'')\end{array}\right\}}{\sqrt{N}}\\
=&\ A_0\{F_1(p_1'-p_1'')+F_2(p_2'-p_2'')+F_3(p_3'-p_3'')\}:\sqrt{N}\\
&-F_0\{A_1(p_1'-p_1'')+A_2(p_2'-p_2'')+A_3(p_3'-p_3'')\}:\sqrt{N}
\end{aligned}$$

$$= -F_0\{A_0(p_0'-p_0'')+A_1(p_1'-p_1'')+A_2(p_2'-p_2'')+A_3(p_3'-p_3'')\}:\sqrt{N}$$
$$= -F_0(A_0p_0'+A_1p_1'+A_2p_2'+A_3p_3'):\sqrt{N}$$
$$+F_0(A_0p_0''+A_1p_1''+A_2p_2''+A_3p_3''):\sqrt{N}$$
$$= \frac{F_0(A_0p_0''+A_1p_1''+A_2p_2''+A_3p_3'')}{\sqrt{N}} = \frac{F_0\Delta}{\sqrt{N}}.$$

Ferner kommt es auf die Bestimmung der Grösse G_0 a. a. O. an (m. s. a. a. O. S. 179. 13)).

Zu dem Ende hat man die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} N = G_0^2\Big\{ & \frac{(A_0F_1-A_1F_0)^2}{\sin\alpha_1^2}\sin\alpha_1^2 \\ & + \frac{(A_0F_2-A_2F_0)^2}{\sin\alpha_2^2}\sin\alpha_2^2 \\ & + \frac{(A_0F_3-A_3F_0)^2}{\sin\alpha_3^2}\sin\alpha_3^2 \\ & + 2\frac{(A_0F_1-A_1F_0)(A_0F_2-A_2F_0)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_3) \\ & + 2\frac{(A_0F_2-A_2F_0)(A_0F_3-A_3F_0)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}(\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_1) \\ & + 2\frac{(A_0F_3-A_3F_0)(A_0F_1-A_1F_0)}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1}(\cos\alpha_3\cos\alpha_1-\cos\alpha_2) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} = G_0^2\{ & (A_0F_1-A_1F_0)^2+(A_0F_2-A_2F_0)^2+(A_0F_3-A_3F_0)^2 \\ & -2(A_0F_1-A_1F_0)(A_0F_2-A_2F_0)\frac{\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} \\ & -2(A_0F_2-A_2F_0)(A_0F_3-A_3F_0)\frac{\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\alpha_3}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3} \\ & -2(A_0F_3-A_3F_0)(A_0F_1-A_1F_0)\frac{\cos\alpha_2-\cos\alpha_3\cos\alpha_1}{\sin\alpha_3\sin\alpha_1} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} = G_0^2\{ & (A_0F_1-A_1F_0)^2+(A_0F_2-A_2F_0)^2+(A_0F_3-A_3F_0)^2 \\ & -2(A_0F_1-A_1F_0)(A_0F_2-A_2F_0)\cos(F_1F_2) \\ & -2(A_0F_2-A_2F_0)(A_0F_3-A_3F_0)\cos(F_2F_3) \\ & -2(A_0F_3-A_3F_0)(A_0F_1-A_1F_0)\cos(F_1F_3) \end{aligned}\right\}.$$

Nach 135) ist:

$$\begin{aligned} F_1^2+F_2^2+F_3^2-2F_1F_2\cos(F_1F_2)-2F_2F_3\cos(F_2F_3)-2F_3F_1\cos(F_1F_3) \\ = F_1\{F_1-F_2\cos(F_1F_2)-F_3\cos(F_1F_3)\} \\ +F_2\{F_2-F_1\cos(F_1F_2)-F_3\cos(F_2F_3)\} \\ +F_3\{F_3-F_1\cos(F_1F_3)-F_2\cos(F_2F_3)\} \\ = F_0\{F_1\cos(F_0F_1)+F_2\cos(F_0F_2)+F_3\cos(F_0F_3)\}, \end{aligned}$$

also:

145)

$$F_0^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 - 2F_1F_2\cos(F_1F_2) - 2F_2F_3\cos(F_2F_3) - 2F_3F_1\cos(F_1F_3).$$

Ferner ist nach 135):

$$-F_0F_1 + F_0F_2\cos(F_1F_2) + F_0F_3\cos(F_1F_3) = -F_0^2\cos(F_0F_1),$$

$$-F_0F_2 + F_0F_1\cos(F_1F_2) + F_0F_3\cos(F_2F_3) = -F_0^2\cos(F_0F_2),$$

$$-F_0F_3 + F_0F_2\cos(F_2F_3) + F_0F_1\cos(F_1F_3) = -F_0^2\cos(F_0F_3).$$

Also ist nach dem Obigen offenbar:

$$N = G_0^2F_0^2\{A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - 2A_0A_1\cos(F_0F_1) - 2A_0A_2\cos(F_0F_2) - 2A_0A_3\cos(F_0F_3) - 2A_1A_2\cos(F_1F_2) - 2A_1A_3\cos(F_1F_3) - 2A_2A_3\cos(F_2F_3)\},$$

folglich nach 141):

$$N = G_0^2F_0^2Q.$$

Nach dem Vorstehenden ist nun mit Rücksicht auf die Formel a. a. O. S. 181. 18):

$$P^2 = \frac{N}{F_0^2Q}\cdot\frac{F_0^2\Delta^2}{N} = \frac{\Delta^2}{Q},$$

und daher:

146) . . $$P = \pm\frac{\Delta}{\sqrt{Q}} = \pm\frac{A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''}{\sqrt{Q}},$$

wenn man, insofern man P als positiv betrachtet oder nur als absolut auffasst, in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$\Delta = A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''$$

positiv oder negativ ist.

§. 18.

Die Gleichung einer Ebene zwischen tetraedrischen Coordinaten sei wieder

$$A_0p_0 + A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 = 0,$$

und $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ und $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ seien zwei beliebige Punkte.

Weil nach 10):

$$p_1' = \frac{x'\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}, \quad p_2' = \frac{y'\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}, \quad p_3' = \frac{z'\sqrt{N}}{\sin\alpha_3};$$

$$p_1'' = \frac{x''\sqrt{N}}{\sin\alpha_1}, \quad p_2'' = \frac{y''\sqrt{N}}{\sin\alpha_2}, \quad p_3'' = \frac{z''\sqrt{N}}{\sin\alpha_3}$$

ist; so ist:

$$A_0p_0' + A_1p_1' + A_2p_2' + A_3p_3'$$
$$= A_0p_0' + \sqrt{N}.\left(\frac{A_1}{\sin\alpha_1}x' + \frac{A_2}{\sin\alpha_2}y' + \frac{A_3}{\sin\alpha_3}z'\right),$$

$$A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''$$
$$= A_0p_0'' + \sqrt{N}.\left(\frac{A_1}{\sin\alpha_1}x'' + \frac{A_2}{\sin\alpha_2}y'' + \frac{A_3}{\sin\alpha_3}z''\right).$$

Weil nun nach 120) die Gleichung der Ebene zwischen cartesischen Coordinaten die folgende ist:

$$\left.\begin{aligned} GA_0 &+ \left(\frac{A_1\sqrt{N}}{\sin\alpha_1} - \frac{GA_0}{a_{01}}\right)x \\ &+ \left(\frac{A_2\sqrt{N}}{\sin\alpha_2} - \frac{GA_0}{a_{02}}\right)y \\ &+ \left(\frac{A_3\sqrt{N}}{\sin\alpha_3} - \frac{GA_0}{a_{03}}\right)z \end{aligned}\right\} = 0,$$

so haben nach einem bekannten, schon früher mehrfach angewandten Satze die Grössen:

$$GA_0 + \left(\frac{A_1\sqrt{N}}{\sin\alpha_1} - \frac{GA_0}{a_{01}}\right)x'$$
$$+ \left(\frac{A_2\sqrt{N}}{\sin\alpha_2} - \frac{GA_0}{a_{02}}\right)y'$$
$$+ \left(\frac{A_3\sqrt{N}}{\sin\alpha_3} - \frac{GA_0}{a_{03}}\right)z'$$

und

$$GA_0 + \left(\frac{A_1\sqrt{N}}{\sin\alpha_1} - \frac{GA_0}{a_{01}}\right)x''$$
$$+ \left(\frac{A_2\sqrt{N}}{\sin\alpha_2} - \frac{GA_0}{a_{02}}\right)y''$$
$$+ \left(\frac{A_3\sqrt{N}}{\sin\alpha_3} - \frac{GA_0}{a_{03}}\right)z''$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen, jenachdem die Punkte $(x'y'z')$ und $(x''y''z'')$, oder $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ und $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$, auf einer

und derselben Seite, oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$A_0p_0 + A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 = 0$$

charakterisirten Ebene liegen. Die beiden vorstehenden Grössen sind aber:

$$A_0G\left(1 - \frac{x'}{a_{01}} - \frac{y'}{a_{02}} - \frac{z'}{a_{03}}\right)$$
$$+ \sqrt{N}.\left(\frac{A_1}{\sin\alpha_1}x' + \frac{A_2}{\sin\alpha_2}y' + \frac{A_3}{\sin\alpha_3}z'\right)$$

und

$$A_0G\left(1 - \frac{x''}{a_{01}} - \frac{y''}{a_{02}} - \frac{z''}{a_{03}}\right)$$
$$+ \sqrt{N}.\left(\frac{A_1}{\sin\alpha_1}x'' + \frac{A_2}{\sin\alpha_2}y'' + \frac{A_3}{\sin\alpha_3}z''\right),$$

also nach 9):

$$A_0p_0' + \sqrt{N}.\left(\frac{A_1}{\sin\alpha_1}x' + \frac{A_2}{\sin\alpha_2}y' + \frac{A_3}{\sin\alpha_3}z'\right)$$

und

$$A_0p_0'' + \sqrt{N}.\left(\frac{A_1}{\sin\alpha_1}x'' + \frac{A_2}{\sin\alpha_2}y'' + \frac{A_3}{\sin\alpha_3}z''\right).$$

Also liegen die Punkte $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ und $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung

$$A_0p_0 + A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 = 0$$

charakterisirten Ebene, jenachdem die beiden vorstehenden Grössen, folglich nach dem Obigen, jenachdem die beiden Grössen

$$A_0p_0' + A_1p_1' + A_2p_2' + A_3p_3'$$

und

$$A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

§. 19.

Das in §. 17. von dem Punkte $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ auf die durch die Gleichung 138) charakterisirte Ebene gefällte Perpendikel P wollen wir jetzt nicht mehr wie dort bloss als positiv oder absolut auffassen, sondern als positiv oder negativ betrachten, jenachdem

der Punkt $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ und das Perpendikel P selbst auf der einen — der positiven — oder auf der anderen — der negativen — Seite der in Rede stehenden Ebene liegt.

Der Werth, welchen die Function

$$A_0p_0 + A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3$$

der Gleichung 138) erhält, wenn man in derselben für p_0, p_1, p_2, p_3 die Coordinaten H_0, 0, 0, 0 des Punktes A_0 setzt, wo bekanntlich H_0 positiv ist, ist A_0H_0, und dieser Werth hat also immer mit A_0 gleiches Vorzeichen. Dies vorausgesetzt, unterscheiden wir nun die folgenden Fälle.

I. Die Seite der gegebenen Ebene, auf welcher der Punkt A_0 liegt, sei die positive Seite dieser Ebene.

1. Es sei A_0 positiv.

Dann ist A_0H_0 positiv, und nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze liegen folglich die Punkte A_0 und $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ auf einer und derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Ebene, es ist also P positiv oder negativ, jenachdem die Grösse

$$A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''$$

positiv oder negativ ist, woraus sich nach 146) ergiebt, dass man

$$P = + \frac{A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''}{\sqrt{Q}}$$

setzen muss.

2. Es sei A_0 negativ.

Dann ist A_0H_0 negativ, und nach dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze liegen folglich die Punkte A_0 und $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ auf einer und derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der gegebenen Ebene, es ist also P positiv oder negativ, jenachdem die Grösse

$$A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''$$

negativ oder positiv ist, woraus sich nach 146) ergiebt, dass man

$$P = - \frac{A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''}{\sqrt{Q}}$$

setzen muss.

II. Die Seite der gegebenen Ebene, auf welcher der Pun A_0 liegt, sei die negative Seite dieser Ebene.

1. Es sei A_0 positiv.

Dann ist A_0H_0 positiv und nach dem im vorhergehend Paragraphen bewiesenen Satze liegen folglich die Punkte A_0 u $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ auf einer und derselben Seite oder auf entgege gesetzten Seiten der gegebenen Ebene, es ist also P negativ od positiv, jenachdem die Grösse

$$A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''$$

positiv oder negativ ist, woraus sich nach 146) ergiebt, dass m

$$P = -\frac{A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''}{\sqrt{Q}}$$

setzen muss.

2. Es sei A_0 negativ.

Dann ist A_0H_0 negativ, und nach dem im verhergehend Paragraphen bewiesenen Satze liegen folglich die Punkte A_0 u $(p_0''p_1''p_2''p_3'')$ auf einer und derselben Seite oder auf entgege gesetzten Seiten der gegebenen Ebene, es ist also P negativ od positiv, jenachdem die Grösse

$$A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''$$

negativ oder positiv ist, woraus sich nach 146) ergiebt, dass m

$$P = +\frac{A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''}{\sqrt{Q}}$$

setzen muss.

Hieraus ergiebt sich Folgendes:

Wenn die Seite der gegebenen Ebene, auf welcher der Punk A_0 liegt, die positive Seite dieser Ebene ist, so muss man

$$P = \pm\frac{A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''}{\sqrt{Q}}$$

setzen, und das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachde A_0 positiv oder negativ ist.

Wenn die Seite der gegebenen Ebene, auf welcher der Punk A_0 liegt, die negative Seite dieser Ebene ist, so muss man

$$P = \mp\frac{A_0p_0'' + A_1p_1'' + A_2p_2'' + A_3p_3''}{\sqrt{Q}}$$

setzen, und das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem A_0 positiv oder negativ ist.

Dies lässt sich auf folgende Art zusammenfassen:

Es ist immer

$$147) \quad \ldots \quad P = \pm \frac{A_0 p_0'' + A_1 p_1'' + A_2 p_2'' + A_3 p_3''}{\sqrt{Q}}$$

zu setzen, und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, jenachdem A_0 und die Seite der gegebenen Ebene, auf welcher der Punkt A_0 liegt, gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben.

Von den Punkten

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

wollen wir auf die gegebene Ebene Perpendikel fällen, und diese Perpendikel mit gehöriger Rücksicht auf die Vorzeichen, welche ihnen nach dem Vorhergehenden zukommen, beziehungsweise durch

$$\bar{\omega}_0, \quad \bar{\omega}_1, \quad \bar{\omega}_2, \quad \bar{\omega}_3$$

bezeichnen, dann ist nach 147) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\bar{\omega}_0 = \pm \frac{A_0 H_0}{\sqrt{Q}}, \qquad \bar{\omega}_1 = \pm \frac{A_1 H_1}{\sqrt{Q}},$$

$$\bar{\omega}_2 = \pm \frac{A_2 H_2}{\sqrt{Q}}, \qquad \bar{\omega}_3 = \pm \frac{A_3 H_3}{\sqrt{Q}};$$

indem man in allen diesen Formeln, so wie in der Formel 147), die oberen oder unteren Vorzeichen nimmt, jenachdem A_0 und die Seite der gegebenen Ebene, auf welcher der Punkt A_0 liegt, gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Also ist, immer mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$A_0 = \pm \frac{\bar{\omega}_0 \sqrt{Q}}{H_0}, \qquad A_1 = \pm \frac{\bar{\omega}_1 \sqrt{Q}}{H_1},$$

$$A_2 = \pm \frac{\bar{\omega}_2 \sqrt{Q}}{H_2}, \qquad A_3 = \pm \frac{\bar{\omega}_3 \sqrt{Q}}{H_3};$$

folglich nach 147):

$$P = \pm \left(\frac{A_0 p_0''}{\sqrt{Q}} + \frac{A_1 p_1''}{\sqrt{Q}} + \frac{A_2 p_2''}{\sqrt{Q}} + \frac{A_3 p_3''}{\sqrt{Q}} \right)$$

$$= \pm \left(\pm \frac{\bar{\omega}_0 \sqrt{Q}}{H_0} \cdot \frac{p_0''}{\sqrt{Q}} \pm \frac{\bar{\omega}_1 \sqrt{Q}}{H_1} \cdot \frac{p_1''}{\sqrt{Q}} \pm \frac{\bar{\omega}_2 \sqrt{Q}}{H_2} \cdot \frac{p_2''}{\sqrt{Q}} \pm \frac{\bar{\omega}_3 \sqrt{Q}}{H_3} \cdot \frac{p_3''}{\sqrt{Q}} \right),$$

also, weil immer die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, in völliger Allgemeinheit:

$$148) \quad \ldots \quad P = \frac{\bar{\omega}_0 p_0''}{H_0} + \frac{\bar{\omega}_1 p_1''}{H_1} + \frac{\bar{\omega}_2 p_2''}{H_2} + \frac{\bar{\omega}_3 p_3''}{H_3},$$

folglich, weil bekanntlich

$$\frac{1}{H_0} = \frac{F_0}{3V}, \quad \frac{1}{H_1} = \frac{F_1}{3V}, \quad \frac{1}{H_2} = \frac{F_2}{3V}, \quad \frac{1}{H_3} = \frac{F_3}{3V}$$

ist:

$$149) \quad \ldots \quad P = \frac{\bar{\omega}_0 F_0 p_0'' + \bar{\omega}_1 F_1 p_1'' + \bar{\omega}_2 F_2 p_2'' + \bar{\omega}_3 F_3 p_3''}{3V}$$

oder:

$$150) \quad \ldots \quad 3PV = \bar{\omega}_0 F_0 p_0'' + \bar{\omega}_1 F_1 p_1'' + \bar{\omega}_2 F_2 p_2'' + \bar{\omega}_3 F_3 p_3'',$$

eine jedenfalls sehr wichtige und merkwürdige Formel.

§. 20.

Wir wollen jetzt die Bedingungen der Parallellität der beiden durch die Gleichungen:

$$151) \quad \ldots \quad \begin{cases} A_0 p_0 + A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = 0, \\ A_0' p_0 + A_1' p_1 + A_2' p_2 + A_3' p_3 = 0 \end{cases}$$

charakterisirten Ebenen aufsuchen.

Die Parallellität dieser beiden Ebenen erfordert, dass es eine auf denselben zugleich senkrecht stehende Gerade gebe, welche durch die Gleichungen:

$$\frac{p_0 - p_0'}{J} = \frac{p_1 - p_1'}{K} = \frac{p_2 - p_2'}{L} = \frac{p_3 - p_3'}{M}$$

charakterisirt sein möge.

Nach 137) muss also:

$$\frac{J}{-A_0 + A_1 \cos(F_0F_1) + A_2 \cos(F_0F_2) + A_3 \cos(F_0F_3)}$$
$$= \frac{K}{A_0 \cos(F_0F_1) - A_1 + A_2 \cos(F_1F_2) + A_3 \cos(F_1F_3)}$$
$$= \frac{L}{A_0 \cos(F_0F_2) + A_1 \cos(F_1F_2) - A_2 + A_3 \cos(F_2F_3)}$$
$$= \frac{M}{A_0 \cos(F_0F_3) + A_1 \cos(F_1F_3) + A_2 \cos(F_2F_3) - A_3}$$

nd

$$\frac{J}{-A_0' + A_1' \cos(F_0F_1) + A_2' \cos(F_0F_2) + A_3' \cos(F_0F_3)}$$

$$= \frac{K}{A_0' \cos(F_0F_1) - A_1' + A_2' \cos(F_1F_2) + A_3' \cos(F_1F_3)}$$

$$= \frac{L}{A_0' \cos(F_0F_2) + A_1' \cos(F_1F_2) - A_2' + A_3' \cos(F_2F_3)}$$

$$= \frac{M}{A_0' \cos(F_0F_3) + A_1' \cos(F_1F_3) + A_2' \cos(F_2F_3) - A_3'}$$

ein, und die Bedingungen der Parallellität sind also:

152)

$$\frac{-A_0 + A_1 \cos(F_0F_1) + A_2 \cos(F_0F_2) + A_3 \cos(F_0F_3)}{-A_0' + A_1' \cos(F_0F_1) + A_2' \cos(F_0F_2) + A_3' \cos(F_0F_3)}$$

$$= \frac{A_0 \cos(F_0F_1) - A_1 + A_2 \cos(F_1F_2) + A_3 \cos(F_1F_3)}{A_0' \cos(F_0F_1) - A_1' + A_2' \cos(F_1F_2) + A_3' \cos(F_1F_3)}$$

$$= \frac{A_0 \cos(F_0F_2) + A_1 \cos(F_1F_2) - A_2 + A_3 \cos(F_2F_3)}{A_0' \cos(F_0F_2) + A_1' \cos(F_1F_2) - A_2' + A_3' \cos(F_2F_3)}$$

$$= \frac{A_0 \cos(F_0F_3) + A_1 \cos(F_1F_3) + A_2 \cos(F_2F_3) - A_3}{A_0' \cos(F_0F_3) + A_1' \cos(F_1F_3) + A_2' \cos(F_2F_3) - A_3'}$$

Zu einem anderen Ausdrucke dieser Bedingungen gelangt nan auf folgende Weise.

Nach 126) sind die Gleichungen der beiden Ebenen in cartesischen Coordinaten:

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{\sin\alpha_1}(x-a) + \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{\sin\alpha_2}(y-b) + \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{\sin\alpha_3}(z-c) = 0,$$

$$\frac{A_0'F_1 - A_1'F_0}{\sin\alpha_1}(x-a') + \frac{A_0'F_2 - A_2'F_0}{\sin\alpha_2}(y-b') + \frac{A_0'F_3 - A_3'F_0}{\sin\alpha_3}(z-c') = 0;$$

wo die Bedeutung von a, b, c und a', b', c' sogleich von selbst erhellen wird; also sind (m. s. a. a. O. S. 188. 34)) die Bedingungen der Parallellität:

153)

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{A_0'F_1 - A_1'F_0} = \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{A_0'F_2 - A_2'F_0} = \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{A_0'F_3 - A_3'F_0}$$

oder:

154)

$$\frac{A_0H_0 - A_1H_1}{A_0'H_0 - A_1'H_1} = \frac{A_0H_0 - A_2H_2}{A_0'H_0 - A_2'H_2} = \frac{A_0H_0 - A_3H_3}{A_0'H_0 - A_3'H_3}.$$

Diese Gleichungen kann man durch verschiedene andere ersetzen, in welcher Beziehung wir uns jedoch für jetzt begnügen, das Folgende zu bemerken.

Die Gleichungen 153), also die folgenden Gleichungen:

155)

$$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{A_0'F_1-A_1'F_0}=\frac{A_0F_2-A_2F_0}{A_0'F_2-A_2'F_0},$$

$$\frac{A_0F_2-A_2F_0}{A_0'F_2-A_2'F_0}=\frac{A_0F_3-A_3F_0}{A_0'F_3-A_3'F_0},$$

$$\frac{A_0F_3-A_3F_0}{A_0'F_3-A_3'F_0}=\frac{A_0F_1-A_1F_0}{A_0'F_1-A_1'F_0},$$

führen beziehungsweise zu den folgenden Gleichungen:

$$F_0\{(A_1A_2'-A_2A_1')F_0+(A_2A_0'-A_0A_2')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_2\}=0,$$

$$F_0\{(A_2A_3'-A_3A_2')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_2+(A_0A_2'-A_2A_0')F_3\}=0,$$

$$F_0\{(A_1A_3'-A_3A_1')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_3\}=0;$$

also zu den Gleichungen:

156)

$$(A_1A_2'-A_2A_1')F_0+(A_2A_0'-A_0A_2')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_2=0,$$

$$(A_2A_3'-A_3A_2')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_2+(A_0A_2'-A_2A_0')F_3=0,$$

$$(A_1A_3'-A_3A_1')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_3=0;$$

und umgekehrt führen diese Gleichungen zu den Gleichungen 155), wovon man sich auf der Stelle überzeugt, wenn man die Gleichungen 156) sämmtlich mit F_0 multiplicirt, und dann auf den linken Seiten beziehungsweise

$$A_0A_0'F_1F_2,\qquad A_0A_0'F_2F_3,\qquad A_0A_0'F_1F_3$$

addirt und subtrahirt.

Die Gleichungen

157)

$$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{A_0'F_1-A_1'F_0}=\frac{A_1F_2-A_2F_1}{A_1'F_2-A_2'F_1},$$

$$\frac{A_0F_2-A_2F_0}{A_0'F_2-A_2'F_0}=\frac{A_2F_3-A_3F_2}{A_2'F_3-A_3'F_2},$$

$$\frac{A_0F_3-A_3F_0}{A_0'F_3-A_3'F_0}=\frac{A_3F_1-A_1F_3}{A_3'F_1-A_1'F_3}$$

führen beziehungsweise zu den Gleichungen:

$$F_1\{(A_1A_2'-A_2A_1')F_0+(A_2A_0'-A_0A_2')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_2\}=0,$$
$$F_2\{(A_2A_3'-A_3A_2')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_2+(A_0A_2'-A_2A_0')F_3\}=0,$$
$$F_3\{(A_1A_3'-A_3A_1')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_3\}=0;$$

also zu den Gleichungen:

158)

$$(A_1A_2'-A_2A_1')F_0+(A_2A_0'-A_0A_2')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_2=0,$$
$$(A_2A_3'-A_3A_2')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_2+(A_0A_2'-A_2A_0')F_3=0,$$
$$(A_1A_3'-A_3A_1')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_3=0;$$

folglich zu denselben Gleichungen wie in 156); und umgekehrt führen die Gleichungen 158) zu den Gleichungen 157), wovon man sich auf der Stelle überzeugt, wenn man die Gleichungen 158) nach der Reihe mit

$$F_1, \quad F_2, \quad F_3$$

multiplicirt, und dann auf den linken Seiten beziehungsweise

$$A_1A_1'F_0F_2, \quad A_2A_2'F_0F_3, \quad A_3A_3'F_0F_1$$

addirt und subtrahirt.

Hieraus sieht man, dass die Gleichungen 153) oder 155) durch die Gleichungen 157) vollständig ersetzt werden können.

Es können also auch die Gleichungen 154), oder die Gleichungen:

159)

$$\frac{A_0H_0-A_1H_1}{A_0'H_0-A_1'H_1}=\frac{A_0H_0-A_2H_2}{A_0'H_0-A_2'H_2},$$
$$\frac{A_0H_0-A_2H_2}{A_0'H_0-A_2'H_2}=\frac{A_0H_0-A_3H_3}{A_0'H_0-A_3'H_3},$$
$$\frac{A_0H_0-A_3H_3}{A_0'H_0-A_3'H_3}=\frac{A_0H_0-A_1H_1}{A_0'H_0-A_1'H_1};$$

durch die Gleichungen:

160)

$$\frac{A_0H_0-A_1H_1}{A_0'H_0-A_1'H_1}=\frac{A_1H_1-A_2H_2}{A_1'H_1-A_2'H_2},$$
$$\frac{A_0H_0-A_2H_2}{A_0'H_0-A_2'H_2}=\frac{A_2H_2-A_3H_3}{A_2'H_2-A_3'H_3},$$
$$\frac{A_0H_0-A_3H_3}{A_0'H_0-A_3'H_3}=\frac{A_3H_3-A_1H_1}{A_3'H_3-A_1'H_1}$$

vollständig ersetzt werden.

Die drei Gleichungen

161)

$$\frac{A_1F_2-A_2F_1}{A_1'F_2-A_2'F_1}=\frac{A_2F_3-A_3F_2}{A_2'F_3-A_3'F_2},$$

$$\frac{A_2F_3-A_3F_2}{A_2'F_3-A_3'F_2}=\frac{A_3F_1-A_1F_3}{A_3'F_1-A_1'F_3},$$

$$\frac{A_3F_1-A_1F_3}{A_3'F_1-A_1'F_3}=\frac{A_1F_2-A_2F_1}{A_1'F_2-A_2'F_1}$$

führen beziehungsweise zu den Gleichungen:

$$F_2\{(A_2A_3'-A_3A_2')F_1+(A_3A_1'-A_1A_3')F_2+(A_1A_2'-A_2A_1')F_3\}=0,$$

$$F_3\{(A_2A_3'-A_3A_2')F_1+(A_3A_1'-A_1A_3')F_2+(A_1A_2'-A_2A_1')F_3\}=0,$$

$$F_1\{(A_2A_3'-A_3A_2')F_1+(A_3A_1'-A_1A_3')F_2+(A_1A_2'-A_2A_1')F_3\}=0;$$

also sämmtlich zu der Gleichung:

162)

$$(A_2A_3'-A_3A_2')F_1+(A_3A_1'-A_1A_3')F_2+(A_1A_2'-A_2A_1')F_3=0,$$

und umgekehrt führt diese Gleichung zu den drei Gleichungen 161), wovon man sich auf der Stelle überzeugt, wenn man die Gleichung 162) nach der Reihe mit

$$F_2, \quad F_3, \quad F_1$$

multiplicirt, und dann auf den linken Seiten beziehungsweise

$$A_2A_2'F_1F_3, \quad A_3A_3'F_1F_2, \quad A_1A_1'F_2F_3$$

addirt und subtrahirt.

Die drei Gleichungen:

163)

$$\frac{A_1H_1-A_2H_2}{A_1'H_1-A_2'H_2}=\frac{A_2H_3-A_3H_2}{A_2'H_3-A_3'H_2},$$

$$\frac{A_2H_3-A_3H_2}{A_2'H_3-A_3'H_2}=\frac{A_3H_3-A_1H_1}{A_3'H_3-A_1'H_1},$$

$$\frac{A_3H_3-A_1H_1}{A_3'H_3-A_1'H_1}=\frac{A_1H_1-A_2H_2}{A_1'H_1-A_2'H_2}$$

führen sämmtlich zu der Gleichung:

164)

$$\frac{A_2A_3'-A_3A_2'}{H_1}+\frac{A_3A_1'-A_1A_3'}{H_2}+\frac{A_1A_2'-A_2A_1'}{H_3}=0$$

oder:

165)
$$(A_2A_3'-A_3A_2')H_2H_3+(A_3A_1'-A_1A_3')H_3H_1+(A_1A_2'-A_2A_1')H_1H_2 = 0,$$

und umgekehrt.

Die drei Gleichungen 156) oder 158) führen durch Elimination von F_0 zu den drei Gleichungen:

166)
$$\left.\begin{aligned}(A_0A_2'-A_2A_0')\{&(A_2A_3'-A_3A_2')F_1+(A_3A_1'-A_1A_3')F_2\\&+(A_1A_2'-A_2A_1')F_3\}\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}(A_0A_3'-A_3A_0')\{&(A_2A_3'-A_3A_2')F_1+(A_3A_1'-A_1A_3')F_2\\&+(A_1A_2'-A_2A_1')F_3\}\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}(A_0A_1'-A_1A_0')\{&(A_2A_3'-A_3A_2')F_1+(A_3A_1'-A_1A_3')F_2\\&+(A_1A_2'-A_2A_1')F_3\}\end{aligned}\right\} = 0;$$

also, wenn nur nicht zugleich

$$A_0A_1'-A_1A_0' = 0, \quad A_0A_2'-A_2A_0' = 0, \quad A_0A_3'-A_3A_0' = 0$$

ist, zu der Gleichung:

167)
$$(A_2A_3'-A_3A_2')F_1+(A_3A_1'-A_1A_3')F_2+(A_1A_2'-A_2A_1')F_3 = 0,$$

Wenn man aus der

1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 1sten

der Gleichungen 156) oder 158) beziehungsweise

$$F_2, \quad F_3, \quad F_1$$

eliminirt, so erhält man die Gleichungen:

168)
$$\left.\begin{aligned}(A_0A_2'-A_2A_0')\{&(A_1A_3'-A_3A_1')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_1\\&+(A_0A_1'-A_1A_0')F_3\}\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}(A_0A_3'-A_3A_0')\{&(A_1A_2'-A_2A_1')F_0+(A_2A_0'-A_0A_2')F_1\\&+(A_0A_1'-A_1A_0')F_2\}\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}(A_0A_1'-A_1A_0')\{&(A_2A_3'-A_3A_2')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_2\\&+(A_0A_2'-A_2A_0')F_3\}\end{aligned}\right\} = 0;$$

also, wenn nicht

$A_0A_1' - A_1A_0' = 0, \quad A_0A_2' - A_2A_0' = 0, \quad A_0A_3' - A_3A_0' = 0$

ist, die Gleichungen:

169)

$$(A_1A_3' - A_3A_1')F_0 + (A_3A_0' - A_0A_3')F_1 + (A_0A_1' - A_1A_0')F_3 =$$
$$(A_1A_2' - A_2A_1')F_0 + (A_2A_0' - A_0A_2')F_1 + (A_0A_1' - A_1A_0')F_2 =$$
$$(A_2A_3' - A_3A_2')F_0 + (A_3A_0' - A_0A_3')F_2 + (A_0A_2' - A_2A_0')F_3 =$$

Man sieht also, dass, wenn die in Rede stehende Voraussetzung erfüllt ist, aus zweien der drei Gleichungen 156) oder 158) immer die dritte Gleichung folgt.

Wir wollen jetzt annehmen, dass

170) . . $$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{A_0'F_1 - A_1'F_0} = \frac{A_1F_2 - A_2F_1}{A_1'F_2 - A_2'F_1} = \frac{A_2F_3 - A_3F_2}{A_2'F_3 - A_3'F_2}$$

sei.

Nach dem Obigen führt die Gleichung

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{A_0'F_1 - A_1'F_0} = \frac{A_1F_2 - A_2F_1}{A_1'F_2 - A_2'F_1}$$

zu der Gleichung

$$(A_1A_2' - A_2A_1')F_0 + (A_2A_0' - A_0A_2')F_1 + (A_0A_1' - A_1A_0')F_2 =$$

und umgekehrt.

Die Gleichung

$$\frac{A_1F_2 - A_2F_1}{A_1'F_2 - A_2'F_1} = \frac{A_2F_3 - A_3F_2}{A_2'F_3 - A_3'F_2}$$

führt nach dem Obigen zu der Gleichung

$$(A_2A_3' - A_3A_2')F_1 + (A_3A_1' - A_1A_3')F_2 + (A_1A_2' - A_2A_1')F_3 =$$

und umgekehrt.

Aus den beiden Gleichungen:

$$(A_1A_2' - A_2A_1')F_0 + (A_2A_0' - A_0A_2')F_1 + (A_0A_1' - A_1A_0')F_2 =$$
$$(A_2A_3' - A_3A_2')F_1 + (A_3A_1' - A_1A_3')F_2 + (A_1A_2' - A_2A_1')F_3 =$$

folgt durch Elimination von F_1 die Gleichung:

$$(A_1A_2' - A_2A_1')\{(A_2A_3' - A_3A_2')F_0 + (A_3A_0' - A_0A_3')F_2 + (A_0A_2' - A_2A_0')F_3\} = 0,$$

so, wenn nicht

$$A_1A_2' - A_2A_1' = 0$$

t, die Gleichung

$$A_2A_3' - A_3A_2')F_0 + (A_3A_0' - A_0A_3')F_2 + (A_0A_2' - A_2A_0')F_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{A_0'F_1 - A_1'F_0} = \frac{A_1F_2 - A_2F_1}{A_1'F_2 - A_2'F_1},$$

$$\frac{A_1F_2 - A_2F_1}{A_1'F_2 - A_2'F_1} = \frac{A_2F_3 - A_3F_2}{A_2'F_3 - A_3'F_2};$$

folglich aus den Gleichungen

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{A_0'F_1 - A_1'F_0} = \frac{A_1F_2 - A_2F_1}{A_1'F_2 - A_2'F_1} = \frac{A_2F_3 - A_3F_2}{A_2'F_3 - A_3'F_2},$$

ergeben sich also, wenn nicht

$$A_1A_2' - A_2A_1' = 0 \quad \text{oder} \quad A_1A_2' = A_2A_1'$$

ist, die Gleichungen:

$$(A_1A_2' - A_2A_1')F_0 + (A_2A_0' - A_0A_2')F_1 + (A_0A_1' - A_1A_0')F_2 = 0,$$

$$(A_2A_3' - A_3A_2')F_0 + (A_3A_0' - A_0A_3')F_2 + (A_0A_2' - A_2A_0')F_3 = 0;$$

also nach dem Obigen die Gleichungen:

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{A_0'F_1 - A_1'F_0} = \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{A_0'F_2 - A_2'F_0},$$

$$\frac{A_0F_2 - A_2F_0}{A_0'F_2 - A_2'F_0} = \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{A_0'F_3 - A_3'F_0}$$

oder:

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{A_0'F_1 - A_1'F_0} = \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{A_0'F_2 - A_2'F_0} = \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{A_0'F_3 - A_3'F_0}.$$

Wenn die Gleichungen 153) oder 155) erfüllt sind, so sind die Gleichungen 156) erfüllt; also sind die Gleichungen 158) erfüllt, und nach dem Obigen sind folglich die Gleichungen 157) erfüllt. Hieraus ergiebt sich, dass, wenn

$$\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{A_0'F_1 - A_1'F_0} = \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{A_0'F_2 - A_2'F_0} = \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{A_0'F_3 - A_3'F_0}$$

ist, dann immer

$$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{A_0'F_1-A_1'F_0}=\frac{A_0F_2-A_2F_0}{A_0'F_2-A_2'F_0}=\frac{A_0F_3-A_3F_0}{A_0'F_3-A_3'F_0}$$
$$=\frac{A_1F_2-A_2F_1}{A_1'F_2-A_2'F_1}=\frac{A_1F_3-A_3F_1}{A_1'F_3-A_3'F_1}=\frac{A_2F_3-A_3F_2}{A_2'F_3-A_3'F_2}$$

ist.

Aus den bisherigen Betrachtungen schliesst man, dass unter der Voraussetzung, dass nicht

$$A_1A_2'-A_2A_1'=0 \quad \text{oder} \quad A_1A_2'=A_2A_1'$$

ist, die Bedingungsgleichungen 153) der Parallellität, nämlich die Gleichungen:

$$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{A_0'F_1-A_1'F_0}=\frac{A_0F_2-A_2F_0}{A_0'F_2-A_2'F_0}=\frac{A_0F_3-A_3F_0}{A_0'F_3-A_3'F_0},$$

immer vollständig durch die Bedingungsgleichungen:

171) .... $$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{A_0'F_1-A_1'F_0}=\frac{A_1F_2-A_2F_1}{A_1'F_2-A_2'F_1}=\frac{A_2F_3-A_3F_2}{A_2'F_3-A_3'F_2}$$

ersetzt werden können.

Von weiteren Untersuchungen über diesen Gegenstand nehme ich jetzt Abstand, um nicht zu weitläufig zu werden.

§. 21.

Wir wollen jetzt die Gleichungen der Durchschnittslinie der beiden durch die Gleichungen:

172) . . . . . $$\begin{cases} A_0p_0+A_1p_1+A_2p_2+A_3p_3=0, \\ A_0'p_0+A_1'p_1+A_2'p_2+A_3'p_3=0 \end{cases}$$

charakterisirten Ebenen suchen.

Es sei $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ ein Punkt in der zu bestimmenden Durchschnittslinie und

173) . . $$\frac{p_0-p_0'}{J}=\frac{p_1-p_1'}{K}=\frac{p_2-p_2'}{L}=\frac{p_3-p_3'}{M}=r$$

seien deren Gleichungen. Da der Punkt $(p_0'p_1'p_2'p_3')$ in den beiden gegebenen Ebenen liegt, so haben wir nach 172) die beiden Gleichungen:

174) . . . . $$\begin{cases} A_0p_0'+A_1p_1'+A_2p_2'+A_3p_3'=0, \\ A_0'p_0'+A_1'p_1'+A_2'p_2'+A_3'p_3'=0; \end{cases}$$

und die Gleichungen der beiden gegebenen Ebenen sind also auch:

$$175)\ldots \begin{cases} A_0(p_0-p_0')+A_1(p_1-p_1')+A_2(p_2-p_2')+A_3(p_3-p_3') = 0, \\ A_0'(p_0-p_0')+A_1'(p_1-p_1')+A_2'(p_2-p_2')+A_3'(p_3-p_3') = 0. \end{cases}$$

Nach diesen beiden Gleichungen und den Gleichungen 173) erhalten wir für J, K, L, M die beiden Gleichungen:

$$A_0J + A_1K + A_2L + A_3M = 0,$$
$$A_0'J + A_1'K + A_2'L + A_3'M = 0;$$

wozu noch die bekannte Gleichung:

$$F_0J + F_1K + F_2L + F_3M = 0$$

kommt, so dass wir also zur Bestimmung von J, K, L, M die drei Gleichungen:

$$A_0J + A_1K + A_2L + A_3M = 0,$$
$$A_0'J + A_1'K + A_2'L + A_3'M = 0,$$
$$F_0J + F_1K + F_2L + F_3M = 0$$

haben. Multipliciren wir diese drei Gleichungen nach der Reihe zuerst mit

$$A_2'F_3 - A_3'F_2,$$
$$A_3F_2 - A_2F_3,$$
$$A_2A_3' - A_3A_2';$$

dann mit

$$A_1'F_3 - A_3'F_1,$$
$$A_3F_1 - A_1F_3,$$
$$A_1A_3' - A_3A_1';$$

endlich mit

$$A_1'F_2 - A_2'F_1,$$
$$A_2F_1 - A_1F_2,$$
$$A_1A_2' - A_2A_1';$$

und addiren sie dann in allen drei Fällen zu einander, so erhalten wir die drei folgenden Gleichungen:

$$\{(A_2A_3'-A_3A_2')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_2+(A_0A_2'-A_2A_0')F_3\}J$$
$$= \{(A_3A_2'-A_2A_3')F_1+(A_1A_3'-A_3A_1')F_2+(A_2A_1'-A_1A_2')F_3\}K,$$

$$\{(A_3A_1'-A_1A_3')F_0+(A_0A_3'-A_3A_0')F_1+(A_1A_0'-A_0A_1')F_3\}J$$
$$=\{(A_3A_2'-A_2A_3')F_1+(A_1A_3'-A_3A_1')F_2+(A_2A_1'-A_1A_2')F_3\}L,$$

$$\{(A_1A_2'-A_2A_1')F_0+(A_2A_0'-A_0A_2')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_2\}J$$
$$=\{(A_3A_2'-A_2A_3')F_1+(A_1A_3'-A_3A_1')F_2+(A_2A_1'-A_1A_2')F_3\}M;$$

aus denen sich ergiebt, dass man:

176)

$$J=(A_3A_2'-A_2A_3')F_1+(A_1A_3'-A_3A_1')F_2+(A_2A_1'-A_1A_2')F_3,$$
$$K=(A_2A_3'-A_3A_2')F_0+(A_3A_0'-A_0A_3')F_2+(A_0A_2'-A_2A_0')F_3,$$
$$L=(A_3A_1'-A_1A_3')F_0+(A_0A_3'-A_3A_0')F_1+(A_1A_0'-A_0A_1')F_3,$$
$$M=(A_1A_2'-A_2A_1')F_0+(A_2A_0'-A_0A_2')F_1+(A_0A_1'-A_1A_0')F_2$$

setzen kann.

Für p_0', p_1', p_2', p_3' in den Gleichungen 173) kann man alle Werthe setzen, welche den drei Gleichungen:

177) . . .
$$\begin{cases} A_0p_0' + A_1p_1' + A_2p_2' + A_3p_3' = 0, \\ A_0'p_0' + A_1'p_1' + A_2'p_2' + A_3'p_3' = 0, \\ F_0p_0' + F_1p_1' + F_2p_2' + F_3p_3' = 3V \end{cases}$$

genügen.

§. 22.

Wir wollen jetzt die von den beiden durch die Gleichungen

178) . . . .
$$\begin{cases} A_0p_0 + A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 = 0, \\ A_0'p_0 + A_1'p_1 + A_2'p_2 + A_3'p_3 = 0 \end{cases}$$

charakterisirten Ebenen eingeschlossenen Winkel W bestimmen.

Die Gleichungen der beiden Ebenen in cartesischen Coordinaten sind nach 126), wenn (abc) und $(a'b'c')$ zwei in denselben liegende Punkte sind:

$$\frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}(x-a)+\frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}(y-b)+\frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}(z-c)=0,$$

$$\frac{A_0'F_1-A_1'F_0}{\sin\alpha_1}(x-a')+\frac{A_0'F_2-A_2'F_0}{\sin\alpha_2}(y-b')+\frac{A_0'F_3-A_3'F_0}{\sin\alpha_3}(z-c')$$
$$=0.$$

Um also einen Ausdruck für $\cos W$ zu finden, muss man zuerst (m. s. a. a. O. S. 182. 21)) die Grösse:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{A_0'F_1-A_1'F_0}{\sin\alpha_1}\sin\alpha_1^2\\
+\;&\frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{A_0'F_2-A_2'F_0}{\sin\alpha_2}\sin\alpha_2^2\\
+\;&\frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}\cdot\frac{A_0'F_3-A_3'F_0}{\sin\alpha_3}\sin\alpha_3^2\\
+\;&\left(\frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{A_0'F_3-A_3'F_0}{\sin\alpha_3}+\frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}\cdot\frac{A_0'F_2-A_2'F_0}{\sin\alpha_2}\right)\\
&\times(\cos\alpha_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_1)\\
+\;&\left(\frac{A_0F_3-A_3F_0}{\sin\alpha_3}\cdot\frac{A_0'F_1-A_1'F_0}{\sin\alpha_1}+\frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{A_0'F_3-A_3'F_0}{\sin\alpha_3}\right)\\
&\times(\cos\alpha_3\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)\\
+\;&\left(\frac{A_0F_1-A_1F_0}{\sin\alpha_1}\cdot\frac{A_0'F_2-A_2'F_0}{\sin\alpha_2}+\frac{A_0F_2-A_2F_0}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{A_0'F_1-A_1'F_0}{\sin\alpha_1}\right)\\
&\times(\cos\alpha_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_3)
\end{aligned}$$

entwickeln. Diese Grösse ist aber, wie sogleich in die Augen fällt:

$$\begin{aligned}
&(A_0F_1-A_1F_0)(A_0'F_1-A_1'F_0)\\
+\;&(A_0F_2-A_2F_0)(A_0'F_2-A_2'F_0)\\
+\;&(A_0F_3-A_3F_0)(A_0'F_3-A_3'F_0)\\
-\;&\left\{\begin{matrix}(A_0F_2-A_2F_0)(A_0'F_3-A_3'F_0)\\+(A_0F_3-A_3F_0)(A_0'F_2-A_2'F_0)\end{matrix}\right\}\cos(F_2F_3)\\
-\;&\left\{\begin{matrix}(A_0F_3-A_3F_0)(A_0'F_1-A_1'F_0)\\+(A_0F_1-A_1F_0)(A_0'F_3-A_3'F_0)\end{matrix}\right\}\cos(F_1F_3)\\
-\;&\left\{\begin{matrix}(A_0F_1-A_1F_0)(A_0'F_2-A_2'F_0)\\+(A_0F_2-A_2F_0)(A_0'F_1-A_1'F_0)\end{matrix}\right\}\cos(F_1F_2),
\end{aligned}$$

also, wie man leicht auf ganz ähnliche Art wie in §. 17. findet:

$$\begin{aligned}
F_0^2\{\;&A_0A_0'+A_1A_1'+A_2A_2'+A_3A_3'\\
&-(A_0A_1'+A_1A_0')\cos(F_0F_1)\\
&-(A_0A_2'+A_2A_0')\cos(F_0F_2)\\
&-(A_0A_3'+A_3A_0')\cos(F_0F_3)\\
&-(A_1A_2'+A_2A_1')\cos(F_1F_2)\\
&-(A_1A_3'+A_3A_1')\cos(F_1F_3)\\
&-(A_2A_3'+A_3A_2')\cos(F_2F_3)\}\\
&=F_0^2S,
\end{aligned}$$

wenn wir der Kürze wegen:

$$179) \quad \ldots \quad S = A_0A_0' + A_1A_1' + A_2A_2' + A_3A_3' - (A_0A_1' + A_1A_0')\cos(F_0F_1) - (A_0A_2' + A_2A_0')\cos(F_0F_2) - (A_0A_3' + A_3A_0')\cos(F_0F_3) - (A_1A_2' + A_2A_1')\cos(F_1F_2) - (A_1A_3' + A_3A_1')\cos(F_1F_3) - (A_2A_3' + A_3A_2')\cos(F_2F_3)$$

setzen.

Ferner müssen wir die beiden Grössen:

$$\left(\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{\sin\alpha_1}\right)^2 \sin\alpha_1^2 + \left(\frac{A_0F_2 - A_2F_0}{\sin\alpha_2}\right)^2 \sin\alpha_2^2 + \left(\frac{A_0F_3 - A_3F_0}{\sin\alpha_3}\right)^2 \sin\alpha_3^2 + 2\frac{A_0F_2 - A_2F_0}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{A_0F_3 - A_3F_0}{\sin\alpha_3}(\cos\alpha_2\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1) + 2\frac{A_0F_3 - A_3F_0}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{A_0F_1 - A_1F_0}{\sin\alpha_1}(\cos\alpha_3\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + 2\frac{A_0F_1 - A_1F_0}{\sin\alpha_1} \cdot \frac{A_0F_2 - A_2F_0}{\sin\alpha_2}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3)$$

und

$$\left(\frac{A_0'F_1 - A_1'F_0}{\sin\alpha_1}\right)^2 \sin\alpha_1^2 + \left(\frac{A_0'F_2 - A_2'F_0}{\sin\alpha_2}\right)^2 \sin\alpha_2^2 + \left(\frac{A_0'F_3 - A_3'F_0}{\sin\alpha_3}\right)^2 \sin\alpha_3^2 + 2\frac{A_0'F_2 - A_2'F_0}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{A_0'F_3 - A_3'F_0}{\sin\alpha_3}(\cos\alpha_2\cos\alpha_3 - \cos\alpha_1) + 2\frac{A_0'F_3 - A_3'F_0}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{A_0'F_1 - A_1'F_0}{\sin\alpha_1}(\cos\alpha_3\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) + 2\frac{A_0'F_1 - A_1'F_0}{\sin\alpha_1} \cdot \frac{A_0'F_2 - A_2'F_0}{\sin\alpha_2}(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_3)$$

entwickeln. Diese beiden Grössen sind aber:

$$(A_0F_1 - A_1F_0)^2 + (A_0F_2 - A_2F_0)^2 + (A_0F_3 - A_3F_0)^2 - 2(A_0F_1 - A_1F_0)(A_0F_2 - A_2F_0)\cos(F_1F_2) - 2(A_0F_2 - A_2F_0)(A_0F_3 - A_3F_0)\cos(F_2F_3) - 2(A_0F_3 - A_3F_0)(A_0F_1 - A_1F_0)\cos(F_1F_3)$$

und

$$(A_0'F_1 - A_1'F_0)^2 + (A_0'F_2 - A_2'F_0)^2 + (A_0'F_3 - A_3'F_0)^2$$
$$-2(A_0'F_1 - A_1'F_0)(A_0'F_2 - A_2'F_0)\cos(F_1F_2)$$
$$-2(A_0'F_2 - A_2'F_0)(A_0'F_3 - A_3'F_0)\cos(F_2F_3)$$
$$-2(A_0'F_3 - A_3'F_0)(A_0'F_1 - A_1'F_0)\cos(F_1F_3);$$

und ganz wie in §. 17. findet man leicht, dass, wenn man:

180)

$$\begin{aligned} Q = {} & A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 - 2A_0A_1\cos(F_0F_1) \\ & - 2A_0A_2\cos(F_0F_2) \\ & - 2A_0A_3\cos(F_0F_3) \\ & - 2A_1A_2\cos(F_1F_2) \\ & - 2A_1A_3\cos(F_1F_3) \\ & - 2A_2A_3\cos(F_2F_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q' = {} & A_0'^2 + A_1'^2 + A_2'^2 + A_3'^2 - 2A_0'A_1'\cos(F_0F_1) \\ & - 2A_0'A_2'\cos(F_0F_2) \\ & - 2A_0'A_3'\cos(F_0F_3) \\ & - 2A_1'A_2'\cos(F_1F_2) \\ & - 2A_1'A_3'\cos(F_1F_3) \\ & - 2A_2'A_3'\cos(F_2F_3) \end{aligned}$$

setzt, die beiden in Rede stehenden Grössen beziehungsweise

$$F_0^2Q \quad \text{und} \quad F_0^2Q'$$

sind.

Nach der Formel a. a. O. S. 182. 21) ist also:

$$\cos W = \pm\frac{F_0^2S}{F_0\sqrt{Q}.F_0\sqrt{Q'}},$$

folglich:

181) . . . . . $\cos W = \pm\dfrac{S}{\sqrt{QQ'}}$.

Die Bedingungsgleichung, dass die beiden Ebenen auf einander senkrecht stehen, ist $W = 90^0$, $\cos W = 0$, also $S = 0$, und folglich nach 179):

182) . . . . $0 = A_0A_0' + A_1A_1' + A_2A_2' + A_3A_3'$
$$-(A_0A_1' + A_1A_0')\cos(F_0F_1)$$
$$-(A_0A_2' + A_2A_0')\cos(F_0F_2)$$
$$-(A_0A_3' + A_3A_0')\cos(F_0F_3)$$
$$-(A_1A_2' + A_2A_1')\cos(F_1F_2)$$
$$-(A_1A_3' + A_3A_1')\cos(F_1F_3)$$
$$-(A_2A_3' + A_3A_2')\cos(F_2F_3).$$

§. 23.

Die Gleichung einer Ebene sei:

183) . . . . . $A_0p_0 + A_1p_1 + A_2p_2 + A_3p_3 = 0,$

und die Gleichungen einer Geraden seien:

184) . . . $\frac{p_0-p_0'}{\cos W_0'} = \frac{p_1-p_1'}{\cos W_1'} = \frac{p_2-p_2'}{\cos W_2'} = \frac{p_3-p_3'}{\cos W_3'},$

wo bekanntlich:

185)... $F_0\cos W_0' + F_1\cos W_1' + F_2\cos W_2' + F_3\cos W_3' = 0$

ist. Um nun die von der durch die Gleichungen 184) charakterisirten Geraden mit der durch die Gleichung 183) charakterisirten Ebene eingeschlossenen Winkel W' zu finden, errichten wir auf die in Rede stehende Ebene ein Perpendikel und bezeichnen dessen Gleichungen durch:

186) . . . $\frac{p_0-p_0''}{\cos W_0''} = \frac{p_1-p_1''}{\cos W_1''} = \frac{p_2-p_2''}{\cos W_2''} = \frac{p_3-p_3''}{\cos W_3''}.$

Setzen wir dann der Kürze wegen:

187)

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_0 &= -A_0 + A_1\cos(F_0F_1) + A_2\cos(F_0F_2) + A_3\cos(F_0F_3),\\
\mathrm{A}_1 &= A_0\cos(F_0F_1) - A_1 + A_2\cos(F_1F_2) + A_3\cos(F_1F_3),\\
\mathrm{A}_2 &= A_0\cos(F_0F_2) + A_1\cos(F_1F_2) - A_2 + A_3\cos(F_2F_3),\\
\mathrm{A}_3 &= A_0\cos(F_0F_3) + A_1\cos(F_1F_3) + A_2\cos(F_2F_3) - A_3;
\end{aligned}$$

so haben wir nach 137) und 41) die Gleichungen:

$$\frac{\cos W_0''}{\mathrm{A}_0} = \frac{\cos W_1''}{\mathrm{A}_1} = \frac{\cos W_2''}{\mathrm{A}_2} = \frac{\cos W_3''}{\mathrm{A}_3} = \mu,$$

also:

$$\cos W_0'' = \mu\mathrm{A}_0, \quad \cos W_1'' = \mu\mathrm{A}_1,$$
$$\cos W_2'' = \mu\mathrm{A}_2, \quad \cos W_3'' = \mu\mathrm{A}_3;$$

und nach 47) erhalten wir also zur Bestimmung von W' offenbar die folgende Formel:

$$\begin{aligned}188)\ldots 18V^2\sin W' = &-\mu a_{01}{}^2F_0F_1(A_1\cos W_0' + A_0\cos W_1')\\ &-\mu a_{02}{}^2F_0F_2(A_2\cos W_0' + A_0\cos W_2')\\ &-\mu a_{03}{}^2F_0F_3(A_3\cos W_0' + A_0\cos W_3')\\ &-\mu a_{12}{}^2F_1F_2(A_2\cos W_1' + A_1\cos W_2')\\ &-\mu a_{13}{}^2F_1F_3(A_3\cos W_1' + A_1\cos W_3')\\ &-\mu a_{23}{}^2F_2F_3(A_3\cos W_2' + A_2\cos W_3').\end{aligned}$$

Nach 28) ist:

$$\begin{aligned}N = &\sin\alpha_1{}^2\cos W_1''{}^2\\ &+\sin\alpha_2{}^2\cos W_2''{}^2\\ &+\sin\alpha_3{}^2\cos W_3''{}^2\\ &+2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\cos W_1''\cos W_2''\\ &+2\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\cos W_2''\cos W_3''\\ &+2\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3\cos W_3''\cos W_1'',\end{aligned}$$

also hat man nach dem Obigen zur Bestimmung von μ die Gleichung:

$$N = \mu^2\left\{\begin{aligned}&A_1{}^2\sin\alpha_1{}^2\\ &+A_2{}^2\sin\alpha_2{}^2\\ &+A_3{}^2\sin\alpha_3{}^2\\ &+2A_1A_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\\ &+2A_2A_3\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\\ &+2A_3A_1\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3\end{aligned}\right\},$$

woraus sich die Formel:

$$189)\ldots \pm\sqrt{N} = \mu.\sqrt{\left\{\begin{aligned}&A_1{}^2\sin\alpha_1{}^2\\ &+A_2{}^2\sin\alpha_2{}^2\\ &+A_3{}^2\sin\alpha_3{}^2\\ &+2A_1A_2\sin\alpha_1\sin\alpha_2\cos\alpha_3\\ &+2A_2A_3\cos\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3\\ &+2A_3A_1\sin\alpha_1\cos\alpha_2\sin\alpha_3\end{aligned}\right\}}$$

ergiebt, in welcher man das Zeichen so zu nehmen hat, dass die Formel 188) für $\sin W'$ einen positiven Werth liefert, weil, insofern W' zwischen 0 und 180° liegt, $\sin W'$ nur positiv sein kann.

Sind die Gleichungen der Geraden unter der Form

$$\frac{p_0-p_0'}{J'} = \frac{p_1-p_1'}{K'} = \frac{p_2-p_2'}{L'} = \frac{p_3-p_3'}{M'}$$

gegeben, so kann man mittelst der aus §. 5. bekannten Formeln in die Formel 188) statt der Grössen

$$\cos W_0', \quad \cos W_1', \quad \cos W_2', \quad \cos W_3'$$

auch leicht die Grössen

$$J', \quad K', \quad L', \quad M'$$

einführen, was wir der Kürze wegen hier jetzt nicht weiter ausführen wollen.

Anmerkung.

Rücksichtlich der Entwickelung der Gleichung einer durch drei gegebene Punkte gehenden Ebene s. m. weiter unten §. 27. Anmerkung.

Viertes Kapitel.

Veränderung oder Verwandlung der tetraedrischen Coordinaten.

§. 24.

Unter fortwährender Zugrundelegung des fundamentalen Tetraeders $A_0A_1A_2A_3$ denken wir uns jetzt ein zweites Tetraeder $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, dessen Seitenflächen, sowie sie den Ecken $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ gegenüberstehen, wir beziehungsweise durch F_0', F_1', F_2', F_3' bezeichnen. Die primitiven tetraedrischen Coordinaten der Ecken

$$\mathfrak{A}_0, \quad \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_3$$

bezeichnen wir beziehungsweise durch:

$$\overset{0}{p_0}, \overset{0}{p_1}, \overset{0}{p_2}, \overset{0}{p_3}; \quad \overset{1}{p_0}, \overset{1}{p_1}, \overset{1}{p_2}, \overset{1}{p_3};$$

$$\overset{2}{p_0}, \overset{2}{p_1}, \overset{2}{p_2}, \overset{2}{p_3}; \quad \overset{3}{p_0}, \overset{3}{p_1}, \overset{3}{p_2}, \overset{3}{p_3}.$$

Die tetraedrischen Gleichungen der Seitenflächen

$$F_0', \quad F_1', \quad F_2', \quad F_3'$$

welche aus den vorstehenden tetraedrischen Coordinaten der Ecken

ederzeit abgeleitet werden können, und daher hier als bekannt der gegeben anzunehmen sind, seien beziehungsweise:

190)

$$A_0'p_0 + A_0''p_1 + A_0'''p_2 + A_0^{IV}p_3 = 0,$$
$$A_1'p_0 + A_1''p_1 + A_1'''p_2 + A_1^{IV}p_3 = 0,$$
$$A_2'p_0 + A_2''p_1 + A_2'''p_2 + A_2^{IV}p_3 = 0,$$
$$A_3'p_0 + A_3''p_1 + A_3'''p_2 + A_3^{IV}p_3 = 0.$$

Der Kürze wegen setzen wir:

191)

$$\begin{aligned} Q_0 = {} & A_0'^2 + A_0''^2 + A_0'''^2 + A_0^{IV2} - 2A_0'A_0''\cos(F_0F_1) \\ & - 2A_0'A_0'''\cos(F_0F_2) \\ & - 2A_0'A_0^{IV}\cos(F_0F_3) \\ & - 2A_0''A_0'''\cos(F_1F_2) \\ & - 2A_0''A_0^{IV}\cos(F_1F_3) \\ & - 2A_0'''A_0^{IV}\cos(F_2F_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 = {} & A_1'^2 + A_1''^2 + A_1'''^2 + A_1^{IV2} - 2A_1'A_1''\cos(F_0F_1) \\ & - 2A_1'A_1'''\cos(F_0F_2) \\ & - 2A_1'A_1^{IV}\cos(F_0F_3) \\ & - 2A_1''A_1'''\cos(F_1F_2) \\ & - 2A_1''A_1^{IV}\cos(F_1F_3) \\ & - 2A_1'''A_1^{IV}\cos(F_2F_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 = {} & A_2'^2 + A_2''^2 + A_2'''^2 + A_2^{IV2} - 2A_2'A_2''\cos(F_0F_1) \\ & - 2A_2'A_2'''\cos(F_0F_2) \\ & - 2A_2'A_2^{IV}\cos(F_0F_3) \\ & - 2A_2''A_2'''\cos(F_1F_2) \\ & - 2A_2''A_2^{IV}\cos(F_1F_3) \\ & - 2A_2'''A_2^{IV}\cos(F_2F_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 = {} & A_3'^2 + A_3''^2 + A_3'''^2 + A_3^{IV2} - 2A_3'A_3''\cos(F_0F_1) \\ & - 2A_3'A_3'''\cos(F_0F_2) \\ & - 2A_3'A_3^{IV}\cos(F_0F_3) \\ & - 2A_3''A_3'''\cos(F_1F_2) \\ & - 2A_3''A_3^{IV}\cos(F_1F_3) \\ & - 2A_3'''A_3^{IV}\cos(F_2F_3). \end{aligned}$$

Es sei nun M ein beliebiger Punkt im Raume, dessen primitive

tetraedrische Coordinaten, nämlich seine Coordinaten in Bezu
auf das primitive Tetraeder $A_0A_1A_2A_3$, wir durch

$$p_0', \quad p_1', \quad p_2', \quad p_3';$$

und dessen secundäre tetraedrische Coordinaten, nämlich sei
Coordinaten in Bezug auf das secundäre Tetraeder $\mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$, w
durch

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3$$

bezeichnen wollen.

Nach der Formel 147) ist:

$$P_0 = \pm \frac{A_0'p_0' + A_0''p_1' + A_0'''p_2' + A_0^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_0}},$$

wenn man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nim
jenachdem A_0' und die Seite der Ebene F_0', auf welcher d
Punkt A_0 liegt, gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. E
kanntlich (§. 2.) ist aber die Seite der Ebene F_0', auf welch
der Punkt $\mathfrak{A}_0$ liegt, in dem neuen Coordinatensysteme die positi
Seite der Ebene F_0'. Liegen nun die Punkte A_0 und $\mathfrak{A}_0$ a
einer Seite von F_0', so liegt A_0 auf der positiven Seite von F
und man muss also in der obigen Formel das obere oder unte
Vorzeichen nehmen, jenachdem A_0' positiv oder negativ i
Liegen dagegen A_0 und $\mathfrak{A}_0$ auf entgegengesetzten Seiten v
F_0', so liegt A_0 auf der negativen Seite von F_0', und man mu
also in der obigen Formel das obere oder untere Vorzeichen nehme
jenachdem A_0' negativ oder positiv ist. Nun ist aber klar, da
man in der ersten der vier obigen Gleichungen der Seitenfläch
des secundären Tetraeders den Coefficienten A_0' beliebig posit
oder negativ nehmen kann, wenn man nur danach auch die übrig
Coefficienten der ersten Gleichung gehörig bestimmt, und nim
man also A_0' positiv oder negativ, jenachdem die Punkte A_0 u
$\mathfrak{A}_0$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten von F
liegen, so hat man immer das obere Vorzeichen zu nehmen, u
muss also

$$P_0 = \frac{A_0'p_0' + A_0''p_1' + A_0'''p_2' + A_0^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_0}}$$

setzen.

In der Gleichung

$$P_1 = \pm \frac{A_1'p_0' + A_1''p_1' + A_1'''p_2' + A_1^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_1}}$$

hat man bekanntlich das obere oder untere Vorzeichen zu nehme

jenachdem A_1' und die Seite der Ebene F_1', auf welcher der Punkt A_0 liegt, gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Bekanntlich (§. 2.) ist aber die Seite der Ebene F_1', auf welcher der Punkt $\mathfrak{A}_1$ liegt, im neuen Coordinatensysteme die positive Seite der Ebene F_1'. Liegen nun die Punkte A_0 und $\mathfrak{A}_1$ auf einer Seite von F_1', so liegt A_0 auf der positiven Seite von F_1', und man muss also in der obigen Formel das obere oder untere Vorzeichen nehmen, jenachdem A_1' positiv oder negativ ist. Liegen dagegen die Punkte A_0 und $\mathfrak{A}_1$ auf entgegengesetzten Seiten von F_1', so liegt A_0 auf der negativen Seite von F_1', und man muss also in der obigen Formel das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem A_1' negativ oder positiv ist. Nun ist aber klar, dass man in der zweiten der vier obigen Gleichungen der Seitenflächen des secundären Tetraeders den Coefficienten A_1' beliebig positiv oder negativ nehmen kann, wenn man nur danach auch die übrigen Coefficienten der zweiten Gleichung gehörig bestimmt, und nimmt man also A_1' positiv oder negativ, jenachdem die Punkte A_0 und $\mathfrak{A}_1$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene F_1' liegen, so hat man immer das obere Vorzeichen zu nehmen, und muss also

$$P_1 = \frac{A_1'p_0' + A_1''p_1' + A_1'''p_2' + A_1^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_1}}$$

setzen.

Im Allgemeinen ergiebt sich hieraus nun Folgendes:

Man nehme A_0' positiv oder negativ, jenachdem die Punkte A_0 und $\mathfrak{A}_0$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene F_0' liegen.

Man nehme A_1' positiv oder negativ, jenachdem die Punkte A_0 und $\mathfrak{A}_1$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene F_1' liegen.

Man nehme A_2' positiv oder negativ, jenachdem die Punkte A_0 und $\mathfrak{A}_2$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene F_2' liegen.

Man nehme A_3' positiv oder negativ, jenachdem die Punkte A_0 und $\mathfrak{A}_3$ auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene F_3' liegen.

Dann sind ganz im Allgemeinen die Formeln:

$$192)\ \ldots \begin{cases} P_0 = \dfrac{A_0'p_0' + A_0''p_1' + A_0'''p_2' + A_0^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_0}}, \\ P_1 = \dfrac{A_1'p_0' + A_1''p_1' + A_1'''p_2' + A_1^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_1}}, \\ P_2 = \dfrac{A_2'p_0' + A_2''p_1' + A_2'''p_2' + A_2^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_2}}, \\ P_3 = \dfrac{A_3'p_0' + A_3''p_1' + A_3'''p_2' + A_3^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_3}}; \end{cases}$$

oder:

193)

$$\begin{aligned} A_0'p_0' + A_0''p_1' + A_0'''p_2' + A_0^{IV}p_3' &= P_0\sqrt{Q_0}, \\ A_1'p_0' + A_1''p_1' + A_1'''p_2' + A_1^{IV}p_3' &= P_1\sqrt{Q_1}, \\ A_2'p_0' + A_2''p_1' + A_2'''p_2' + A_2^{IV}p_3' &= P_2\sqrt{Q_2}, \\ A_3'p_0' + A_3''p_1' + A_3'''p_2' + A_3^{IV}p_3' &= P_3\sqrt{Q_3} \end{aligned}$$

gültig.

§. 25.

Der im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Punkt M ist ein beliebiger Punkt im Raume, und man kann also für denselben jeden beliebigen Punkt des Raums setzen.

Bezeichnen wir den körperlichen Inhalt des secundären Tetraeders durch V', so haben wir für jeden Punkt M im Raume bekanntlich die Gleichung:

$$P_0F_0' + P_1F_1' + P_2F_2' + P_3F_3' = 3V',$$

also nach den Formeln des vorhergehenden Paragraphen die Gleichung:

$$\begin{aligned} 194)\ \ldots\ 3V' = &\frac{A_0'p_0' + A_0''p_1' + A_0'''p_2' + A_0^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_0}}F_0' \\ &+ \frac{A_1'p_0' + A_1''p_1' + A_1'''p_2' + A_1^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_1}}F_1' \\ &+ \frac{A_2'p_0' + A_2''p_1' + A_2'''p_2' + A_2^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_2}}F_2' \\ &+ \frac{A_3'p_0' + A_3''p_1' + A_3'''p_2' + A_3^{IV}p_3'}{\sqrt{Q_3}}F_3'. \end{aligned}$$

Verlegen wir nun den beliebigen Punkt M nach und nach in e Punkte

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3;$$

haben wir in der vorstehenden Gleichung nach und nach

$$\begin{aligned} &p_0' = H_0, \quad p_1' = 0, \quad p_2' = 0, \quad p_3' = 0;\\ &p_0' = 0, \quad p_1' = H_1, \quad p_2' = 0, \quad p_3' = 0;\\ &p_0' = 0, \quad p_1' = 0, \quad p_2' = H_2, \quad p_3' = 0;\\ &p_0' = 0, \quad p_1' = 0, \quad p_2' = 0, \quad p_3' = H_3 \end{aligned}$$

u setzen, und erhalten hierdurch die folgenden merkwürdigen Gleichungen:

195)

$$\begin{aligned} 3V' &= \left(\frac{A_0'F_0'}{\sqrt{Q_0}} + \frac{A_1'F_1'}{\sqrt{Q_1}} + \frac{A_2'F_2'}{\sqrt{Q_2}} + \frac{A_3'F_3'}{\sqrt{Q_3}}\right)H_0,\\ 3V' &= \left(\frac{A_0''F_0'}{\sqrt{Q_0}} + \frac{A_1''F_1'}{\sqrt{Q_1}} + \frac{A_2''F_2'}{\sqrt{Q_2}} + \frac{A_3''F_3'}{\sqrt{Q_3}}\right)H_1,\\ 3V' &= \left(\frac{A_0'''F_0'}{\sqrt{Q_0}} + \frac{A_1'''F_1'}{\sqrt{Q_1}} + \frac{A_2'''F_2'}{\sqrt{Q_2}} + \frac{A_3'''F_3'}{\sqrt{Q_3}}\right)H_2,\\ 3V' &= \left(\frac{A_0^{IV}F_0'}{\sqrt{Q_0}} + \frac{A_1^{IV}F_1'}{\sqrt{Q_1}} + \frac{A_2^{IV}F_2'}{\sqrt{Q_2}} + \frac{A_3^{IV}F_3'}{\sqrt{Q_3}}\right)H_3. \end{aligned}$$

Weil nun

$$F_0' = \frac{3V'}{H_0'}, \quad F_1' = \frac{3V'}{H_1'}, \quad F_2' = \frac{3V'}{H_2'}, \quad F_3' = \frac{3V'}{H_3'}$$

st, so werden die vorstehenden Gleichungen 195):

196)

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_0} &= \frac{A_0'}{\sqrt{Q_0}}\cdot\frac{1}{H_0'} + \frac{A_1'}{\sqrt{Q_1}}\cdot\frac{1}{H_1'} + \frac{A_2'}{\sqrt{Q_2}}\cdot\frac{1}{H_2'} + \frac{A_3'}{\sqrt{Q_3}}\cdot\frac{1}{H_3'},\\ \frac{1}{H_1} &= \frac{A_0''}{\sqrt{Q_0}}\cdot\frac{1}{H_0'} + \frac{A_1''}{\sqrt{Q_1}}\cdot\frac{1}{H_1'} + \frac{A_2''}{\sqrt{Q_2}}\cdot\frac{1}{H_2'} + \frac{A_3''}{\sqrt{Q_3}}\cdot\frac{1}{H_3'},\\ \frac{1}{H_2} &= \frac{A_0'''}{\sqrt{Q_0}}\cdot\frac{1}{H_0'} + \frac{A_1'''}{\sqrt{Q_1}}\cdot\frac{1}{H_1'} + \frac{A_2'''}{\sqrt{Q_2}}\cdot\frac{1}{H_2'} + \frac{A_3'''}{\sqrt{Q_3}}\cdot\frac{1}{H_3'},\\ \frac{1}{H_3} &= \frac{A_0^{IV}}{\sqrt{Q_0}}\cdot\frac{1}{H_0'} + \frac{A_1^{IV}}{\sqrt{Q_1}}\cdot\frac{1}{H_1'} + \frac{A_2^{IV}}{\sqrt{Q_2}}\cdot\frac{1}{H_2'} + \frac{A_3^{IV}}{\sqrt{Q_3}}\cdot\frac{1}{H_3'}; \end{aligned}$$

selbstverständlich die Höhen des secundären Tetraeders durch H_0', H_1', H_2', H_3' bezeichnet worden sind.

Weil

$$\frac{1}{H_0}=\frac{F_0}{3V},\quad \frac{1}{H_1}=\frac{F_1}{3V},\quad \frac{1}{H_2}=\frac{F_2}{3V},\quad \frac{1}{H_3}=\frac{F_3}{3V};$$

$$\frac{1}{H_0'}=\frac{F_0'}{3V'},\quad \frac{1}{H_1'}=\frac{F_1'}{3V'},\quad \frac{1}{H_2'}=\frac{F_2'}{3V'},\quad \frac{1}{H_3'}=\frac{F_3'}{3V'}$$

ist, so ergeben sich hieraus unmittelbar die folgenden Gleichungen:

197)

$$F_0\frac{V'}{V}=\frac{A_0'}{\sqrt{Q_0}}F_0'+\frac{A_1'}{\sqrt{Q_1}}F_1'+\frac{A_2'}{\sqrt{Q_2}}F_2'+\frac{A_3'}{\sqrt{Q_3}}F_3',$$

$$F_1\frac{V'}{V}=\frac{A_0''}{\sqrt{Q_0}}F_0'+\frac{A_1''}{\sqrt{Q_1}}F_1'+\frac{A_2''}{\sqrt{Q_2}}F_2'+\frac{A_3''}{\sqrt{Q_3}}F_3',$$

$$F_2\frac{V'}{V}=\frac{A_0'''}{\sqrt{Q_0}}F_0'+\frac{A_1'''}{\sqrt{Q_1}}F_1'+\frac{A_2'''}{\sqrt{Q_2}}F_2'+\frac{A_3'''}{\sqrt{Q_3}}F_3',$$

$$F_3\frac{V'}{V}=\frac{A_0^{IV}}{\sqrt{Q_0}}F_0'+\frac{A_1^{IV}}{\sqrt{Q_1}}F_1'+\frac{A_2^{IV}}{\sqrt{Q_2}}F_2'+\frac{A_3^{IV}}{\sqrt{Q_3}}F_3';$$

oder, wenn

$$F_0'=\mu_0\frac{V'}{V},\quad F_1'=\mu_1\frac{V'}{V},\quad F_2'=\mu_2\frac{V'}{V},\quad F_3'=\mu_3\frac{V'}{V}$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

198)

$$F_0=\frac{A_0'}{\sqrt{Q_0}}\mu_0+\frac{A_1'}{\sqrt{Q_1}}\mu_1+\frac{A_2'}{\sqrt{Q_2}}\mu_2+\frac{A_3'}{\sqrt{Q_3}}\mu_3,$$

$$F_1=\frac{A_0''}{\sqrt{Q_0}}\mu_0+\frac{A_1''}{\sqrt{Q_1}}\mu_1+\frac{A_2''}{\sqrt{Q_2}}\mu_2+\frac{A_3''}{\sqrt{Q_3}}\mu_3,$$

$$F_2=\frac{A_0'''}{\sqrt{Q_0}}\mu_0+\frac{A_1'''}{\sqrt{Q_1}}\mu_1+\frac{A_2'''}{\sqrt{Q_2}}\mu_2+\frac{A_3'''}{\sqrt{Q_3}}\mu_3,$$

$$F_3=\frac{A_0^{IV}}{\sqrt{Q_0}}\mu_0+\frac{A_1^{IV}}{\sqrt{Q_1}}\mu_1+\frac{A_2^{IV}}{\sqrt{Q_2}}\mu_2+\frac{A_3^{IV}}{\sqrt{Q_3}}\mu_3.$$

Man hat also die beiden folgenden Systeme merkwürdiger Gleichungen:

199)

$$\frac{1}{H_0} = A_0' \cdot \frac{1}{H_0'\sqrt{Q_0}} + A_1' \cdot \frac{1}{H_1'\sqrt{Q_1}} + A_2' \cdot \frac{1}{H_2'\sqrt{Q_2}} + A_3' \cdot \frac{1}{H_3'\sqrt{Q_3}},$$

$$\frac{1}{H_1} = A_0'' \cdot \frac{1}{H_0'\sqrt{Q_0}} + A_1'' \cdot \frac{1}{H_1'\sqrt{Q_1}} + A_2'' \cdot \frac{1}{H_2'\sqrt{Q_2}} + A_3'' \cdot \frac{1}{H_3'\sqrt{Q_3}},$$

$$\frac{1}{H_2} = A_0''' \cdot \frac{1}{H_0'\sqrt{Q_0}} + A_1''' \cdot \frac{1}{H_1'\sqrt{Q_1}} + A_2''' \cdot \frac{1}{H_2'\sqrt{Q_2}} + A_3''' \cdot \frac{1}{H_3'\sqrt{Q_3}},$$

$$\frac{1}{H_3} = A_0^{IV} \cdot \frac{1}{H_0'\sqrt{Q_0}} + A_1^{IV} \cdot \frac{1}{H_1'\sqrt{Q_1}} + A_2^{IV} \cdot \frac{1}{H_2'\sqrt{Q_2}} + A_3^{IV} \cdot \frac{1}{H_3'\sqrt{Q_3}}$$

und:

200)

$$F_0 = A_0' \cdot \frac{\mu_0}{\sqrt{Q_0}} + A_1' \cdot \frac{\mu_1}{\sqrt{Q_1}} + A_2' \cdot \frac{\mu_2}{\sqrt{Q_2}} + A_3' \cdot \frac{\mu_3}{\sqrt{Q_3}},$$

$$F_1 = A_0'' \cdot \frac{\mu_0}{\sqrt{Q_0}} + A_1'' \cdot \frac{\mu_1}{\sqrt{Q_1}} + A_2'' \cdot \frac{\mu_2}{\sqrt{Q_2}} + A_3'' \cdot \frac{\mu_3}{\sqrt{Q_3}},$$

$$F_2 = A_0''' \cdot \frac{\mu_0}{\sqrt{Q_0}} + A_1''' \cdot \frac{\mu_1}{\sqrt{Q_1}} + A_2''' \cdot \frac{\mu_2}{\sqrt{Q_2}} + A_3''' \cdot \frac{\mu_3}{\sqrt{Q_3}},$$

$$F_3 = A_0^{IV} \cdot \frac{\mu_0}{\sqrt{Q_0}} + A_1^{IV} \cdot \frac{\mu_1}{\sqrt{Q_1}} + A_2^{IV} \cdot \frac{\mu_2}{\sqrt{Q_2}} + A_3^{IV} \cdot \frac{\mu_3}{\sqrt{Q_3}}.$$

§. 26.

Wenn wir die aus dem Obigen 193) bekannten Gleichungen:

201)

$$A_0'p_0' + A_0''p_1' + A_0'''p_2' + A_0^{IV}p_3' = P_0\sqrt{Q_0},$$

$$A_1'p_0' + A_1''p_1' + A_1'''p_2' + A_1^{IV}p_3' = P_1\sqrt{Q_1},$$

$$A_2'p_0' + A_2''p_1' + A_2'''p_2' + A_2^{IV}p_3' = P_2\sqrt{Q_2},$$

$$A_3'p_0' + A_3''p_1' + A_3'''p_2' + A_3^{IV}p_3' = P_3\sqrt{Q_3}$$

in Bezug auf p_0', p_1', p_2', p_3' als unbekannte Grössen durch algebraische Elimination auflösen, so erhalten wir vier Gleichungen von der Form:

202)

$$p_0' = A_0' P_0 \vee Q_0 + A_0'' P_1 \vee Q_1 + A_0''' P_2 \vee Q_2 + A_0^{IV} P_3 \vee Q_3,$$
$$p_1' = A_1' P_0 \vee Q_0 + A_1'' P_1 \vee Q_1 + A_1''' P_2 \vee Q_2 + A_1^{IV} P_3 \vee Q_3,$$
$$p_2' = A_2' P_0 \vee Q_0 + A_2'' P_1 \vee Q_1 + A_2''' P_2 \vee Q_2 + A_2^{IV} P_3 \vee Q_3,$$
$$p_3' = A_3' P_0 \vee Q_0 + A_3'' P_1 \vee Q_1 + A_3''' P_2 \vee Q_2 + A_3^{IV} P_3 \vee Q_3;$$

in denen alle durch A mit den erforderlichen Accenten o Indices bezeichnete Coefficienten als gegeben zu betrachten si

Weil bekanntlich

$$p_0' F_0 + p_1' F_1 + p_2' F_2 + p_3' F_3 = 3V$$

ist, so erhalten wir aus den vorstehenden Gleichungen die jeden Punkt M im Raume geltende Gleichung:

203)

$$\begin{aligned} 3V = {} & (A_0' P_0 \vee Q_0 + A_0'' P_1 \vee Q_1 + A_0''' P_2 \vee Q_2 + A_0^{IV} P_3 \vee Q_3) \\ & + (A_1' P_0 \vee Q_0 + A_1'' P_1 \vee Q_1 + A_1''' P_2 \vee Q_2 + A_1^{IV} P_3 \vee Q_3) \\ & + (A_2' P_0 \vee Q_0 + A_2'' P_1 \vee Q_1 + A_2''' P_2 \vee Q_2 + A_2^{IV} P_3 \vee Q_3) \\ & + (A_3' P_0 \vee Q_0 + A_3'' P_1 \vee Q_1 + A_3''' P_2 \vee Q_2 + A_3^{IV} P_3 \vee Q_3) \end{aligned}$$

Verlegen wir nun den beliebigen Punkt M nach und nach die Punkte

$$\mathfrak{A}_0, \quad \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_3;$$

so haben wir nach und nach zu setzen:

$$P_0 = H_0', \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0;$$
$$P_0 = 0, \quad P_1 = H_1', \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0;$$
$$P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = H_2', \quad P_3 = 0;$$
$$P_0 = 0, \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = H_3';$$

und erhalten dadurch die folgenden Gleichungen:

204)

$$3V = (A_0' F_0 + A_1' F_1 + A_2' F_2 + A_3' F_3) H_0' \vee Q_0,$$
$$3V = (A_0'' F_0 + A_1'' F_1 + A_2'' F_2 + A_3'' F_3) H_1' \vee Q_1,$$
$$3V = (A_0''' F_0 + A_1''' F_1 + A_2''' F_2 + A_3''' F_3) H_2' \vee Q_2,$$
$$3V = (A_0^{IV} F_0 + A_1^{IV} F_1 + A_2^{IV} F_2 + A_3^{IV} F_3) H_3' \vee Q_3;$$

also, weil

$$F_0 = \frac{3V}{H_0}, \qquad F_1 = \frac{3V}{H_1}, \qquad F_2 = \frac{3V}{H_2}, \qquad F_3 = \frac{3V}{H_3}$$

die Gleichungen:

205)

$$\frac{1}{H_0'} = \left(\frac{A_0'}{H_0} + \frac{A_1'}{H_1} + \frac{A_2'}{H_2} + \frac{A_3'}{H_3}\right)\sqrt{Q_0},$$

$$\frac{1}{H_1'} = \left(\frac{A_0''}{H_0} + \frac{A_1''}{H_1} + \frac{A_2''}{H_2} + \frac{A_3''}{H_3}\right)\sqrt{Q_1},$$

$$\frac{1}{H_2'} = \left(\frac{A_0'''}{H_0} + \frac{A_1'''}{H_1} + \frac{A_2'''}{H_2} + \frac{A_3'''}{H_3}\right)\sqrt{Q_2},$$

$$\frac{1}{H_3'} = \left(\frac{A_0^{IV}}{H_0} + \frac{A_1^{IV}}{H_1} + \frac{A_2^{IV}}{H_2} + \frac{A_3^{IV}}{H_3}\right)\sqrt{Q_3}.$$

Weil

$$H_0' = \frac{3V'}{F_0'}, \quad H_1' = \frac{3V'}{F_1'}, \quad H_2' = \frac{3V'}{F_2'}, \quad H_3' = \frac{3V'}{F_3'}$$

, so erhält man:

206)

$$F_0'\frac{V}{V'} = (A_0'F_0 + A_1'F_1 + A_2'F_2 + A_3'F_3)\sqrt{Q_0},$$

$$F_1'\frac{V}{V'} = (A_0''F_0 + A_1''F_1 + A_2''F_2 + A_3''F_3)\sqrt{Q_1},$$

$$F_2'\frac{V}{V'} = (A_0'''F_0 + A_1'''F_1 + A_2'''F_2 + A_3'''F_3)\sqrt{Q_2},$$

$$F_3'\frac{V}{V'} = (A_0^{IV}F_0 + A_1^{IV}F_1 + A_2^{IV}F_2 + A_3^{IV}F_3)\sqrt{Q_3};$$

der, weil im vorhergehenden Paragraphen

$$F_0' = \mu_0\frac{V'}{V}, \quad F_1' = \mu_1\frac{V'}{V}, \quad F_2' = \mu_2\frac{V'}{V}, \quad F_3' = \mu_3\frac{V'}{V}$$

gesetzt worden ist:

207)

$$\mu_0 = (A_0'F_0 + A_1'F_1 + A_2'F_2 + A_3'F_3)\sqrt{Q_0},$$

$$\mu_1 = (A_0''F_0 + A_1''F_1 + A_2''F_2 + A_3''F_3)\sqrt{Q_1},$$

$$\mu_2 = (A_0'''F_0 + A_1'''F_1 + A_2'''F_2 + A_3'''F_3)\sqrt{Q_2},$$

$$\mu_3 = (A_0^{IV}F_0 + A_1^{IV}F_1 + A_2^{IV}F_2 + A_3^{IV}F_3)\sqrt{Q_3}.$$

Es ist

$$F_0' : F_1' : F_2' : F_3' = \mu_0 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3.$$

§. 27.

Es seien

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dv &= 0, \\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1v &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2v &= 0 \end{aligned}$$

überhaupt drei Gleichungen zwischen den vier Grössen x, y, z, v.

Man multiplicire diese Gleichungen nach der Reihe mit:

$$\begin{array}{lll} c_1d_2 - d_1c_2, & c_2d - d_2c, & cd_1 - dc_1; \\ d_1b_2 - b_1d_2, & d_2b - b_2d, & db_1 - bd_1; \\ b_1c_2 - c_1b_2, & b_2c - c_2b, & bc_1 - cb_1; \end{array}$$

und addire dieselben dann zu einander, so erhält man, weil

$$\begin{aligned} c(c_1d_2 - d_1c_2) + c_1(c_2d - d_2c) + c_2(cd_1 - dc_1) &= 0, \\ d(c_1d_2 - d_1c_2) + d_1(c_2d - d_2c) + d_2(cd_1 - dc_1) &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(d_1b_2 - b_1d_2) + b_1(d_2b - b_2d) + b_2(db_1 - bd_1) &= 0, \\ d(d_1b_2 - b_1d_2) + d_1(d_2b - b_2d) + d_2(db_1 - bd_1) &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(b_1c_2 - c_1b_2) + b_1(b_2c - c_2b) + b_2(bc_1 - cb_1) &= 0, \\ c(b_1c_2 - c_1b_2) + c_1(b_2c - c_2b) + c_2(bc_1 - cb_1) &= 0 \end{aligned}$$

ist, die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\{a(c_1d_2 - d_1c_2) + a_1(c_2d - d_2c) + a_2(cd_1 - dc_1)\}x \\ +\,&\{b(c_1d_2 - d_1c_2) + b_1(c_2d - d_2c) + b_2(cd_1 - dc_1)\}y \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\{a(d_1b_2 - b_1d_2) + a_1(d_2b - b_2d) + a_2(db_1 - bd_1)\}x \\ +\,&\{c(d_1b_2 - b_1d_2) + c_1(d_2b - b_2d) + c_2(db_1 - bd_1)\}z \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\{a(b_1c_2 - c_1b_2) + a_1(b_2c - c_2b) + a_2(bc_1 - cb_1)\}x \\ +\,&\{d(b_1c_2 - c_1b_2) + d_1(b_2c - c_2b) + d_2(bc_1 - cb_1)\}v \end{aligned}\right\} = 0;$$

und kann also:

$$\begin{aligned} x &= \mp b(c_1d_2 - d_1c_2) \mp b_1(c_2d - d_2c) \mp b_2(cd_1 - dc_1) \\ &= \mp c(d_1b_2 - b_1d_2) \mp c_1(d_2b - b_2d) \mp c_2(db_1 - bd_1) \\ &= \mp d(b_1c_2 - c_1b_2) \mp d_1(b_2c - c_2b) \mp d_2(bc_1 - cb_1), \end{aligned}$$

$$y = \pm a(c_1 d_2 - d_1 c_2) \pm a_1(c_2 d - d_2 c) \pm a_2(c d_1 - d c_1),$$
$$z = \pm a(d_1 b_2 - b_1 d_2) \pm a_1(d_2 b - b_2 d) \pm a_2(d b_1 - b d_1),$$
$$v = \pm a(b_1 c_2 - c_1 b_2) \pm a_1(b_2 c - c_2 b) \pm a_2(b c_1 - c b_1);$$

wo die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, setzen.

Anmerkung. Wenn drei Punkte

$$(p_0' p_1' p_2' p_3'), \quad (p_0'' p_1'' p_2'' p_3''), \quad (p_0''' p_1''' p_2''' p_3''')$$

gegeben sind, und die Gleichung der durch diese drei Punkte gehenden Ebene gesucht wird, so hat man, weil

$$A_0 p_0 + A_1 p_1 + A_2 p_2 + A_3 p_3 = 0$$

die allgemeine Form der gesuchten Gleichung ist, zur Bestimmung von

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

die drei folgenden Gleichungen:

$$A_0 p_0' + A_1 p_1' + A_2 p_2' + A_3 p_3' = 0,$$
$$A_0 p_0'' + A_1 p_1'' + A_2 p_2'' + A_3 p_3'' = 0,$$
$$A_0 p_0''' + A_1 p_1''' + A_2 p_2''' + A_3 p_3''' = 0.$$

Also erhält man die zur Bestimmung von

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

nöthigen Formeln, wenn man in den oben entwickelten Formeln für

$$a, \quad b, \quad c, \quad d;$$
$$a_1, \quad b_1, \quad c_1, \quad d_1;$$
$$a_2, \quad b_2, \quad c_2, \quad d_2;$$
$$x, \quad y, \quad z, \quad v$$

beziehungsweise:

$$p_0', \quad p_1', \quad p_2', \quad p_3';$$
$$p_0'', \quad p_1'', \quad p_2'', \quad p_3'';$$
$$p_0''', \quad p_1''', \quad p_2''', \quad p_3''';$$
$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_3$$

setzt.

§. 28.

Die Coordinaten der Punkte

$$\mathfrak{A}_0, \quad \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{A}_3$$

sind bekanntlich (§. 24.) durch

$$\overset{0}{p_0}, \overset{0}{p_1}, \overset{0}{p_2}, \overset{0}{p_3}; \quad \overset{1}{p_0}, \overset{1}{p_1}, \overset{1}{p_2}, \overset{1}{p_3};$$

$$\overset{2}{p_0}, \overset{2}{p_1}, \overset{2}{p_2}, \overset{2}{p_3}; \quad \overset{3}{p_0}, \overset{3}{p_1}, \overset{3}{p_2}, \overset{3}{p_3}$$

bezeichnet worden. Die Gleichungen der Ebenen

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3, \quad \mathfrak{A}_0\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$$

sind beziehungsweise (190)):

208)

$$A_0'p_0 + A_0''p_1 + A_0'''p_2 + A_0^{IV}p_3 = 0,$$
$$A_1'p_0 + A_1''p_1 + A_1'''p_2 + A_1^{IV}p_3 = 0,$$
$$A_2'p_0 + A_2''p_1 + A_2'''p_2 + A_2^{IV}p_3 = 0,$$
$$A_3'p_0 + A_3''p_1 + A_3'''p_2 + A_3^{IV}p_3 = 0.$$

Also hat man die folgenden Gleichungen:

209)

$$A_0'\overset{1}{p_0} + A_0''\overset{1}{p_1} + A_0'''\overset{1}{p_2} + A_0^{IV}\overset{1}{p_3} = 0,$$
$$A_0'\overset{2}{p_0} + A_0''\overset{2}{p_1} + A_0'''\overset{2}{p_2} + A_0^{IV}\overset{2}{p_3} = 0,$$
$$A_0'\overset{3}{p_0} + A_0''\overset{3}{p_1} + A_0'''\overset{3}{p_2} + A_0^{IV}\overset{3}{p_3} = 0;$$

$$A_1'\overset{0}{p_0} + A_1''\overset{0}{p_1} + A_1'''\overset{0}{p_2} + A_1^{IV}\overset{0}{p_3} = 0,$$
$$A_1'\overset{2}{p_0} + A_1''\overset{2}{p_1} + A_1'''\overset{2}{p_2} + A_1^{IV}\overset{2}{p_3} = 0,$$
$$A_1'\overset{3}{p_0} + A_1''\overset{3}{p_1} + A_1'''\overset{3}{p_2} + A_1^{IV}\overset{3}{p_3} = 0;$$

$$A_2'\overset{0}{p_0} + A_2''\overset{0}{p_1} + A_2'''\overset{0}{p_2} + A_2^{IV}\overset{0}{p_3} = 0,$$
$$A_2'\overset{1}{p_0} + A_2''\overset{1}{p_1} + A_2'''\overset{1}{p_2} + A_2^{IV}\overset{1}{p_3} = 0,$$
$$A_2'\overset{3}{p_0} + A_2''\overset{3}{p_1} + A_2'''\overset{3}{p_2} + A_2^{IV}\overset{3}{p_3} = 0;$$

$$A_3'\overset{0}{p}_0 + A_3''\overset{0}{p}_1 + A_3'''\overset{0}{p}_2 + A_3^{IV}\overset{0}{p}_3 = 0,$$

$$A_3'\overset{1}{p}_0 + A_3''\overset{1}{p}_1 + A_3'''\overset{1}{p}_2 + A_3^{IV}\overset{1}{p}_3 = 0,$$

$$A_3'\overset{2}{p}_0 + A_3''\overset{2}{p}_1 + A_3'''\overset{2}{p}_2 + A_3^{IV}\overset{2}{p}_3 = 0.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

210)

$$\begin{aligned}\Omega_0' &= \overset{1}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{1}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2)\\ &= \overset{1}{p}_2(\overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_3) + \overset{2}{p}_2(\overset{3}{p}_3\overset{1}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_3) + \overset{3}{p}_2(\overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_3)\\ &= \overset{1}{p}_3(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1) + \overset{2}{p}_3(\overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_1) + \overset{3}{p}_3(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1),\end{aligned}$$

$$\Omega_0'' = \overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{1}{p}_2) + \overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2),$$

$$\Omega_0''' = \overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_3) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_3\overset{1}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_3) + \overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_3),$$

$$\Omega_0^{IV} = \overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_1) + \overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1);$$

so kann man nach dem vorhergehenden Paragraphen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen:

211)

$$A_0' = \pm\Omega_0', \quad A_0'' = \mp\Omega_0'', \quad A_0''' = \mp\Omega_0''', \quad A_0^{IV} = \mp\Omega_0^{IV}.$$

Setzen wir ferner:

212)

$$\begin{aligned}\Omega_1' &= \overset{0}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{2}{p}_2)\\ &= \overset{0}{p}_2(\overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_3) + \overset{2}{p}_2(\overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{0}{p}_3) + \overset{3}{p}_2(\overset{0}{p}_3\overset{2}{p}_1 - \overset{0}{p}_1\overset{2}{p}_3)\\ &= \overset{0}{p}_3(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1) + \overset{2}{p}_3(\overset{3}{p}_1\overset{0}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_1) + \overset{3}{p}_3(\overset{0}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{0}{p}_2\overset{2}{p}_1),\end{aligned}$$

$$\Omega_1'' = \overset{0}{p}_0(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{3}{p}_0(\overset{0}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{2}{p}_2),$$

$$\Omega_1''' = \overset{0}{p}_0(\overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_3) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{0}{p}_3) + \overset{3}{p}_0(\overset{0}{p}_3\overset{2}{p}_1 - \overset{0}{p}_1\overset{2}{p}_3),$$

$$\Omega_1^{IV} = \overset{0}{p}_0(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_1\overset{0}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_1) + \overset{3}{p}_0(\overset{0}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{0}{p}_2\overset{2}{p}_1);$$

so kann man nach dem vorhergehenden Paragraphen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen:

213)

$$A_1' = \pm\Omega_1', \quad A_1'' = \mp\Omega_1'', \quad A_1''' = \mp\Omega_1''', \quad A_1^{IV} = \mp\Omega_1^{IV}.$$

Setzen wir ferner:

214)

$$\begin{aligned}
\Omega_2' &= {}^{0\,1\,3}p_1(p_2p_3 - {}^{1\,3}p_3p_2) + {}^{1\,3\,0}p_1(p_2p_3 - {}^{3\,0}p_3p_2) + {}^{3\,0\,1}p_1(p_2p_3 - {}^{0\,1}p_3p_2)\\
&= {}^{0\,1\,3}p_2(p_3p_1 - {}^{1\,3}p_1p_3) + {}^{1\,3\,0}p_2(p_3p_1 - {}^{3\,0}p_1p_3) + {}^{3\,0\,1}p_2(p_3p_1 - {}^{0\,1}p_1p_3)\\
&= {}^{0\,1\,3}p_3(p_1p_2 - {}^{1\,3}p_2p_1) + {}^{1\,3\,0}p_3(p_1p_2 - {}^{3\,0}p_2p_1) + {}^{3\,0\,1}p_3(p_1p_2 - {}^{0\,1}p_2p_1),\\
\Omega_2'' &= {}^{0\,1\,3}p_0(p_2p_3 - {}^{1\,3}p_3p_2) + {}^{1\,3\,0}p_0(p_2p_3 - {}^{3\,0}p_3p_2) + {}^{3\,0\,1}p_0(p_2p_3 - {}^{0\,1}p_3p_2),\\
\Omega_2''' &= {}^{0\,1\,3}p_0(p_3p_1 - {}^{1\,3}p_1p_3) + {}^{1\,3\,0}p_0(p_3p_1 - {}^{3\,0}p_1p_3) + {}^{3\,0\,1}p_0(p_3p_1 - {}^{0\,1}p_1p_3),\\
\Omega_2^{IV} &= {}^{0\,1\,3}p_0(p_1p_2 - {}^{1\,3}p_2p_1) + {}^{1\,3\,0}p_0(p_1p_2 - {}^{3\,0}p_2p_1) + {}^{3\,0\,1}p_0(p_1p_2 - {}^{0\,1}p_2p_1);
\end{aligned}$$

so können wir nach dem vorhergehenden Paragraphen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen:

215)

$$A_2' = \pm\Omega_2', \quad A_2'' = \mp\Omega_2'', \quad A_2''' = \mp\Omega_2''', \quad A_2^{IV} = \mp\Omega_2^{IV}.$$

Endlich setzen wir:

216)

$$\begin{aligned}
\Omega_3' &= {}^{0\,1\,2}p_1(p_2p_3 - {}^{1\,2}p_3p_2) + {}^{1\,2\,0}p_1(p_2p_3 - {}^{2\,0}p_3p_2) + {}^{2\,0\,1}p_1(p_2p_3 - {}^{0\,1}p_3p_2)\\
&= {}^{0\,1\,2}p_2(p_3p_1 - {}^{1\,2}p_1p_3) + {}^{1\,2\,0}p_2(p_3p_1 - {}^{2\,0}p_1p_3) + {}^{2\,0\,1}p_2(p_3p_1 - {}^{0\,1}p_1p_3)\\
&= {}^{0\,1\,2}p_3(p_1p_2 - {}^{1\,2}p_2p_1) + {}^{1\,2\,0}p_3(p_1p_2 - {}^{2\,0}p_2p_1) + {}^{2\,0\,1}p_3(p_1p_2 - {}^{0\,1}p_2p_1),\\
\Omega_3'' &= {}^{0\,1\,2}p_0(p_2p_3 - {}^{1\,2}p_3p_2) + {}^{1\,2\,0}p_0(p_2p_3 - {}^{2\,0}p_3p_2) + {}^{2\,0\,1}p_0(p_2p_3 - {}^{0\,1}p_3p_2),\\
\Omega_3''' &= {}^{0\,1\,2}p_0(p_3p_1 - {}^{1\,2}p_1p_3) + {}^{1\,2\,0}p_0(p_3p_1 - {}^{2\,0}p_1p_3) + {}^{2\,0\,1}p_0(p_3p_1 - {}^{0\,1}p_1p_3),\\
\Omega_3^{IV} &= {}^{0\,1\,2}p_0(p_1p_2 - {}^{1\,2}p_2p_1) + {}^{1\,2\,0}p_0(p_1p_2 - {}^{2\,0}p_2p_1) + {}^{2\,0\,1}p_0(p_1p_2 - {}^{0\,1}p_2p_1);
\end{aligned}$$

und können dann nach dem vorhergehenden Paragraphen mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen:

217)

$$A_3' = \pm\Omega_3', \quad A_3'' = \mp\Omega_3'', \quad A_3''' = \mp\Omega_3''', \quad A_3^{IV} = \mp\Omega_3^{IV}.$$

Sehr leicht überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Gleichungen:

218)

$$\mathfrak{Q}_0''\overset{0}{p}_0 - \mathfrak{Q}_1''\overset{1}{p}_0 + \mathfrak{Q}_2''\overset{2}{p}_0 - \mathfrak{Q}_3''\overset{3}{p}_0 = 0,$$

$$\mathfrak{Q}_0'''\overset{0}{p}_0 - \mathfrak{Q}_1'''\overset{1}{p}_0 + \mathfrak{Q}_2'''\overset{2}{p}_0 - \mathfrak{Q}_3'''\overset{3}{p}_0 = 0,$$

$$\mathfrak{Q}_0^{IV}\overset{0}{p}_0 - \mathfrak{Q}_1^{IV}\overset{1}{p}_0 + \mathfrak{Q}_2^{IV}\overset{2}{p}_0 - \mathfrak{Q}_3^{IV}\overset{3}{p}_0 = 0.$$

Ganz eben so leicht überzeugt man sich von der Richtigkeit r drei folgenden Gleichungen:

219)

$$\mathfrak{Q}_0'\overset{0}{p}_1 - \mathfrak{Q}_1'\overset{1}{p}_1 + \mathfrak{Q}_2'\overset{2}{p}_1 - \mathfrak{Q}_3'\overset{3}{p}_1 = 0,$$

$$\mathfrak{Q}_0'\overset{0}{p}_2 - \mathfrak{Q}_1'\overset{1}{p}_2 + \mathfrak{Q}_2'\overset{2}{p}_2 - \mathfrak{Q}_3'\overset{3}{p}_2 = 0,$$

$$\mathfrak{Q}_0'\overset{0}{p}_3 - \mathfrak{Q}_1'\overset{1}{p}_3 + \mathfrak{Q}_2'\overset{2}{p}_3 - \mathfrak{Q}_3'\overset{3}{p}_3 = 0.$$

§. 29.

In den Formeln:

$$A_0' = \pm\mathfrak{Q}_0', \quad A_1' = \pm\mathfrak{Q}_1', \quad A_2' = \pm\mathfrak{Q}_2', \quad A_3' = \pm\mathfrak{Q}_3'$$

bestimme man nun (m. s. §. 24.) die Zeichen so, dass

$$A_0', \quad A_1', \quad A_2', \quad A_3',$$

jede dieser Grössen einzeln, positiv oder negativ ist, jenachdem beziehungsweise die Punkte

$$\mathrm{A}_0 \text{ und } \mathfrak{A}_0, \quad \mathrm{A}_0 \text{ und } \mathfrak{A}_1, \quad \mathrm{A}_0 \text{ und } \mathfrak{A}_2, \quad \mathrm{A}_0 \text{ und } \mathfrak{A}_3$$

auf derselben Seite oder auf entgegengesetzten Seiten der Ebene

$$F_0', \quad F_1', \quad F_2', \quad F_3'$$

liegen.

Dann bestimmen sich die Zeichen, welche in den Formeln

$$A_0'' = \mp\mathfrak{Q}_0'', \quad A_0''' = \mp\mathfrak{Q}_0''', \quad A_0^{IV} = \mp\mathfrak{Q}_0^{IV};$$
$$A_1'' = \mp\mathfrak{Q}_1'', \quad A_1''' = \mp\mathfrak{Q}_1''', \quad A_1^{IV} = \mp\mathfrak{Q}_1^{IV};$$
$$A_2'' = \mp\mathfrak{Q}_2'', \quad A_2''' = \mp\mathfrak{Q}_2''', \quad A_2^{IV} = \mp\mathfrak{Q}_2^{IV};$$
$$A_3'' = \mp\mathfrak{Q}_3'', \quad A_3''' = \mp\mathfrak{Q}_3''', \quad A_3^{IV} = \mp\mathfrak{Q}_3^{IV}$$

zu nehmen sind, von selbst, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen in einer jeden der vier Reihen:

220)

$$A_0' = \pm\Omega_0', \quad A_0'' = \mp\Omega_0'', \quad A_0''' = \mp\Omega_0''', \quad A_0^{IV} = \mp\Omega_0^{IV};$$
$$A_1' = \pm\Omega_1', \quad A_1'' = \mp\Omega_1'', \quad A_1''' = \mp\Omega_1''', \quad A_1^{IV} = \mp\Omega_1^{IV};$$
$$A_2' = \pm\Omega_2', \quad A_2'' = \mp\Omega_2'', \quad A_2''' = \mp\Omega_2''', \quad A_2^{IV} = \mp\Omega_2^{IV};$$
$$A_3' = \pm\Omega_3', \quad A_3'' = \mp\Omega_3'', \quad A_3''' = \mp\Omega_3''', \quad A_3^{IV} = \mp\Omega_3^{IV};$$

natürlich in einer jeden dieser vier Reihen für sich, die obere und unteren Zeichen sich auf einander beziehen.

Hat man nun auf diese Weise die Grössen

$$A_0', \quad A_0'', \quad A_0''', \quad A_0^{IV};$$
$$A_1', \quad A_1'', \quad A_1''', \quad A_1^{IV};$$
$$A_2', \quad A_2'', \quad A_2''', \quad A_2^{IV};$$
$$A_3', \quad A_3'', \quad A_3''', \quad A_3^{IV}$$

richtig bestimmt, so hat man nach §. 26. 201) die vier folgenden Gleichungen:

221)

$$A_0'p_0' + A_0''p_1' + A_0'''p_2' + A_0^{IV}p_3' = P_0\sqrt{Q_0},$$
$$A_1'p_0' + A_1''p_1' + A_1'''p_2' + A_1^{IV}p_3' = P_1\sqrt{Q_1},$$
$$A_2'p_0' + A_2''p_1' + A_2'''p_2' + A_2^{IV}p_3' = P_2\sqrt{Q_2},$$
$$A_3'p_0' + A_3''p_1' + A_3'''p_2' + A_3^{IV}p_3' = P_3\sqrt{Q_3}.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich durch Multiplication mit

$$\overset{0}{p}_0, \quad \overset{1}{p}_0, \quad \overset{2}{p}_0, \quad \overset{3}{p}_0$$

die vier folgenden Gleichungen:

222)

$$A_0'\overset{0}{p}_0p_0' + A_0''\overset{0}{p}_0p_1' + A_0'''\overset{0}{p}_0p_2' + A_0^{IV}\overset{0}{p}_0p_3' = P_0\overset{0}{p}_0\sqrt{Q_0},$$
$$A_1'\overset{1}{p}_0p_0' + A_1''\overset{1}{p}_0p_1' + A_1'''\overset{1}{p}_0p_2' + A_1^{IV}\overset{1}{p}_0p_3' = P_1\overset{1}{p}_0\sqrt{Q_1},$$
$$A_2'\overset{2}{p}_0p_0' + A_2''\overset{2}{p}_0p_1' + A_2'''\overset{2}{p}_0p_2' + A_2^{IV}\overset{2}{p}_0p_3' = P_2\overset{2}{p}_0\sqrt{Q_2},$$
$$A_3'\overset{3}{p}_0p_0' + A_3''\overset{3}{p}_0p_1' + A_3'''\overset{3}{p}_0p_2' + A_3^{IV}\overset{3}{p}_0p_3' = P_3\overset{3}{p}_0\sqrt{Q_3};$$

und, da nun nach 218) in dem vorhergehenden Paragraphen

$$\Omega_0''\overset{0}{p_0} - \Omega_1''\overset{1}{p_0} + \Omega_2''\overset{2}{p_0} - \Omega_3''\overset{3}{p_0} = 0,$$

$$\Omega_0'''\overset{0}{p_0} - \Omega_1'''\overset{1}{p_0} + \Omega_2'''\overset{2}{p_0} - \Omega_3'''\overset{3}{p_0} = 0,$$

$$\Omega_0^{IV}\overset{0}{p_0} - \Omega_1^{IV}\overset{1}{p_0} + \Omega_2^{IV}\overset{2}{p_0} - \Omega_3^{IV}\overset{3}{p_0} = 0$$

ist, so kann man offenbar die vier vorstehenden Gleichungen 222) durch Addition und Subtraction immer so verbinden, dass in der durch diese Verbindung hervorgehenden Gleichung die Coefficienten von p_1', p_2', p_3' sämmtlich verschwinden.

Bezeichnen wir in der auf diese Weise sich ergebenden Gleichung den Coefficienten von p_0' durch

$$[A_0'\overset{0}{p_0},\ A_1'\overset{1}{p_0},\ A_2'\overset{2}{p_0},\ A_3'\overset{3}{p_0}]$$

und die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens durch

$$[P_0\overset{0}{p_0}\sqrt{Q_0},\ P_1\overset{1}{p_0}\sqrt{Q_1},\ P_2\overset{2}{p_0}\sqrt{Q_2},\ P_3\overset{3}{p_0}\sqrt{Q_3}],$$

so ist die in Rede stehende Gleichung:

223) . . $$[A_0'\overset{0}{p_0},\ A_1'\overset{1}{p_0},\ A_2'\overset{2}{p_0},\ A_3'\overset{3}{p_0}]p_0'$$
$$= [P_0\overset{0}{p_0}\sqrt{Q_0},\ P_1\overset{1}{p_0}\sqrt{Q_1},\ P_2\overset{2}{p_0}\sqrt{Q_2},\ P_3\overset{3}{p_0}\sqrt{Q_3}].$$

Wenn man in der Gleichung §. 19. 150) die dort im Allgemeinen betrachtete Ebene die Ebene F_0 sein und an die Stelle des fundamentalen Tetraeders das secundäre Tetraeder treten lässt, so ist p_0' das von M auf die Ebene F_0 gefällte Perpendikel, und man muss also p_0' für das dortige P setzen. Für

$$V;\ F_0,\ F_1,\ F_2,\ F_3;\ p_0'',\ p_1'',\ p_2'',\ p_3''$$

muss beziehungsweise

$$V';\ F_0',\ F_1',\ F_2',\ F_3';\ P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3;$$

und für die dortigen

$$\overline{\omega}_0,\quad \overline{\omega}_1,\quad \overline{\omega}_2,\quad \overline{\omega}_3$$

muss beziehungsweise

$$\overset{0}{p_0},\quad \overset{1}{p_0},\quad \overset{2}{p_0},\quad \overset{3}{p_0}$$

gesetzt werden, wodurch man nach 150) die Gleichung:

$$3V'p_0' = P_0\overset{0}{p_0}F_0' + P_1\overset{1}{p_0}F_1' + P_2\overset{2}{p_0}F_2' + P_3\overset{3}{p_0}F_3'$$

erhält.

Also ist durch Division:

$$224)\ldots \quad \frac{[A_0'\overset{0}{p_0},\ A_1'\overset{1}{p_0},\ A_2'\overset{2}{p_0},\ A_3'\overset{3}{p_0}]}{3V'}$$

$$= \frac{[P_0\overset{0}{p_0}\sqrt{Q_0},\ P_1\overset{1}{p_0}\sqrt{Q_1},\ P_2\overset{2}{p_0}\sqrt{Q_2},\ P_3\overset{3}{p_0}\sqrt{Q_3}]}{P_0\overset{0}{p_0}F_0' + P_1\overset{1}{p_0}F_1' + P_2\overset{2}{p_0}F_2' + P_3\overset{3}{p_0}F_3'}.$$

Lässt man nun an die Stelle des ganz beliebigen Punk nach und nach die Punkte

$$\mathfrak{A}_0,\quad \mathfrak{A}_1,\quad \mathfrak{A}_2,\quad \mathfrak{A}_3$$

treten, so ist nach und nach zu setzen:

$p_0' = \overset{0}{p_0}$; $P_0 = H_0'$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 =$

$p_0' = \overset{1}{p_0}$; $P_0 = 0$, $P_1 = H_1'$, $P_2 = 0$, $P_3 =$

$p_0' = \overset{2}{p_0}$; $P_0 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = H_2'$, $P_3 =$

$p_0' = \overset{3}{p_0}$; $P_0 = 0$, $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 =$

wodurch sich, wie leicht erhellen wird, aus der obigen Glei die folgenden Gleichungen ergeben:

$$225)\ldots \quad \frac{\text{val.abs.}[A_0'\overset{0}{p_0},\ A_1'\overset{1}{p_0},\ A_2'\overset{2}{p_0},\ A_3'\overset{3}{p_0}]}{3V'}$$

$$= \frac{\sqrt{Q_0}}{F_0'} = \frac{\sqrt{Q_1}}{F_1'} = \frac{\sqrt{Q_2}}{F_2'} = \frac{\sqrt{Q_3}}{F_3'}.$$

Auf der Stelle wird man sich aber überzeugen, dass durc Operation, welcher nach dem Vorhergehenden die vier Gleich 222) zu unterwerfen sind, mit Rücksicht auf die Formeln 22 allen Fällen

$$[A_0'\overset{0}{p_0},\ A_1'\overset{1}{p_0},\ A_2'\overset{2}{p_0},\ A_3'\overset{3}{p_0}]$$
$$= \pm\Omega_0'\overset{0}{p_0} \mp \Omega_1'\overset{1}{p_0} \pm \Omega_2'\overset{2}{p_0} \mp \Omega_3'\overset{3}{p_0}$$
$$= \pm(\Omega_0'\overset{0}{p_0} - \Omega_1'\overset{1}{p_0} + \Omega_2'\overset{2}{p_0} - \Omega_3'\overset{3}{p_0})$$

erhalten wird, und daher werden die Gleichungen 225) in di genden übergehen:

$$6) \quad \ldots \quad \frac{\text{val.abs.}(\Omega_0' \overset{0}{p}_0 - \Omega_1' \overset{1}{p}_0 + \Omega_2' \overset{2}{p}_0 - \Omega_3' \overset{3}{p}_0)}{3V'}$$

$$= \frac{\nu Q_0}{F_0'} = \frac{\nu Q_1}{F_1'} = \frac{\nu Q_2}{F_2'} = \frac{\nu Q_3}{F_3'}.$$

Hieraus folgt auch:

$$F_0' : F_1' : F_2' : F_3' = \nu Q_0 : \nu Q_1 : \nu Q_2 : \nu Q_3.$$

Anmerkung.

Bekanntlich lässt sich der Flächeninhalt eines Dreiecks aus seinen Seiten, der körperliche Inhalt eines Tetraeders aus seinen Kanten finden. Nach im Obigen entwickelten Formeln kann man aber die Kanten eines jeden Tetraeders aus den tetraedrischen Coordinaten seiner Ecken finden. Also lassen sich auch die Flächenräume der Seitenflächen und der körperliche Inhalt eines jeden Tetraeders aus den tetraedrischen Coordinaten seiner Ecken finden, ein Gegenstand, auf den wir späterhin zurückzukommen hoffen.

§. 30.

Die allgemeine Gleichung der Flächen des zweiten Grades zwischen cartesischen Coordinaten hat bekanntlich die Form:

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + Cz^2 &+ 2Dxy + 2Exz + 2Fyz \\ &+ 2Gx + 2Hy \quad + 2Jz \quad + K \end{aligned}\right\} = 0.$$

Weil nun nach 10)

$$x = \frac{p_1 \sin\alpha_1}{\sqrt{N}}, \qquad y = \frac{p_2 \sin\alpha_2}{\sqrt{N}}, \qquad z = \frac{p_3 \sin\alpha_3}{\sqrt{N}}$$

ist, so erhält die Gleichung der Flächen des zweiten Grades zwischen tetraedrischen Coordinaten die Form:

$$\begin{aligned} &\frac{A \sin\alpha_1^2}{N} p_1^2 + \frac{B \sin\alpha_2^2}{N} p_2^2 + \frac{C \sin\alpha_3^2}{N} p_3^2 \\ &+ \frac{2D \sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{N} p_1 p_2 + \frac{2E \sin\alpha_1 \sin\alpha_3}{N} p_1 p_3 + \frac{2F \sin\alpha_2 \sin\alpha_3}{N} p_2 p_3 \\ &+ \frac{2G \sin\alpha_1}{\sqrt{N}} p_1 + \frac{2H \sin\alpha_2}{\sqrt{N}} p_2 + \frac{2J \sin\alpha_3}{\sqrt{N}} p_3 + K \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach 12) ist:

$$\frac{1}{G} p_0 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}} p_1 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}} p_2 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}} p_3 = 1,$$

also:

$$K = \frac{K}{G}p_0 + \frac{K\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_1 + \frac{K\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_2 + \frac{K\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_3;$$

ferner ist:

$$p_0 = \frac{1}{G}p_0^2 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_0p_1 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_0p_2 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_0p_3,$$

$$p_1 = \frac{1}{G}p_0p_1 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_1^2 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_1p_2 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_1p_3,$$

$$p_2 = \frac{1}{G}p_0p_2 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_1p_2 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_2^2 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_2p_3,$$

$$p_3 = \frac{1}{G}p_0p_3 + \frac{\sin\alpha_1}{a_{01}\sqrt{N}}p_1p_3 + \frac{\sin\alpha_2}{a_{02}\sqrt{N}}p_2p_3 + \frac{\sin\alpha_3}{a_{03}\sqrt{N}}p_3^2;$$

und eliminirt man nun mittelst dieser Formeln die ersten Potenzen p_0, p_1, p_2, p_3 der tetraedrischen Coordinaten gänzlich, so erhält, wie man leicht findet, die Gleichung der Flächen des zweiten Grades zwischen tetraedrischen Coordinaten die folgende Form:

$$\begin{aligned}
&\frac{K}{G^2}p_0^2 + \left\{A + \frac{1}{a_{01}}\left(2G + \frac{K}{a_{01}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_1^2}{N}p_1^2 \\
&\quad + \left\{B + \frac{1}{a_{02}}\left(2H + \frac{K}{a_{02}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_2^2}{N}p_2^2 \\
&\quad + \left\{C + \frac{1}{a_{03}}\left(2J + \frac{K}{a_{03}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_3^2}{N}p_3^2 \\
&\quad + 2\left(G + \frac{K}{a_{01}}\right)\frac{\sin\alpha_1}{G\sqrt{N}}p_0p_1 \\
&\quad + 2\left(H + \frac{K}{a_{02}}\right)\frac{\sin\alpha_2}{G\sqrt{N}}p_0p_2 \\
&\quad + 2\left(J + \frac{K}{a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_3}{G\sqrt{N}}p_0p_3 \\
&\quad + 2\left(D + \frac{G}{a_{02}} + \frac{H}{a_{01}} + \frac{K}{a_{01}a_{02}}\right)\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{N}p_1p_2 \\
&\quad + 2\left(E + \frac{J}{a_{01}} + \frac{G}{a_{03}} + \frac{K}{a_{01}a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_3}{N}p_1p_3 \\
&\quad + 2\left(F + \frac{H}{a_{03}} + \frac{J}{a_{02}} + \frac{K}{a_{02}a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}{N}p_2p_3 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

oder, weil nach 8)

$$\frac{G}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}, \qquad \frac{G^2}{N} = \frac{1}{\Gamma}$$

ist, die Form:

$$\begin{aligned}
&Kp_0^2 + \left\{A + \frac{1}{a_{01}}\left(2G + \frac{K}{a_{01}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_1^2}{\Gamma}p_1^2 \\
&+ \left\{B + \frac{1}{a_{02}}\left(2H + \frac{K}{a_{02}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_2^2}{\Gamma}p_2^2 \\
&+ \left\{C + \frac{1}{a_{03}}\left(2J + \frac{K}{a_{03}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_3^2}{\Gamma}p_3^2 \\
&+ 2\left(G + \frac{K}{a_{01}}\right)\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{\Gamma}}p_0p_1 \\
&+ 2\left(H + \frac{K}{a_{02}}\right)\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{\Gamma}}p_0p_2 \\
&+ 2\left(J + \frac{K}{a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{\Gamma}}p_0p_3 \\
&+ 2\left(D + \frac{G}{a_{02}} + \frac{H}{a_{01}} + \frac{K}{a_{01}a_{02}}\right)\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\Gamma}p_1p_2 \\
&+ 2\left(E + \frac{J}{a_{01}} + \frac{G}{a_{03}} + \frac{K}{a_{01}a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_3}{\Gamma}p_1p_3 \\
&+ 2\left(F + \frac{H}{a_{03}} + \frac{J}{a_{02}} + \frac{K}{a_{02}a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}{\Gamma}p_2p_3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nach 15) und 18) ist:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_1}{a_{02}a_{03}\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_1}{a_{02}a_{03}} \cdot \frac{a_{01}a_{02}a_{03}}{2F_0} = a_{01}\frac{F_1}{F_0},$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_2}{a_{01}a_{03}\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_2}{a_{01}a_{03}} \cdot \frac{a_{01}a_{02}a_{03}}{2F_0} = a_{02}\frac{F_2}{F_0},$$

$$\frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_3}{a_{01}a_{02}\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_3}{a_{01}a_{02}} \cdot \frac{a_{01}a_{02}a_{03}}{2F_0} = a_{03}\frac{F_3}{F_0};$$

also wird die Gleichung der Flächen des zweiten Grades:

227)

$$
\begin{aligned}
&KF_0^2p_0^2 + a_{01}^2\left\{A + \frac{1}{a_{01}}\left(2G + \frac{K}{a_{01}}\right)\right\}F_1^2p_1^2\\
&\quad + a_{02}^2\left\{B + \frac{1}{a_{02}}\left(2H + \frac{K}{a_{02}}\right)\right\}F_2^2p_2^2\\
&\quad + a_{03}^2\left\{C + \frac{1}{a_{03}}\left(2J + \frac{K}{a_{03}}\right)\right\}F_3^2p_3^2\\
&\quad + 2a_{01}\left(G + \frac{K}{a_{01}}\right)F_0F_1p_0p_1\\
&\quad + 2a_{02}\left(H + \frac{K}{a_{02}}\right)F_0F_2p_0p_2\\
&\quad + 2a_{03}\left(J + \frac{K}{a_{03}}\right)F_0F_3p_0p_3\\
&\quad + 2a_{01}a_{02}\left(D + \frac{G}{a_{02}} + \frac{H}{a_{01}} + \frac{K}{a_{01}a_{02}}\right)F_1F_2p_1p_2\\
&\quad + 2a_{01}a_{03}\left(E + \frac{J}{a_{01}} + \frac{G}{a_{03}} + \frac{K}{a_{01}a_{03}}\right)F_1F_3p_1p_3\\
&\quad + 2a_{02}a_{03}\left(F + \frac{H}{a_{03}} + \frac{J}{a_{02}} + \frac{K}{a_{02}a_{03}}\right)F_2F_3p_2p_3\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

oder:

228)

$$
\begin{aligned}
&KF_0^2p_0^2 + (Aa_{01}^2 + 2Ga_{01} + K)F_1^2p_1^2\\
&\quad + (Ba_{02}^2 + 2Ha_{02} + K)F_2^2p_2^2\\
&\quad + (Ca_{03}^2 + 2Ja_{03} + K)F_3^2p_3^2\\
&\quad + 2(Ga_{01} + K)F_0F_1p_0p_1\\
&\quad + 2(Ha_{02} + K)F_0F_2p_0p_2\\
&\quad + 2(Ja_{03} + K)F_0F_3p_0p_3\\
&\quad + 2(Da_{01}a_{02} + Ga_{01} + Ha_{02} + K)F_1F_2p_1p_2\\
&\quad + 2(Ea_{01}a_{03} + Ja_{03} + Ga_{01} + K)F_1F_3p_1p_3\\
&\quad + 2(Fa_{02}a_{03} + Ha_{02} + Ja_{03} + K)F_2F_3p_2p_3\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir die körperlichen Räume der über den Grundflächen F_0, F_1, F_2, F_3 mit der gemeinschaftlichen Spitze ($p_0p_1p_2p_3$) beschriebenen veränderlichen Tetraeder, die man mit denselben Vorzeichen nimmt wie beziehungsweise p_0, p_1, p_2, p_3, also als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem sie von den Grundflächen F_0, F_1, F_2, F_3 aus nach dem inneren oder äusseren Raume

oder, weil nach 8)

$$\frac{G}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}, \qquad \frac{G^2}{N} = \frac{1}{\Gamma}$$

ist, die Form:

$$\begin{aligned}
&Kp_0^2 + \left\{A + \frac{1}{a_{01}}\left(2G + \frac{K}{a_{01}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_1^2}{\Gamma}p_1^2 \\
&+ \left\{B + \frac{1}{a_{02}}\left(2H + \frac{K}{a_{02}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_2^2}{\Gamma}p_2^2 \\
&+ \left\{C + \frac{1}{a_{03}}\left(2J + \frac{K}{a_{03}}\right)\right\}\frac{\sin\alpha_3^2}{\Gamma}p_3^2 \\
&+ 2\left(G + \frac{K}{a_{01}}\right)\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{\Gamma}}p_0p_1 \\
&+ 2\left(H + \frac{K}{a_{02}}\right)\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{\Gamma}}p_0p_2 \\
&+ 2\left(J + \frac{K}{a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{\Gamma}}p_0p_3 \\
&+ 2\left(D + \frac{G}{a_{02}} + \frac{H}{a_{01}} + \frac{K}{a_{01}a_{02}}\right)\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_2}{\Gamma}p_1p_2 \\
&+ 2\left(E + \frac{J}{a_{01}} + \frac{G}{a_{03}} + \frac{K}{a_{01}a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_1\sin\alpha_3}{\Gamma}p_1p_3 \\
&+ 2\left(F + \frac{H}{a_{03}} + \frac{J}{a_{02}} + \frac{K}{a_{02}a_{03}}\right)\frac{\sin\alpha_2\sin\alpha_3}{\Gamma}p_2p_3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nach 15) und 18) ist:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_1}{a_{02}a_{03}\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_1}{a_{02}a_{03}} \cdot \frac{a_{01}a_{02}a_{03}}{2F_0} = a_{01}\frac{F_1}{F_0},$$

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_2}{a_{01}a_{03}\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_2}{a_{01}a_{03}} \cdot \frac{a_{01}a_{02}a_{03}}{2F_0} = a_{02}\frac{F_2}{F_0},$$

$$\frac{\sin\alpha_3}{\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_3}{a_{01}a_{02}\sqrt{\Gamma}} = \frac{2F_3}{a_{01}a_{02}} \cdot \frac{a_{01}a_{02}a_{03}}{2F_0} = a_{03}\frac{F_3}{F_0};$$

also wird die Gleichung der Flächen des zweiten Grades:

227)

$$
\begin{aligned}
&KF_0^2p_0^2 + a_{01}^2\left\{A + \frac{1}{a_{01}}\left(2G + \frac{K}{a_{01}}\right)\right\}F_1^2p_1^2\\
&\quad + a_{02}^2\left\{B + \frac{1}{a_{02}}\left(2H + \frac{K}{a_{02}}\right)\right\}F_2^2p_2^2\\
&\quad + a_{03}^2\left\{C + \frac{1}{a_{03}}\left(2J + \frac{K}{a_{03}}\right)\right\}F_3^2p_3^2\\
&\quad + 2a_{01}\left(G + \frac{K}{a_{01}}\right)F_0F_1p_0p_1\\
&\quad + 2a_{02}\left(H + \frac{K}{a_{02}}\right)F_0F_2p_0p_2\\
&\quad + 2a_{03}\left(J + \frac{K}{a_{03}}\right)F_0F_3p_0p_3\\
&\quad + 2a_{01}a_{02}\left(D + \frac{G}{a_{02}} + \frac{H}{a_{01}} + \frac{K}{a_{01}a_{02}}\right)F_1F_2p_1p_2\\
&\quad + 2a_{01}a_{03}\left(E + \frac{J}{a_{01}} + \frac{G}{a_{03}} + \frac{K}{a_{01}a_{03}}\right)F_1F_3p_1p_3\\
&\quad + 2a_{02}a_{03}\left(F + \frac{H}{a_{03}} + \frac{J}{a_{02}} + \frac{K}{a_{02}a_{03}}\right)F_2F_3p_2p_3\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

228)

$$
\begin{aligned}
&KF_0^2p_0^2 + (Aa_{01}^2 + 2Ga_{01} + K)F_1^2p_1^2\\
&\quad + (Ba_{02}^2 + 2Ha_{02} + K)F_2^2p_2^2\\
&\quad + (Ca_{03}^2 + 2Ja_{03} + K)F_3^2p_3^2\\
&\quad + 2(Ga_{01} + K)F_0F_1p_0p_1\\
&\quad + 2(Ha_{02} + K)F_0F_2p_0p_2\\
&\quad + 2(Ja_{03} + K)F_0F_3p_0p_3\\
&\quad + 2(Da_{01}a_{02} + Ga_{01} + Ha_{02} + K)F_1F_2p_1p_2\\
&\quad + 2(Ea_{01}a_{03} + Ja_{03} + Ga_{01} + K)F_1F_3p_1p_3\\
&\quad + 2(Fa_{02}a_{03} + Ha_{02} + Ja_{03} + K)F_2F_3p_2p_3\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

zeichnen wir die körperlichen Räume der über den Grund-
F_0, F_1, F_2, F_3 mit der gemeinschaftlichen Spitze ($p_0p_1p_2p_3$)
ebenen veränderlichen Tetraeder, die man mit denselben
chen nimmt wie beziehungsweise p_0, p_1, p_2, p_3, also als
oder negativ betrachtet, jenachdem sie von den Grund-
F_0, F_1, F_2, F_3 aus nach dem inneren oder äusseren Raume

Nun ist aber nach 21) bekanntlich:

$$\frac{p_0}{H_0} + \frac{p_1}{H_1} + \frac{p_2}{H_2} + \frac{p_3}{H_3} = 1,$$

also:

$$\Theta = \frac{\Theta}{H_0} p_0 + \frac{\Theta}{H_1} p_1 + \frac{\Theta}{H_2} p_2 + \frac{\Theta}{H_3} p_3,$$

und die obige Gleichung der Kugelfläche lässt sich daher auch auf folgende Art darstellen:

235)

$$\begin{aligned}
&a_{01}^2 F_0 F_1 p_0 p_1 + \left\{ \frac{\Theta}{H_0} - F_0(a_{01}^2 F_1 \bar{\omega}_1 + a_{02}^2 F_2 \bar{\omega}_2 + a_{03}^2 F_3 \bar{\omega}_3) \right\} p_0 \\
&+ a_{02}^2 F_0 F_2 p_0 p_2 + \left\{ \frac{\Theta}{H_1} - F_1(a_{01}^2 F_0 \bar{\omega}_0 + a_{12}^2 F_2 \bar{\omega}_2 + a_{13}^2 F_3 \bar{\omega}_3) \right\} p_1 \\
&+ a_{03}^2 F_0 F_3 p_0 p_3 + \left\{ \frac{\Theta}{H_2} - F_2(a_{02}^2 F_0 \bar{\omega}_0 + a_{12}^2 F_1 \bar{\omega}_1 + a_{23}^2 F_3 \bar{\omega}_3) \right\} p_2 \\
&+ a_{12}^2 F_1 F_2 p_1 p_2 + \left\{ \frac{\Theta}{H_3} - F_3(a_{03}^2 F_0 \bar{\omega}_0 + a_{13}^2 F_1 \bar{\omega}_1 + a_{23}^2 F_2 \bar{\omega}_2) \right\} p_3 \\
&+ a_{13}^2 F_1 F_3 p_1 p_3 \\
&+ a_{23}^2 F_2 F_3 p_2 p_3 = 0.
\end{aligned}$$

Wegen der Gleichung

$$\frac{p_0}{H_0} + \frac{p_1}{H_1} + \frac{p_2}{H_2} + \frac{p_3}{H_3} = 1$$

ist aber ferner:

$$p_0 = \frac{p_0^2}{H_0} + \frac{p_0 p_1}{H_1} + \frac{p_0 p_2}{H_2} + \frac{p_0 p_3}{H_3},$$

$$p_1 = \frac{p_0 p_1}{H_0} + \frac{p_1^2}{H_1} + \frac{p_1 p_2}{H_2} + \frac{p_1 p_3}{H_3},$$

$$p_2 = \frac{p_0 p_2}{H_0} + \frac{p_1 p_2}{H_1} + \frac{p_2^2}{H_2} + \frac{p_2 p_3}{H_3},$$

$$p_3 = \frac{p_0 p_3}{H_0} + \frac{p_1 p_3}{H_1} + \frac{p_2 p_3}{H_2} + \frac{p_3^2}{H_3};$$

und man bringt also durch Einführung dieser Ausdrücke die obige Gleichung der Kugelfläche sogleich auf die folgende Form:

236)

$$\begin{aligned}
&{}_0F_1p_0p_1 + \left\{\frac{\Theta}{H_0} - F_0(a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\} \\
&\qquad \times\left\{\frac{1}{H_0}p_0{}^2 + \frac{1}{H_1}p_0p_1 + \frac{1}{H_2}p_0p_2 + \frac{1}{H_3}p_0p_3\right\} \\
&{}_0F_2p_0p_2 + \left\{\frac{\Theta}{H_1} - F_1(a_{01}{}^2F_0\bar{\omega}_0 + a_{12}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{13}{}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\} \\
&\qquad \times\left\{\frac{1}{H_0}p_0p_1 + \frac{1}{H_1}p_1{}^2 + \frac{1}{H_2}p_1p_2 + \frac{1}{H_3}p_1p_3\right\} \\
&{}_0F_3p_0p_3 + \left\{\frac{\Theta}{H_2} - F_2(a_{02}{}^2F_0\bar{\omega}_0 + a_{12}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{23}{}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\} \\
&\qquad \times\left\{\frac{1}{H_0}p_0p_2 + \frac{1}{H_1}p_1p_2 + \frac{1}{H_2}p_2{}^2 + \frac{1}{H_3}p_2p_3\right\} \\
&{}_1F_2p_1p_2 + \left\{\frac{\Theta}{H_3} - F_3(a_{03}{}^2F_0\bar{\omega}_0 + a_{13}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{23}{}^2F_2\bar{\omega}_2)\right\} \\
&\qquad \times\left\{\frac{1}{H_0}p_0p_3 + \frac{1}{H_1}p_1p_3 + \frac{1}{H_2}p_2p_3 + \frac{1}{H_3}p_3{}^2\right\} \\
&{}_1F_3p_1p_3 \\
&{}_2F_3p_2p_3 = 0,
\end{aligned}$$

offenbar ganz dieselbe Form ist, die wir im vorher-
n Paragraphen für die Gleichung der Flächen des zweiten
überhaupt gefunden haben.

wickelt man diese Gleichung weiter, so findet man, weil

$$\frac{}{_0} = \frac{F_0}{3V}, \qquad \frac{1}{H_1} = \frac{F_1}{3V}, \qquad \frac{1}{H_2} = \frac{F_2}{3V}, \qquad \frac{1}{H_3} = \frac{F_3}{3V}$$

den Coefficienten von $p_0{}^2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H_0}\left\{\frac{\Theta}{H_0} - F_0(a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\} \\
&= \frac{F_0}{3V}\left\{\frac{F_0\Theta}{3V} - F_0(a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\} \\
&= \frac{F_0{}^2}{3V}\left\{\frac{\Theta}{3V} - (a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\},
\end{aligned}$$

den Coefficienten von p_0p_1 erhält man:

$$a_{01}{}^2F_0F_1+\frac{1}{H_1}\left\{\frac{\Theta}{H_0}-F_0(a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1+a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2+a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\}$$
$$+\frac{1}{H_0}\left\{\frac{\Theta}{H_1}-F_1(a_{01}{}^2F_0\bar{\omega}_0+a_{12}{}^2F_2\bar{\omega}_2+a_{13}{}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\}$$
$$=\frac{2\Theta}{H_0H_1}+a_{01}{}^2F_0F_1\left(1-\frac{\bar{\omega}_0}{H_0}-\frac{\bar{\omega}_1}{H_1}\right)$$
$$-F_2\left(\frac{a_{02}{}^2F_0}{H_1}+\frac{a_{12}{}^2F_1}{H_0}\right)\bar{\omega}_2$$
$$-F_3\left(\frac{a_{03}{}^2F_0}{H_1}+\frac{a_{13}{}^2F_1}{H_0}\right)\bar{\omega}_3$$
$$=\frac{2\Theta}{H_0H_1}+a_{01}{}^2F_0F_1\left(\frac{\bar{\omega}_2}{H_2}+\frac{\bar{\omega}_3}{H_3}\right)$$
$$-F_2\left(\frac{a_{02}{}^2F_0}{H_1}+\frac{a_{12}{}^2F_1}{H_0}\right)\bar{\omega}_2$$
$$-F_3\left(\frac{a_{03}{}^2F_0}{H_1}+\frac{a_{13}{}^2F_1}{H_0}\right)\bar{\omega}_3$$
$$=\frac{2F_0F_1\Theta}{9V^2}+a_{01}{}^2F_0F_1\left(\frac{F_2}{3V}\bar{\omega}_2+\frac{F_3}{3V}\bar{\omega}_3\right)$$
$$-F_0F_1F_2\left(\frac{a_{02}{}^2}{3V}+\frac{a_{12}{}^2}{3V}\right)\bar{\omega}_2$$
$$-F_0F_1F_3\left(\frac{a_{03}{}^2}{3V}+\frac{a_{13}{}^2}{3V}\right)\bar{\omega}_3$$
$$=\frac{F_0F_1}{3V}\left\{\frac{2\Theta}{3V}-(a_{02}{}^2+a_{12}{}^2-a_{01}{}^2)F_2\bar{\omega}_2\right\}$$
$$-(a_{03}{}^2+a_{13}{}^2-a_{01}{}^2)F_3\bar{\omega}_3$$
$$=\frac{2F_0F_1}{3V}\left\{\frac{\Theta}{3V}-a_{02}a_{12}F_2\bar{\omega}_2\cos(a_{02}a_{12})\right\}.$$
$$-a_{03}a_{13}F_3\bar{\omega}_3\cos(a_{03}a_{13})$$

Durch ganz ähnliche Entwickelung aller Coefficienten von

$$p_0{}^2,\quad p_1{}^2,\quad p_2{}^2,\quad p_3{}^2;$$
$$p_0p_1,\quad p_0p_2,\quad p_0p_3,\quad p_1p_2,\quad p_1p_3,\quad p_2p_3$$

und Multiplication der ganzen Gleichung mit $3V$ erhält man nur folgende allgemeine Gleichung der Kugelfläche zwischen tetraedrischen Coordinaten:

237)

$$
\begin{aligned}
&F_0^2\left\{\frac{\Theta}{3V}-(a_{01}^2F_1\bar{\omega}_1+a_{02}^2F_2\bar{\omega}_2+a_{03}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\}p_0^2\\
&+F_1^2\left\{\frac{\Theta}{3V}-(a_{01}^2F_0\bar{\omega}_0+a_{12}^2F_2\bar{\omega}_2+a_{13}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\}p_1^2\\
&+F_2^2\left\{\frac{\Theta}{3V}-(a_{02}^2F_0\bar{\omega}_0+a_{12}^2F_1\bar{\omega}_1+a_{23}^2F_3\bar{\omega}_3)\right\}p_2^2\\
&+F_3^2\left\{\frac{\Theta}{3V}-(a_{03}^2F_0\bar{\omega}_0+a_{13}^2F_1\bar{\omega}_1+a_{23}^2F_2\bar{\omega}_2)\right\}p_3^2\\
&+2F_0F_1\left\{\frac{\Theta}{3V}-a_{02}a_{12}F_2\bar{\omega}_2\cos(a_{02}a_{12})\right.\\
&\qquad\left.-a_{03}a_{13}F_3\bar{\omega}_3\cos(a_{03}a_{13})\right\}p_0p_1\\
&+2F_0F_2\left\{\frac{\Theta}{3V}-a_{01}a_{12}F_1\bar{\omega}_1\cos(a_{01}a_{12})\right.\\
&\qquad\left.-a_{03}a_{23}F_3\bar{\omega}_3\cos(a_{03}a_{23})\right\}p_0p_2\\
&+2F_0F_3\left\{\frac{\Theta}{3V}-a_{01}a_{13}F_1\bar{\omega}_1\cos(a_{01}a_{13})\right.\\
&\qquad\left.-a_{02}a_{23}F_2\bar{\omega}_2\cos(a_{02}a_{23})\right\}p_0p_3\\
&+2F_1F_2\left\{\frac{\Theta}{3V}-a_{01}a_{02}F_0\bar{\omega}_0\cos(a_{01}a_{02})\right.\\
&\qquad\left.-a_{13}a_{23}F_3\bar{\omega}_3\cos(a_{13}a_{23})\right\}p_1p_2\\
&+2F_1F_3\left\{\frac{\Theta}{3V}-a_{01}a_{03}F_0\bar{\omega}_0\cos(a_{01}a_{03})\right.\\
&\qquad\left.-a_{12}a_{23}F_2\bar{\omega}_2\cos(a_{12}a_{23})\right\}p_1p_3\\
&+2F_2F_3\left\{\frac{\Theta}{3V}-a_{02}a_{03}F_0\bar{\omega}_0\cos(a_{02}a_{03})\right.\\
&\qquad\left.-a_{12}a_{13}F_1\bar{\omega}_1\cos(a_{12}a_{13})\right\}p_2p_3\\
&=0.
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir die Entfernungen des Mittelpunkts der Kugelfläche von den Punkten A_0, A_1, A_2, A_3 beziehungsweise durch E_0, E_1, E_2, E_3, so ist nach 31):

$$
\begin{aligned}
38)\ \ldots\ 9V^2E_0^2 &= -a_{01}^2F_0F_1\bar{\omega}_1(\bar{\omega}_0-H_0)\\
&\quad -a_{02}^2F_0F_2\bar{\omega}_2(\bar{\omega}_0-H_0)\\
&\quad -a_{03}^2F_0F_3\bar{\omega}_3(\bar{\omega}_0-H_0)\\
&\quad -a_{12}^2F_1F_2\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\\
&\quad -a_{13}^2F_1F_3\bar{\omega}_1\bar{\omega}_3\\
&\quad -a_{23}^2F_2F_3\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\\
&= F_0H_0(a_{01}^2F_1\bar{\omega}_1+a_{02}^2F_2\bar{\omega}_2+a_{03}^2F_3\bar{\omega}_3)-(\Theta-9V^2r^2),
\end{aligned}
$$

also:

$$\Theta = F_0H_0(a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3) + 9V^2(r^2 - E_0{}^2)$$
$$= 3V(a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3) + 9V^2(r^2 - E_0{}^2),$$

und folglich:

239)

$$\frac{\Theta}{3V} - (a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3) = 3V(r^2 - E_0{}^2),$$

so dass also überhaupt:

240)

$$\frac{\Theta}{3V} - (a_{01}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{02}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{03}{}^2F_3\bar{\omega}_3) = 3V(r^2 - E_0{}^2),$$

$$\frac{\Theta}{3V} - (a_{01}{}^2F_0\bar{\omega}_0 + a_{12}{}^2F_2\bar{\omega}_2 + a_{13}{}^2F_3\bar{\omega}_3) = 3V(r^2 - E_1{}^2),$$

$$\frac{\Theta}{3V} - (a_{02}{}^2F_0\bar{\omega}_0 + a_{12}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{23}{}^2F_3\bar{\omega}_3) = 3V(r^2 - E_2{}^2),$$

$$\frac{\Theta}{3V} - (a_{03}{}^2F_0\bar{\omega}_0 + a_{13}{}^2F_1\bar{\omega}_1 + a_{23}{}^2F_2\bar{\omega}_2) = 3V(r^2 - E_3{}^2)$$

ist.

Mittelst dieser und anderer leicht zu findender Formeln kann man die obige Gleichung der Kugelfläche noch auf verschiedene Arten umgestalten, wobei wir aber jetzt nicht länger verweilen wollen.

XXIV.

Der Flächeninhalt eines beliebigen ebenen Dreiecks im Raume und der körperliche Inhalt eines beliebigen Tetraeders im Raume durch die cartesischen Coordinaten und durch die tetraedrischen oder quadriplanaren Coordinaten der Ecken ausgedrückt.

Von

dem Herausgeber.

I.

Der Inhalt eines beliebigen ebenen Dreiecks im Raume durch die cartesischen Coordinaten seiner Ecken ausgedrückt.

§. 1.

Ein beliebiges ebenes Dreieck im Raume sei $M_0M_1M_2$, und die Coordinaten seiner Ecken

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2$$

in Bezug auf ein beliebiges cartesisches Coordinatensystem der xyz seien beziehungsweise:

$$x_0, \ y_0, \ z_0; \quad x_1, \ y_1, \ z_1; \quad x_2, \ y_2, \ z_2.$$

Man denke sich nun ein beliebiges rechtwinkliges cartesisches Coordinatensystem der $\xi\eta\zeta$, welches jedoch mit dem System der xyz einerlei Anfang haben soll, und bezeichne die Coordinaten der Ecken

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2$$

in diesem neuen rechtwinkligen Coordinatensysteme beziehungsweise durch:

$$\xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0;\qquad \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1;\qquad \xi_2;\ \eta_2,\ \zeta_2.$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die als von M_0 ausgehend gedachten Linien M_0M_1 und M_0M_2 mit den positiven Theilen der Axen der ξ, η, ζ einschliessen beziehungsweise durch

$$\alpha_{01},\ \beta_{01},\ \gamma_{01}\qquad\text{und}\qquad \alpha_{02},\ \beta_{02},\ \gamma_{02};$$

so ist bekanntlich in völliger Allgemeinheit:

$$\xi_1 = \xi_0 + \overline{M_0M_1}.\cos\alpha_{01},\quad\text{und}\quad \xi_2 = \xi_0 + \overline{M_0M_2}.\cos\alpha_{02},$$

$$\eta_1 = \eta_0 + \overline{M_0M_1}.\cos\beta_{01},\qquad \eta_2 = \eta_0 + \overline{M_0M_2}.\cos\beta_{02},$$

$$\zeta_1 = \zeta_0 + \overline{M_0M_1}.\cos\gamma_{01}\qquad \zeta_2 = \zeta_0 + \overline{M_0M_2}.\cos\gamma_{02};$$

also:

$$\cos\alpha_{01} = \frac{\xi_1-\xi_0}{\overline{M_0M_1}},\qquad \cos\beta_{01} = \frac{\eta_1-\eta_0}{\overline{M_0M_1}},\qquad \cos\gamma_{01} = \frac{\zeta_1-\zeta_0}{\overline{M_0M_1}}$$

und

$$\cos\alpha_{02} = \frac{\xi_2-\xi_0}{\overline{M_0M_2}},\qquad \cos\beta_{02} = \frac{\eta_2-\eta_0}{\overline{M_0M_2}},\qquad \cos\gamma_{02} = \frac{\zeta_2-\zeta_0}{\overline{M_0M_2}}.$$

Weil nun, wenn wir den Winkel $M_1M_0M_2$ des gegebenen Dreiecks im Raume durch M_0 bezeichnen, nach einer bekannten Formel:

$$\cos M_0 = \cos\alpha_{01}\cos\alpha_{02} + \cos\beta_{01}\cos\beta_{02} + \cos\gamma_{01}\cos\gamma_{02}$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\cos M_0 = \frac{(\xi_1-\xi_0)(\xi_2-\xi_0) + (\eta_1-\eta_0)(\eta_2-\eta_0) + (\zeta_1-\zeta_0)(\zeta_2-\zeta_0)}{\overline{M_0M_1}.\overline{M_0M_2}}$$

oder:

$$\cos M_0 = \frac{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2) + (\eta_0-\eta_1)(\eta_0-\eta_2) + (\zeta_0-\zeta_1)(\zeta_0-\zeta_2)}{\overline{M_0M_1}.\overline{M_0M_2}},$$

und folglich:

$$\sin M_0^2 = \frac{\overline{M_0M_1}^2.\overline{M_0M_2}^2 - \{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)+(\eta_0-\eta_1)(\eta_0-\eta_2)+(\zeta_0-\zeta_1)(\zeta_0-\zeta_2)\}^2}{\overline{M_0M_1}^2.\overline{M_0M_2}^2},$$

also:

$$\sin M_0 = \frac{\sqrt{\overline{M_0M_1}^2 \cdot \overline{M_0M_2}^2 - \{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)+(\eta_0-\eta_1)(\eta_0-\eta_2)+(\zeta_0-\zeta_1)(\zeta_0-\zeta_2)\}^2}}{\overline{M_0M_1}\cdot\overline{M_0M_2}}$$

Weil nun aber bekanntlich im rechtwinkligen Coordinatensysteme:

$$\overline{M_0M_1}^2 = (\xi_0-\xi_1)^2+(\eta_0-\eta_1)^2+(\zeta_0-\zeta_1)^2,$$

$$\overline{M_0M_2}^2 = (\xi_0-\xi_2)^2+(\eta_0-\eta_2)^2+(\zeta_0-\zeta_2)^2$$

ist, so ist die Grösse unter dem Wurzelzeichen:

$$\{(\xi_0-\xi_1)^2+(\eta_0-\eta_1)^2+(\zeta_0-\zeta_1)^2\}\{(\xi_0-\xi_2)^2+(\eta_0-\eta_2)^2+(\zeta_0-\zeta_2)^2\}$$
$$-\{(\xi_0-\xi_1)(\xi_0-\xi_2)+(\eta_0-\eta_1)(\eta_0-\eta_2)+(\zeta_0-\zeta_1)(\zeta_0-\zeta_2)\}^2,$$

also nach einem bekannten arithmetischen Satze:

$$\begin{aligned}&\{(\xi_0-\xi_1)(\eta_0-\eta_2)-(\eta_0-\eta_1)(\xi_0-\xi_2)\}^2\\+&\{(\eta_0-\eta_1)(\zeta_0-\zeta_2)-(\zeta_0-\zeta_1)(\eta_0-\eta_2)\}^2\\+&\{(\zeta_0-\zeta_1)(\xi_0-\xi_2)-(\xi_0-\xi_1)(\zeta_0-\zeta_2)\}^2\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}&\{(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)+(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)+(\xi_2\eta_0-\eta_2\xi_0)\}^2\\+&\{(\eta_0\zeta_1-\zeta_0\eta_1)+(\eta_1\zeta_2-\zeta_1\eta_2)+(\eta_2\zeta_0-\zeta_2\eta_0)\}^2\\+&\{(\zeta_0\xi_1-\xi_0\zeta_1)+(\zeta_1\xi_2-\xi_1\zeta_2)+(\zeta_2\xi_0-\xi_2\zeta_0)\}^2;\end{aligned}$$

und weil nun nach einer bekannten elementaren Formel bekanntlich

$$2\Delta\,\overline{M_0M_1M_2} = \overline{M_0M_1}\cdot\overline{M_0M_2}\cdot\sin M_0$$

ist, so ist nach dem Vorhergehenden:

$$2\Delta\,\overline{M_0M_1M_2} = \sqrt{\left\{\begin{aligned}&\{(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)+(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)+(\xi_2\eta_0-\eta_2\xi_0)\}^2\\+&\{(\eta_0\zeta_1-\zeta_0\eta_1)+(\eta_1\zeta_2-\zeta_1\eta_2)+(\eta_2\zeta_0-\zeta_2\eta_0)\}^2\\+&\{(\zeta_0\xi_1-\xi_0\zeta_1)+(\zeta_1\xi_2-\xi_1\zeta_2)+(\zeta_2\xi_0-\xi_2\zeta_0)\}^2\end{aligned}\right\}}.$$

Bezeichnet man die Gleichung der Ebene des Dreiecks $M_0M_1M_2$ im Raume durch

$$A'\xi+B'\eta+C'\zeta+D'=0,$$

so hat man die drei Gleichungen:

$$A'\xi_0 + B'\eta_0 + C'\zeta_0 + D' = 0,$$
$$A'\xi_1 + B'\eta_1 + C'\zeta_1 + D' = 0,$$
$$A'\xi_2 + B'\eta_2 + C'\zeta_2 + D' = 0;$$

aus denen sich mittelst leichter Rechnung ergiebt, dass man:

$$A' = (\eta_0\zeta_1 - \zeta_0\eta_1) + (\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2) + (\eta_2\zeta_0 - \zeta_2\eta_0),$$
$$B' = (\zeta_0\xi_1 - \xi_0\zeta_1) + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2) + (\zeta_2\xi_0 - \xi_2\zeta_0),$$
$$C' = (\xi_0\eta_1 - \eta_0\xi_1) + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) + (\xi_2\eta_0 - \eta_2\xi_0)$$

und

$$\begin{aligned} D' &= -\xi_0(\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2) - \xi_1(\eta_2\zeta_0 - \zeta_2\eta_0) - \xi_2(\eta_0\zeta_1 - \zeta_0\eta_1) \\ &= -\eta_0(\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2) - \eta_1(\zeta_2\xi_0 - \xi_2\zeta_0) - \eta_2(\zeta_0\xi_1 - \xi_0\zeta_1) \\ &= -\zeta_0(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) - \zeta_1(\xi_2\eta_0 - \eta_2\xi_0) - \zeta_2(\xi_0\eta_1 - \eta_0\xi_1) \end{aligned}$$

setzen kann. Für diese Werthe der Coefficienten in der Gleichung

$$A'\xi + B'\eta + C'\zeta + D' = 0$$

der Ebene des gegebenen Dreiecks $M_0M_1M_2$ ist also nach den Obigen:

$$2\Delta M_0M_1M_2 = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}.$$

Nach der allgemeinen Theorie der Verwandlung der Coordinaten hat man nun bekanntlich die Formeln:

$$\xi = x\cos(\xi x) + y\cos(\xi y) + z\cos(\xi z),$$
$$\eta = x\cos(\eta x) + y\cos(\eta y) + z\cos(\eta z),$$
$$\zeta = x\cos(\zeta x) + y\cos(\zeta y) + z\cos(\zeta z);$$

folglich:

$$\begin{aligned} \xi_0\eta_1 - \eta_0\xi_1 = {} & \{x_0\cos(\xi x) + y_0\cos(\xi y) + z_0\cos(\xi z)\} \\ & \times\{x_1\cos(\eta x) + y_1\cos(\eta y) + z_1\cos(\eta z)\} \\ & - \{x_0\cos(\eta x) + y_0\cos(\eta y) + z_0\cos(\eta z)\} \\ & \times\{x_1\cos(\xi x) + y_1\cos(\xi y) + z_1\cos(\xi z)\} \\ = {} & (x_0y_1 - y_0x_1)\{\cos(\xi x)\cos(\eta y) - \cos(\xi y)\cos(\eta x)\} \\ & + (y_0z_1 - z_0y_1)\{\cos(\xi y)\cos(\eta z) - \cos(\xi z)\cos(\eta y)\} \\ & + (z_0x_1 - x_0z_1)\{\cos(\xi z)\cos(\eta x) - \cos(\xi x)\cos(\eta z)\}, \end{aligned}$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass

$$
\begin{aligned}
&(\xi_0\eta_1 - \eta_0\xi_1) + (\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) + (\xi_2\eta_0 - \eta_2\xi_0)\\
= \quad &\{(x_0y_1 - y_0x_1) + (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_0 - y_2x_0)\}\\
&\times\{\cos(\xi x)\cos(\eta y) - \cos(\xi y)\cos(\eta x)\}\\
+ \quad &\{(y_0z_1 - z_0y_1) + (y_1z_2 - z_1y_2) + (y_2z_0 - z_2y_0)\}\\
&\times\{\cos(\xi y)\cos(\eta z) - \cos(\xi z)\cos(\eta y)\}\\
+ \quad &\{(z_0x_1 - x_0z_1) + (z_1x_2 - x_1z_2) + (z_2x_0 - x_2z_0)\}\\
&\times\{\cos(\xi z)\cos(\eta x) - \cos(\xi x)\cos(\eta z)\}
\end{aligned}
$$

ganz ebenso:

$$
\begin{aligned}
&(\eta_0\zeta_1 - \zeta_0\eta_1) + (\eta_1\zeta_2 - \zeta_1\eta_2) + (\eta_2\zeta_0 - \zeta_2\eta_0)\\
= \quad &\{(x_0y_1 - y_0x_1) + (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_0 - y_2x_0)\}\\
&\times\{\cos(\eta x)\cos(\zeta y) - \cos(\eta y)\cos(\zeta x)\}\\
+ \quad &\{(y_0z_1 - z_0y_1) + (y_1z_2 - z_1y_2) + (y_2z_0 - z_2y_0)\}\\
&\times\{\cos(\eta y)\cos(\zeta z) - \cos(\eta z)\cos(\zeta y)\}\\
+ \quad &\{(z_0x_1 - x_0z_1) + (z_1x_2 - x_1z_2) + (z_2x_0 - x_2z_0)\}\\
&\times\{\cos(\eta z)\cos(\zeta x) - \cos(\eta x)\cos(\zeta z)\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\zeta_0\xi_1 - \xi_0\zeta_1) + (\zeta_1\xi_2 - \xi_1\zeta_2) + (\zeta_2\xi_0 - \xi_2\zeta_0)\\
= \quad &\{(x_0y_1 - y_0x_1) + (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_0 - y_2x_0)\}\\
&\times\{\cos(\zeta x)\cos(\xi y) - \cos(\zeta y)\cos(\xi x)\}\\
+ \quad &\{(y_0z_1 - z_0y_1) + (y_1z_2 - z_1y_2) + (y_2z_0 - z_2y_0)\}\\
&\times\{\cos(\zeta y)\cos(\xi z) - \cos(\zeta z)\cos(\xi y)\}\\
+ \quad &\{(z_0x_1 - x_0z_1) + (z_1x_2 - x_1z_2) + (z_2x_0 - x_2z_0)\}\\
&\times\{\cos(\zeta z)\cos(\xi x) - \cos(\zeta x)\cos(\xi z)\}
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun:

$$A = (y_0z_1 - z_0y_1) + (y_1z_2 - z_1y_2) + (y_2z_0 - z_2y_0),$$

$$B = (z_0x_1 - x_0z_1) + (z_1x_2 - x_1z_2) + (z_2x_0 - x_2z_0),$$

$$C = (x_0y_1 - y_0x_1) + (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_0 - y_2x_0);$$

$$
\begin{aligned}
D &= -x_0(y_1z_2 - z_1y_2) - x_1(y_2z_0 - z_2y_0) - x_2(y_0z_1 - z_0y_1)\\
&= -y_0(z_1x_2 - x_1z_2) - y_1(z_2x_0 - x_2z_0) - y_2(z_0x_1 - x_0z_1)\\
&= -z_0(x_1y_2 - y_1x_2) - z_1(x_2y_0 - y_2x_0) - z_2(x_0y_1 - y_0x_1);
\end{aligned}
$$

ist nach dem Vorhergehenden:

$$\begin{aligned} A' = \quad & C\{\cos(\eta x)\cos(\zeta y) - \cos(\eta y)\cos(\zeta x)\} \\ & + A\{\cos(\eta y)\cos(\zeta z) - \cos(\eta z)\cos(\zeta y)\} \\ & + B\{\cos(\eta z)\cos(\zeta x) - \cos(\eta x)\cos(\zeta z)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' = \quad & C\{\cos(\zeta x)\cos(\xi y) - \cos(\zeta y)\cos(\xi x)\} \\ & + A\{\cos(\zeta y)\cos(\xi z) - \cos(\zeta z)\cos(\xi y)\} \\ & + B\{\cos(\zeta z)\cos(\xi x) - \cos(\zeta x)\cos(\xi z)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C' = \quad & C\{\cos(\xi x)\cos(\eta y) - \cos(\xi y)\cos(\eta x)\} \\ & + A\{\cos(\xi y)\cos(\eta z) - \cos(\xi z)\cos(\eta y)\} \\ & + B\{\cos(\xi z)\cos(\eta x) - \cos(\xi x)\cos(\eta z)\}. \end{aligned}$$

Nach der allgemein bekannten Relation

$$\begin{aligned} & (a_0b_1 - a_1b_0)^2 + (b_0c_1 - b_1c_0)^2 + (c_0a_1 - c_1a_0)^2 \\ = \; & (a_0^2 + b_0^2 + c_0^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)^2 \end{aligned}$$

ist:

$$\begin{aligned} & \{\cos(\xi x)\cos(\eta y) - \cos(\xi y)\cos(\eta x)\}^2 \\ & + \{\cos(\eta x)\cos(\zeta y) - \cos(\eta y)\cos(\zeta x)\}^2 \\ & + \{\cos(\zeta x)\cos(\xi y) - \cos(\zeta y)\cos(\xi x)\}^2 \\ = \; & \{\cos(\xi x)^2 + \cos(\eta x)^2 + \cos(\zeta x)^2\}\{\cos(\xi y)^2 + \cos(\eta y)^2 + \cos(\zeta y)^2\} \\ & - \{\cos(\xi x)\cos(\xi y) + \cos(\eta x)\cos(\eta y) + \cos(\zeta x)\cos(\zeta y)\}^2 \\ = \; & 1 - \cos(xy)^2 = \sin(xy)^2. \end{aligned}$$

Ferner ist nach der leicht zu beweisenden Relation:

$$\begin{aligned} & (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1) \\ & + (b_0c_1 - b_1c_0)(b_1c_2 - b_2c_1) \\ & + (c_0a_1 - c_1a_0)(c_1a_2 - c_2a_1) \\ = \; & -(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_0a_2 + b_0b_2 + c_0c_2) \\ & + (a_0a_1 + b_0b_1 + c_0c_1)(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2) \end{aligned}$$

offenbar:

$$\begin{aligned} & \{\cos(\xi x)\cos(\eta y) - \cos(\xi y)\cos(\eta x)\}\{\cos(\xi y)\cos(\eta z) - \cos(\xi z)\cos(\eta y)\} \\ + \; & \{\cos(\eta x)\cos(\zeta y) - \cos(\eta y)\cos(\zeta x)\}\{\cos(\eta y)\cos(\zeta z) - \cos(\eta z)\cos(\zeta y)\} \\ + \; & \{\cos(\zeta x)\cos(\xi y) - \cos(\zeta y)\cos(\xi x)\}\{\cos(\zeta y)\cos(\xi z) - \cos(\zeta z)\cos(\xi y)\} \\ = - \; & \{\cos(\xi y)^2 + \cos(\eta y)^2 + \cos(\zeta y)^2\} \\ & \times\{\cos(\xi x)\cos(\xi z) + \cos(\eta x)\cos(\eta z) + \cos(\zeta x)\cos(\zeta z)\} \\ + \; & \{\cos(\xi x)\cos(\xi y) + \cos(\eta x)\cos(\eta y) + \cos(\zeta x)\cos(\zeta y)\} \\ & \times\{\cos(\xi y)\cos(\xi z) + \cos(\eta y)\cos(\eta z) + \cos(\zeta y)\cos(\zeta z)\} \\ = - \; & \cos(xz) + \cos(xy)\cos(yz) \\ = \; & \cos(xy)\cos(yz) - \cos(zx). \end{aligned}$$

Mittelst dieser Formeln und gleichzeitiger gehöriger Verechselung der Zeichen erhält man nun sehr leicht den folgenden usdruck:

$$\begin{aligned} A'^2+B'^2+C'^2 = \; & C^2\sin(xy)^2+A^2\sin(yz)^2+B^2\sin(zx)^2 \\ & +2CA\{\cos(xy)\cos(yz)-\cos(zx)\} \\ & +2AB\{\cos(yz)\cos(zx)-\cos(xy)\} \\ & +2BC\{\cos(zx)\cos(xy)-\cos(yz)\} \end{aligned}$$

der:

$$\begin{aligned} A'^2+B'^2+C'^2 = \; & A^2\sin(yz)^2+B^2\sin(zx)^2+C^2\sin(xy)^2 \\ & -2AB\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\} \\ & -2BC\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\} \\ & -2CA\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\}, \end{aligned}$$

olglich nach dem Obigen:

$$2\Delta\overline{M_0M_1M_2} = \sqrt{\left\{\begin{array}{l} A^2\sin(yz)^2+B^2\sin(zx)^2+C^2\sin(xy)^2 \\ -2AB\{\cos(xy)-\cos(yz)\cos(zx)\} \\ -2BC\{\cos(yz)-\cos(zx)\cos(xy)\} \\ -2CA\{\cos(zx)-\cos(xy)\cos(yz)\} \end{array}\right\}},$$

jedenfalls ein sehr merkwürdiger Ausdruck für den Flächeninhalt eines beliebigen ebenen Dreiecks im Raume durch die Coordinaten seiner Ecken in Bezug auf jedes beliebige cartesische dreiaxige Coordinatensystem.

Die Grössen A, B, C sind die Coefficienten von x, y, z in der Gleichung

$$Ax+By+Cz+D=0$$

der Ebene des Dreiecks $M_0M_1M_2$ in Bezug auf das cartesische beliebige Coordinatensystem der xyz.

II.

Der körperliche Inhalt eines beliebigen Tetraeders im Raume durch die cartesischen Coordinaten seiner Ecken ausgedrückt.

§. 2.

Das gegebene Tetraeder im Raume sei $M_0M_1M_2M_3$ und die Coordinaten seiner Ecken

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad M_3$$

seien beziehungsweise

$$x_0, y_0, z_0; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3;$$

sein körperlicher Inhalt werde durch T bezeichnet. Nehmen wir nun die Seitenfläche $M_0M_1M_2$ des Tetraeders als Grundfläche an und bezeichnen die dieser Grundfläche, also der Ecke M_3, entsprechende Höhe des Tetraeders durch H_3; so ist:

$$3T = H_3 . \Delta \overline{M_0M_1M_2}.$$

Weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

die Gleichung der Ebene des Dreiecks $M_0M_1M_2$ ist und in dieser Ebene der Punkt $(x_0y_0z_0)$ liegt, so ist nach Thl. XXXIV. S. 181. Nr. 18):

$$H_3 = \frac{\text{Val. abs.}\{A(x_0 - x_3) + B(y_0 - y_3) + C(z_0 - z_3)\} . \sqrt{N}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l} A^2\sin(yz)^2 + B^2\sin(zx)^2 + C^2\sin(xy)^2 \\ -2AB\{\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx)\} \\ -2BC\{\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy)\} \\ -2CA\{\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz)\} \end{array}\right\}}},$$

folglich, wenn man den im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Ausdruck von $2\Delta \overline{M_0M_1M_2}$ einführt:

$$H_3 = \frac{\text{Val. abs.}\{A(x_0 - x_3) + B(y_0 - y_3) + C(z_0 - z_3)\} . \sqrt{N}}{2\Delta M_0M_1M_2},$$

also, weil der Punkt $(x_0y_0z_0)$ in der Ebene $M_0M_1M_2$ liegt und daher

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

oder

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$$

ist:

$$H_3 = \frac{\text{Val. abs.}(Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D) . \sqrt{N}}{2\Delta M_0M_1M_2},$$

woraus sich nach dem Obigen unmittelbar die merkwürdige Formel:

$$T = \frac{\sqrt{N}}{6} . \text{Val. abs.}(Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D)$$

ergiebt.

Natürlich kann man jede Seitenfläche des Tetraeders als Grundfläche desselben annehmen, und nimmt man nun nach und nach

$$M_1M_2M_3,\quad M_2M_3M_0,\quad M_3M_0M_1,\quad M_0M_1M_2$$

als Grundfläche an, und setzt:

$$A_0 = (y_1z_2 - z_1y_2) + (y_2z_3 - z_2y_3) + (y_3z_1 - z_3y_1),$$
$$B_0 = (z_1x_2 - x_1z_2) + (z_2x_3 - x_2z_3) + (z_3x_1 - x_3z_1),$$
$$C_0 = (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_1 - y_3x_1);$$

$$\begin{aligned} D_0 &= -x_1(y_2z_3 - z_2y_3) - x_2(y_3z_1 - z_3y_1) - x_3(y_1z_2 - z_1y_2) \\ &= -y_1(z_2x_3 - x_2z_3) - y_2(z_3x_1 - x_3z_1) - y_3(z_1x_2 - x_1z_2) \\ &= -z_1(x_2y_3 - y_2x_3) - z_2(x_3y_1 - y_3x_1) - z_3(x_1y_2 - y_1x_2). \end{aligned}$$

$$A_1 = (y_2z_3 - z_2y_3) + (y_3z_0 - z_3y_0) + (y_0z_2 - z_0y_2),$$
$$B_1 = (z_2x_3 - x_2z_3) + (z_3x_0 - x_3z_0) + (z_0x_2 - x_0z_2),$$
$$C_1 = (x_2y_3 - y_2x_3) + (x_3y_0 - y_3x_0) + (x_0y_2 - y_0x_2);$$

$$\begin{aligned} D_1 &= -x_2(y_3z_0 - z_3y_0) - x_3(y_0z_2 - z_0y_2) - x_0(y_2z_3 - z_2y_3) \\ &= -y_2(z_3x_0 - x_3z_0) - y_3(z_0x_2 - x_0z_2) - y_0(z_2x_3 - x_2z_3) \\ &= -z_2(x_3y_0 - y_3x_0) - z_3(x_0y_2 - y_0x_2) - z_0(x_2y_3 - y_2x_3). \end{aligned}$$

$$A_2 = (y_3z_0 - z_3y_0) + (y_0z_1 - z_0y_1) + (y_1z_3 - z_1y_3),$$
$$B_2 = (z_3x_0 - x_3z_0) + (z_0x_1 - x_0z_1) + (z_1x_3 - x_1z_3),$$
$$C_2 = (x_3y_0 - y_3x_0) + (x_0y_1 - y_0x_1) + (x_1y_3 - y_1x_3);$$

$$\begin{aligned} D_2 &= -x_3(y_0z_1 - z_0y_1) - x_0(y_1z_3 - z_1y_3) - x_1(y_3z_0 - z_3y_0) \\ &= -y_3(z_0x_1 - x_0z_1) - y_0(z_1x_3 - x_1z_3) - y_1(z_3x_0 - x_3z_0) \\ &= -z_3(x_0y_1 - y_0x_1) - z_0(x_1y_3 - y_1x_3) - z_1(x_3y_0 - y_3x_0). \end{aligned}$$

$$A_3 = (y_0z_1 - z_0y_1) + (y_1z_2 - z_1y_2) + (y_2z_0 - z_2y_0),$$
$$B_3 = (z_0x_1 - x_0z_1) + (z_1x_2 - x_1z_2) + (z_2x_0 - x_2z_0),$$
$$C_3 = (x_0y_1 - y_0x_1) + (x_1y_2 - y_1x_2) + (x_2y_0 - y_2x_0);$$

$$\begin{aligned} D_3 &= -x_0(y_1z_2 - z_1y_2) - x_1(y_2z_0 - z_2y_0) - x_2(y_0z_1 - z_0y_1) \\ &= -y_0(z_1x_2 - x_1z_2) - y_1(z_2x_0 - x_2z_0) - y_2(z_0x_1 - x_0z_1) \\ &= -z_0(x_1y_2 - y_1x_2) - z_1(x_2y_0 - y_2x_0) - z_2(x_0y_1 - y_0x_1); \end{aligned}$$

so hat man nach dem Obigen die folgenden Formeln:

$$T = \frac{\sqrt{N}}{6} \cdot \text{Val. abs.}(A_0x_0 + B_0y_0 + C_0z_0 + D_0),$$

$$T = \frac{\sqrt{N}}{6} \cdot \text{Val. abs.}(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1),$$

$$T = \frac{\sqrt{N}}{6} \cdot \text{Val. abs.}(A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 + D_2),$$

$$T = \frac{\sqrt{N}}{6} \cdot \text{Val. abs.}(A_3x_3 + B_3y_3 + C_3z_3 + D_3).$$

§. 3.

Wenn man die Ecke M_0 als den Anfang des Coordinatensystems der xyz und die Kanten M_0M_1, M_0M_2, M_0M_3 als d positiven Theile der Axen der x, y, z annimmt, so ist:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0;$$

$$x_1 = \overline{M_0M_1}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = 0;$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = \overline{M_0M_2}, \quad z_2 = 0;$$

$$x_3 = 0, \quad y_3 = 0, \quad z_3 = \overline{M_0M_3};$$

folglich nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$D_0 = -\overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \overline{M_0M_3},$$

und daher nach demselben Paragraphen:

$$T = \frac{\sqrt{N}}{6} \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \overline{M_0M_3}.$$

Setzen wir:

$$(xy) = \angle \overline{M_1M_0M_2} = \alpha,$$

$$(yz) = \angle \overline{M_2M_0M_3} = \beta,$$

$$(zx) = \angle \overline{M_3M_0M_1} = \gamma;$$

so ist:

$$N = 1 - \cos(xy)^2 - \cos(yz)^2 - \cos(zx)^2 + 2\cos(xy)\cos(yz)\cos(zx$$
$$= 1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma,$$

also:

$$T = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{6} \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \overline{M_0M}$$

Steht die Kante M_0M_3 auf den beiden Kanten M_0M_1 und M_0M_2, also auf der Ebene $M_1M_0M_2$, senkrecht, so ist:

$$\beta = 90^0, \quad \gamma = 90^0; \qquad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0;$$

also nach der vorstehenden allgemeinen Formel:

$$T = \frac{\sqrt{1-\cos\alpha^2}}{6} \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \overline{M_0M_3},$$

folglich:

$$T = \frac{1}{6} \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \overline{M_0M_3} \cdot \sin\alpha,$$

oder, weil bekanntlich

$$\Delta\, \overline{M_1M_0M_2} = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \sin\alpha$$

ist:

$$T = \frac{1}{3} \cdot \overline{M_0M_3} \cdot \Delta\, \overline{M_1M_0M_2},$$

wie es sein muss.

Stehen die drei Kanten M_0M_1, M_0M_2, M_0M_3 gegenseitig auf einander senkrecht, so ist

$$\alpha = 90^0, \ \beta = 90^0, \ \gamma = 90^0; \quad \cos\alpha = 0, \ \cos\beta = 0, \ \cos\gamma = 0;$$

also nach der allgemeinen Formel:

$$T = \frac{1}{6} \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \overline{M_0M_3},$$

wie es gleichfalls offenbar sein muss.

Diese Formeln kann man auch leicht durch mehr elementare Betrachtungen beweisen. Wenn wir den Neigungswinkel der Seitenfläche $M_2M_0M_3$ des Tetraeders gegen die Seitenfläche $M_1M_0M_2$ desselben durch C bezeichnen, so ist die Höhe des Tetraeders in Bezug auf die Grundfläche $M_1M_0M_2$ offenbar:

$$\overline{M_0M_3} \cdot \sin\beta \cdot \sin C,$$

und daher:

$$T = \frac{1}{3} \cdot \overline{M_0M_3} \cdot \sin\beta \cdot \sin C \cdot \Delta\, M_1M_0M_2,$$

also, weil bekanntlich

$$\Delta\, M_1M_0M_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \sin\alpha$$

ist:

$$T = \frac{1}{6} \cdot \overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot \overline{M_0M_3} \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin C.$$

Nach den Lehren der sphärischen Trigonometrie ist aber:

$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

also:

$$\begin{aligned}\sin C^2 &= \frac{\sin\alpha^2\sin\beta^2 - (\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta)^2}{\sin\alpha^2\sin\beta^2} \\ &= \frac{\sin\alpha^2\sin\beta^2 - \cos\alpha^2\cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha^2\sin\beta^2} \\ &= \frac{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha^2\sin\beta^2},\end{aligned}$$

und daher:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin C = \sqrt{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Folglich ist nach dem vorstehenden Ausdrucke von T:

$$T = \frac{\overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot M_0M_3 \cdot \sqrt{1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{6},$$

ganz wie oben gefunden.

Nach einer bekannten Formel kann man, für

$$Q = \sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)},$$

auch setzen:

$$T = \tfrac{1}{3}\overline{M_0M_1} \cdot \overline{M_0M_2} \cdot M_0M_3 \cdot Q.$$

Mittelst dieser Formeln kann man nun auch leicht den Inhalt T des Tetraeders bloss durch seine Kanten ausdrücken.

Setzt man nämlich:

$$\begin{aligned} M_0M_1 &= a_1, & M_1M_2 &= b_3, \\ M_0M_2 &= a_2, & M_2M_3 &= b_1, \\ M_0M_3 &= a_3; & M_3M_1 &= b_2; \end{aligned}$$

so ist:

$$\cos\alpha = \frac{a_1^2 + a_2^2 - b_3^2}{2a_1a_2}, \quad \cos\beta = \frac{a_2^2 + a_3^2 - b_1^2}{2a_2a_3}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3^2 + a_1^2 - b_2^2}{2a_3a_1};$$

folglich:

$$1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$
$$=1-\frac{(a_1^2+a_2^2-b_3^2)^2}{4a_1^2a_2^2}-\frac{(a_2^2+a_3^2-b_1^2)^2}{4a_2^2a_3^2}-\frac{(a_3^2+a_1^2-b_2^2)^2}{4a_3^2a_1^2}$$
$$+\frac{(a_1^2+a_2^2-b_3^2)(a_2^2+a_3^2-b_1^2)(a_3^2+a_1^2-b_2^2)}{4a_1^2a_2^2a_3^2}.$$

Bringt man die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens auf den gemeinschaftlichen Nenner $4a_1^2a_2^2a_3^2$, so ist der Zähler des dadurch hervorgehenden Bruchs:

$$4a_1^2a_2^2a_3^2-a_3^2(a_1^2+a_2^2-b_3^2)^2-a_1^2(a_2^2+a_3^2-b_1^2)^2-a_2^2(a_3^2+a_1^2-b_2^2)^2$$
$$+(a_1^2+a_2^2-b_3^2)(a_2^2+a_3^2-b_1^2)(a_3^2+a_1^2-b_2^2),$$

welchen man mittelst leichter Rechnung auf die Form:

$$\{(a_1^2-a_2^2)(a_3^2-a_1^2)+a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)\}b_1^2$$
$$+\{(a_2^2-a_3^2)(a_1^2-a_2^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)\}b_2^2-b_1^2b_2^2b_3^2$$
$$+\{(a_3^2-a_1^2)(a_2^2-a_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)\}b_3^2$$

bringt. Also ist nach dem Obigen offenbar:

$$T=$$
$$\frac{1}{12}\sqrt{\left\{\begin{array}{l}[(a_1^2-a_2^2)(a_3^2-a_1^2)+a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)]b_1^2\\+[(a_2^2-a_3^2)(a_1^2-a_2^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)]b_2^2-b_1^2b_2^2b_3^2\\+[(a_3^2-a_1^2)(a_2^2-a_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)]b_3^2\end{array}\right\}}\text{*).}$$

Man kann noch andere Ausdrücke des körperlichen Inhalts T des Tetraeders durch seine sechs Kanten a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3 finden, wenn man in dem vorstehenden Ausdrucke, wie offenbar verstattet ist, für

a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3

beziehungsweise

a_1, b_2, b_3; b_1, a_2, a_3

oder

a_2, b_3, b_1; b_2, a_3, a_1

oder

a_3, b_1, b_2; b_3, a_1, a_2

setzt.

---

*) Man vergl. Geometrie der Stellung von L. N. M. Carnot, übersetzt von H. C. Schumacher. Thl. II. Altona, 1810. S. 263.

Ferner überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit de folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad-\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) &= -\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad-\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad-\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\
&\quad+\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma;
\end{aligned}$$

und setzt man nun der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
A &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \\
B &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma, \\
C &= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma, \\
D &= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma;
\end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) &= -A+B+C+D, \\
\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) &= A-B+C+D, \\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) &= A+B-C+D, \\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) &= A+B+C-D;
\end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen:

$$T = \tfrac{1}{8}a_1a_2a_3\sqrt{\left\{\begin{array}{c}(-A+B+C+D)\\ \times(\ A-B+C+D)\\ \times(\ A+B-C+D)\\ \times(\ A+B+C-D)\end{array}\right\}}.$$

Setzt man nun ferner der Kürze wegen:

$$s_3 = a_1 + a_2 + b_3,$$
$$s_1 = a_2 + a_3 + b_1,$$
$$s_2 = a_3 + a_1 + b_2;$$

so ist bekanntlich:

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s_3(s_3-b_3)}{a_1a_2}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s_3-a_1)(s_3-a_2)}{a_1a_2}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{s_1(s_1-b_1)}{a_2a_3}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s_1-a_2)(s_1-a_3)}{a_2a_3}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s_2(s_2-b_2)}{a_3a_1}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s_2-a_3)(s_2-a_1)}{a_3a_1}};$$

also

$$A = \sqrt{\frac{(s_1-a_2)(s_1-a_3)}{a_2a_3}} \cdot \sqrt{\frac{(s_2-a_3)(s_2-a_1)}{a_3a_1}} \cdot \sqrt{\frac{(s_3-a_1)(s_3-a_2)}{a_1a_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(s_1-a_2)(s_1-a_3)\cdot(s_2-a_3)(s_2-a_1)\cdot(s_3-a_1)(s_3-a_2)}}{a_1a_2a_3},$$

$$B = \sqrt{\frac{s_1(s_1-b_1)}{a_2a_3}} \cdot \sqrt{\frac{s_2(s_2-b_2)}{a_3a_1}} \cdot \sqrt{\frac{(s_3-a_1)(s_3-a_2)}{a_1a_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{s_1(s_1-b_1)\cdot s_2(s_2-b_2)\cdot(s_3-a_1)(s_3-a_2)}}{a_1a_2a_3},$$

$$C = \sqrt{\frac{(s_1-a_2)(s_1-a_3)}{a_2a_3}} \cdot \sqrt{\frac{s_2(s_2-b_2)}{a_3a_1}} \cdot \sqrt{\frac{s_3(s_3-b_3)}{a_1a_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(s_1-a_2)(s_1-a_3)\cdot s_2(s_2-b_2)\cdot s_3(s_3-b_3)}}{a_1a_2a_3},$$

$$D = \sqrt{\frac{s_1(s_1-b_1)}{a_2a_3}} \cdot \sqrt{\frac{(s_2-a_3)(s_2-a_1)}{a_3a_1}} \cdot \sqrt{\frac{s_3(s_3-b_3)}{a_1a_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{s_1(s_1-b_1)\cdot(s_2-a_3)(s_2-a_1)\cdot s_3(s_3-b_3)}}{a_1a_2a_3}.$$

Setzen wir nun:

$$A' = \sqrt{(s_1-a_2)(s_2-a_3)(s_3-a_1)\cdot(s_1-a_3)(s_2-a_1)(s_3-a_2)},$$
$$B' = \sqrt{s_1s_2(s_3-a_1)\cdot(s_1-b_1)(s_2-b_2)(s_3-a_3)},$$
$$C' = \sqrt{s_2s_3(s_1-a_2)\cdot(s_2-b_2)(s_3-b_3)(s_1-a_3)},$$
$$D' = \sqrt{s_3s_1(s_2-a_3)\cdot(s_3-b_3)(s_1-b_1)(s_2-a_1)};$$

so ist:

$$A=\frac{A'}{a_1a_2a_3},\quad B=\frac{B'}{a_1a_2a_3},\quad C=\frac{C'}{a_1a_2a_3},\quad D=\frac{1}{a_1a}$$

also:

$$-A+B+C+D=\frac{-A'+B'+C'+D'}{a_1a_2a_3},$$

$$A-B+C+D=\frac{A'-B'+C'+D'}{a_1a_2a_3},$$

$$A+B-C+D=\frac{A'+B'-C'+D'}{a_1a_2a_3},$$

$$A+B+C-D=\frac{A'+B'+C'-D'}{a_1a_2a_3};$$

also nach dem Obigen:

$$T=\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{\left\{\begin{array}{r}(-A'+B'+C'+D')\\ \times(\ A'-B'+C'+D')\\ \times(\ A'+B'-C'+D')\\ \times(\ A'+B'+C'-D')\end{array}\right\}}}{a_1a_2a_3}.$$

Setzt man:

$$R=s_1s_2s_3,$$

$$S=(s_1-b_1)(s_2-b_2)(s_3-b_3);$$

so hat man die folgenden Formeln:

$$A'=\sqrt{(s_1-a_2)(s_2-a_3)(s_3-a_1)\,.\,(s_1-a_3)(s_2-a_1)(s_3-a}$$

$$B'=\sqrt{RS}\cdot\sqrt{\frac{(s_3-a_1)(s_3-a_2)}{s_3(s_3-b_3)}},$$

$$C'=\sqrt{RS}\cdot\sqrt{\frac{(s_1-a_2)(s_1-a_3)}{s_1(s_1-b_1)}},$$

$$D'=\sqrt{RS}\cdot\sqrt{\frac{(s_2-a_3)(s_2-a_1)}{s_2(s_2-b_2)}};$$

wo offenbar:

$$B'=\sqrt{RS}\,.\tan\tfrac{1}{2}\alpha,\quad C'=\sqrt{RS}\,.\tan\tfrac{1}{2}\beta,\quad D'=\sqrt{RS}.$$

ist. Mittelst dieser Formeln können A', B', C', D' leicht l
misch berechnet werden.

Nach dem Obigen ist auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma(-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta-\operatorname{targ}\tfrac{1}{2}\gamma+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma)$$

nd

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sqrt{s_1 s_2 s_3(s_1-b_1)(s_2-b_2)(s_3-b_3)}}{a_1 a_2 a_3}$$
$$= \frac{\sqrt{RS}}{a_1 a_2 a_3}.$$

Setzen wir also:

$$\begin{aligned}\Omega = \;&(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma)\\ \times\;&(-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma)\\ \times\;&(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma)\\ \times\;&(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma),\end{aligned}$$

o:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s_3-a_1)(s_3-a_2)}{s_3(s_3-b_3)}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s_1-a_2)(s_1-a_3)}{s_1(s_1-b_1)}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s_2-a_3)(s_2-a_1)}{s_2(s_2-b_2)}}$$

t; so ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma)\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$$
$$= \frac{R^2S^2}{a_1^4a_2^4a_3^4}\Omega,$$

lso nach dem Obigen offenbar:

$$T = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{RS\sqrt{\Omega}}{a_1a_2a_3},$$

Ferner überzeugt man sich sogleich von der Richtigkeit folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) = {} & \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\
& -\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \\
\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) = {} & -\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) = {} & \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
& -\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = {} & \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma \\
& -\cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma \\
& +\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma;
\end{aligned}$$

und setzt man nun der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}
A &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma, \\
B &= \sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma, \\
C &= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin\tfrac{1}{2}\beta\cos\tfrac{1}{2}\gamma, \\
D &= \cos\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\beta\sin\tfrac{1}{2}\gamma;
\end{aligned}$$

so ist:

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma) &= -A+B+C+D, \\
\sin\tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) &= A-B+C+D, \\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) &= A+B-C+D, \\
\sin\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) &= A+B+C-D;
\end{aligned}$$

folglich nach dem Obigen:

$$T = \tfrac{1}{8}a_1a_2a_3\sqrt{\begin{Bmatrix} (-A+B+C+D) \\ \times(\ A-B+C+D) \\ \times(\ A+B-C+D) \\ \times(\ A+B+C-D) \end{Bmatrix}}.$$

Setzt man nun ferner der Kürze wegen:

$$s_3 = a_1 + a_2 + b_3,$$
$$s_1 = a_2 + a_3 + b_1,$$
$$s_2 = a_3 + a_1 + b_2;$$

ist bekanntlich:

$$\cos\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{s_3(s_3-b_3)}{a_1a_2}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(s_3-a_1)(s_3-a_2)}{a_1a_2}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{s_1(s_1-b_1)}{a_2a_3}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(s_1-a_2)(s_1-a_3)}{a_2a_3}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{s_2(s_2-b_2)}{a_3a_1}}, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{(s_2-a_3)(s_2-a_1)}{a_3a_1}};$$

so

$$A = \sqrt{\frac{(s_1-a_2)(s_1-a_3)}{a_2a_3}}\cdot\sqrt{\frac{(s_2-a_3)(s_2-a_1)}{a_3a_1}}\cdot\sqrt{\frac{(s_3-a_1)(s_3-a_2)}{a_1a_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(s_1-a_2)(s_1-a_3)\cdot(s_2-a_3)(s_2-a_1)\cdot(s_3-a_1)(s_3-a_2)}}{a_1a_2a_3},$$

$$B = \sqrt{\frac{s_1(s_1-b_1)}{a_2a_3}}\cdot\sqrt{\frac{s_2(s_2-b_2)}{a_3a_1}}\cdot\sqrt{\frac{(s_3-a_1)(s_3-a_2)}{a_1a_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{s_1(s_1-b_1)\cdot s_2(s_2-b_2)\cdot(s_3-a_1)(s_3-a_2)}}{a_1a_2a_3},$$

$$C = \sqrt{\frac{(s_1-a_2)(s_1-a_3)}{a_2a_3}}\cdot\sqrt{\frac{s_2(s_2-b_2)}{a_3a_1}}\cdot\sqrt{\frac{s_3(s_3-b_3)}{a_1a_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{(s_1-a_2)(s_1-a_3)\cdot s_2(s_2-b_2)\cdot s_3(s_3-b_3)}}{a_1a_2a_3},$$

$$D = \sqrt{\frac{s_1(s_1-b_1)}{a_2a_3}}\cdot\sqrt{\frac{(s_2-a_3)(s_2-a_1)}{a_3a_1}}\cdot\sqrt{\frac{s_3(s_3-b_3)}{a_1a_2}}$$
$$= \frac{\sqrt{s_1(s_1-b_1)\cdot(s_2-a_3)(s_2-a_1)\cdot s_3(s_3-b_3)}}{a_1a_2a_3}.$$

Setzen wir nun:

$$A' = \sqrt{(s_1-a_2)(s_2-a_3)(s_3-a_1)\cdot(s_1-a_3)(s_2-a_1)(s_3-a_2)},$$
$$B' = \sqrt{s_1s_2(s_3-a_1)\cdot(s_1-b_1)(s_2-b_2)(s_3-a_2)},$$
$$C' = \sqrt{s_2s_3(s_1-a_2)\cdot(s_2-b_2)(s_3-b_3)(s_1-a_3)},$$
$$D' = \sqrt{s_3s_1(s_2-a_3)\cdot(s_3-b_3)(s_1-b_1)(s_2-a_1)};$$

so ist:

$$A_0x_0+B_0y_0+C_0z_0+D_0=\frac{\sin(xy)\sin(yz)\sin(zx)}{N\sqrt{N}}(A_0'+B_0'+C_0'+D_0'),$$

folglich nach §. 2.:

$$T=\frac{\sin(xy)\sin(yz)\sin(zx)}{6N}\cdot\text{Val. abs.}(A_0'+B_0'+C_0'+D_0').$$

Bekanntlich ist nun:

$$\sin(yz)=\frac{2F_1}{a_{02}a_{03}},\qquad \sin(zx)=\frac{2F_2}{a_{03}a_{01}},\qquad \sin(xy)=\frac{2F_3}{a_{01}a_{02}};$$

also:

$$\sin(xy)\sin(yz)\sin(zx)=\frac{8F_1F_2F_3}{a_{01}^2a_{02}^2a_{03}^2}.$$

Ferner ist bekanntlich:

$$\sqrt{N}=\frac{6V}{a_{01}a_{02}a_{03}},$$

also:

$$N=\frac{36V^2}{a_{01}^2a_{02}^2a_{03}^2},$$

und folglich:

$$6N=\frac{216V^2}{a_{01}^2a_{02}^2a_{03}^2}.$$

Also ist:

$$\frac{\sin(xy)\sin(yz)\sin(zx)}{6N}=\frac{8F_1F_2F_3}{a_{01}^2a_{02}^2a_{03}^2}\cdot\frac{a_{01}^2a_{02}^2a_{03}^2}{216V^2},$$

folglich:

$$\frac{\sin(xy)\sin(yz)\sin(zx)}{6N}=\frac{F_1F_2F_3}{27V^2},$$

was nach dem Obigen unmittelbar zu dem folgenden merkwürdigen Ausdrucke des körperlichen Inhalts des beliebigen Tetraeders $M_0M_1M_2M_3$ führt:

$$T=\frac{F_1F_2F_3}{27V^2}\cdot\text{Val. abs.}(A_0'+B_0'+C_0'+D_0').$$

§. 5.

Der vorstehende Ausdruck von T lässt aber noch eine Umformung zu. Setzt man nämlich:

$$\mathfrak{A} = \overset{1}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{1}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2),$$

$$\mathfrak{B} = \overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{2}{p}_2) + \overset{0}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2),$$

$$\mathfrak{C} = \overset{3}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_2) + \overset{0}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{1}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_2),$$

$$\mathfrak{D} = \overset{0}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2) + \overset{1}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_2);$$

ist, wie man leicht findet:

$$\overset{0}{p}_1\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_1\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_1\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_1\mathfrak{D} = 0,$$

$$\overset{0}{p}_2\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_2\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_2\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_2\mathfrak{D} = 0,$$

$$\overset{0}{p}_3\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_3\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_3\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_3\mathfrak{D} = 0.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$F_0\overset{0}{p}_0 + F_1\overset{0}{p}_1 + F_2\overset{0}{p}_2 + F_3\overset{0}{p}_3 = 3V,$$

$$F_0\overset{1}{p}_0 + F_1\overset{1}{p}_1 + F_2\overset{1}{p}_2 + F_3\overset{1}{p}_3 = 3V,$$

$$F_0\overset{2}{p}_0 + F_1\overset{2}{p}_1 + F_2\overset{2}{p}_2 + F_3\overset{2}{p}_3 = 3V,$$

$$F_0\overset{3}{p}_0 + F_1\overset{3}{p}_1 + F_2\overset{3}{p}_2 + F_3\overset{3}{p}_3 = 3V;$$

also:

$$\begin{aligned} & F_0(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D}) \\ & + F_1(\overset{0}{p}_1\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_1\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_1\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_1\mathfrak{D}) \\ & + F_2(\overset{0}{p}_2\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_2\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_2\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_2\mathfrak{D}) \\ & + F_3(\overset{0}{p}_3\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_3\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_3\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_3\mathfrak{D}) \\ = \quad & 3V(\mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D}), \end{aligned}$$

also nach den obigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} & F_0(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D}) \\ = \; & 3V(\mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D}). \end{aligned}$$

Mittelst leichter Rechnung findet man aber, dass

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} = -(A_0' + B_0' + C_0' + D_0')$$

t; also ist:

$$F_0(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D})$$
$$= -3V(A_0' + B_0' + C_0' + D_0'),$$

folglich:

$$\text{Val. abs.}\,(A_0' + B_0' + C_0' + D_0')$$
$$= \frac{F_0}{3V} \cdot \text{Val. abs.}\,(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D}),$$

und daher nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$3T = \frac{F_0F_1F_2F_3}{(3V)^3} \cdot \text{Val. abs.}\,(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D}),$$

welche Formel sich namentlich durch ihre vollständige Symmetri empfiehlt.

Nach dem Obigen ist:

$$\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D}$$
$$= \overset{0\,1\,2\,3}{p_0}\{\overset{1\,2\,3}{p_1}(\overset{2\,3}{p_2p_3} - \overset{2\,3}{p_3p_2}) + \overset{2\,3\,1}{p_1}(\overset{3\,1}{p_2p_3} - \overset{3\,1}{p_3p_2}) + \overset{3\,1\,2}{p_1}(\overset{1\,2}{p_2p_3} - \overset{1\,2}{p_3p_2})\}$$
$$- \overset{1\,2\,3\,0}{p_0}\{\overset{2\,3\,0}{p_1}(\overset{3\,0}{p_2p_3} - \overset{3\,0}{p_3p_2}) + \overset{3\,0\,2}{p_1}(\overset{0\,2}{p_2p_3} - \overset{0\,2}{p_3p_2}) + \overset{0\,2\,3}{p_1}(\overset{2\,3}{p_2p_3} - \overset{2\,3}{p_3p_2})\}$$
$$+ \overset{2\,3\,0\,1}{p_0}\{\overset{3\,0\,1}{p_1}(\overset{0\,1}{p_2p_3} - \overset{0\,1}{p_3p_2}) + \overset{0\,1\,3}{p_1}(\overset{1\,3}{p_2p_3} - \overset{1\,3}{p_3p_2}) + \overset{1\,3\,0}{p_1}(\overset{3\,0}{p_2p_3} - \overset{3\,0}{p_3p_2})\}$$
$$- \overset{3\,0\,1\,2}{p_0}\{\overset{0\,1\,2}{p_1}(\overset{1\,2}{p_2p_3} - \overset{1\,2}{p_3p_2}) + \overset{1\,2\,0}{p_1}(\overset{2\,0}{p_2p_3} - \overset{2\,0}{p_3p_2}) + \overset{2\,0\,1}{p_1}(\overset{0\,1}{p_2p_3} - \overset{0\,1}{p_3p_2})\},$$

eine Grösse, die sich noch auf verschiedene Arten würde umg stalten lassen.

IV.

Der Flächeninhalt eines beliebigen ebenen Dreiecks im Raume dur die tetraedrischen oder quadriplanaren Coordinaten seiner Ecken ausgedrückt.

§. 6.

Wie früher sei das fundamentale Tetraeder $A_0A_1A_2A_3$; d tetraedrischen oder quadriplanaren Coordinaten der Ecken

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2$$

des gegebenen Dreiecks $M_0M_1M_2$ im Raume seien beziehungsweise:

$$\overset{0}{p}_0, \overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \overset{0}{p}_3; \quad \overset{1}{p}_0, \overset{1}{p}_1, \overset{1}{p}_2, \overset{1}{p}_3; \quad \overset{2}{p}_0, \overset{2}{p}_1, \overset{2}{p}_2, \overset{2}{p}_3.$$

Dann ist bekanntlich:

$$x_0 = \frac{\overset{0}{p}_1 \sin(yz)}{\sqrt{N}}, \qquad y_0 = \frac{\overset{0}{p}_2 \sin(zx)}{\sqrt{N}}, \qquad z_0 = \frac{\overset{0}{p}_3 \sin(xy)}{\sqrt{N}};$$

$$x_1 = \frac{\overset{1}{p}_1 \sin(yz)}{\sqrt{N}}, \qquad y_1 = \frac{\overset{1}{p}_2 \sin(zx)}{\sqrt{N}}, \qquad z_1 = \frac{\overset{1}{p}_3 \sin(xy)}{\sqrt{N}};$$

$$x_2 = \frac{\overset{2}{p}_1 \sin(yz)}{\sqrt{N}}, \qquad y_2 = \frac{\overset{2}{p}_2 \sin(zx)}{\sqrt{N}}, \qquad z_2 = \frac{\overset{2}{p}_3 \sin(xy)}{\sqrt{N}};$$

und nach §. 1. ist folglich:

$$A = \frac{\sin(zx)\sin(xy)}{N}\{(\overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_2) + (\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2) + (\overset{2}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{0}{p}_2)\},$$

$$B = \frac{\sin(xy)\sin(yz)}{N}\{(\overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_1 - \overset{0}{p}_1\overset{1}{p}_3) + (\overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_3) + (\overset{2}{p}_3\overset{0}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{0}{p}_3)\},$$

$$C = \frac{\sin(yz)\sin(zx)}{N}\{(\overset{0}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_1) + (\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1) + (\overset{2}{p}_1\overset{0}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{0}{p}_1)\};$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$A' = (\overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_2) + (\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2) + (\overset{2}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{0}{p}_2),$$

$$B' = (\overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_1 - \overset{0}{p}_1\overset{1}{p}_3) + (\overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_3) + (\overset{2}{p}_3\overset{0}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{0}{p}_3),$$

$$C' = (\overset{0}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_1) + (\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1) + (\overset{2}{p}_1\overset{0}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{0}{p}_1)$$

setzen:

$$A = \frac{\sin(zx)\sin(xy)}{N} A',$$

$$B = \frac{\sin(xy)\sin(yz)}{N} B',$$

$$C = \frac{\sin(yz)\sin(zx)}{N} C'.$$

Bekanntlich ist nun:

$$\sin(yz) = \frac{2F_1}{a_{02}a_{03}}, \qquad \sin(zx) = \frac{2F_2}{a_{03}a_{01}}, \qquad \sin(xy) = \frac{2F_3}{a_{01}a_{02}}$$

und:

$$\cos(xy) - \cos(yz)\cos(zx) = \sin(yz)\sin(zx)\cos(F_1F_2),$$
$$\cos(yz) - \cos(zx)\cos(xy) = \sin(zx)\sin(xy)\cos(F_2F_3),$$
$$\cos(zx) - \cos(xy)\cos(yz) = \sin(xy)\sin(yz)\cos(F_3F_1);$$

folglich nach §. 1.

$$\begin{aligned}4.(\Delta\overline{M_0M_1M_2})^2 = &\frac{\sin(xy)^2\sin(yz)^2\sin(zx)^2}{N^2}A'^2\\ &+\frac{\sin(xy)^2\sin(yz)^2\sin(zx)^2}{N^2}B'^2\\ &+\frac{\sin(xy)^2\sin(yz)^2\sin(zx)^2}{N^2}C'^2\\ &-\frac{2\sin(xy)^2\sin(yz)^2\sin(zx)^2}{N^2}A'B'\cos(F_1F_2)\\ &-\frac{2\sin(xy)^2\sin(yz)^2\sin(zx)^2}{N^2}B'C'\cos(F_2F_3)\\ &-\frac{2\sin(xy)^2\sin(yz)^2\sin(zx)^2}{N^2}C'A'\cos(F_3F_1)\end{aligned}$$

Da aber nach dem Obigen

$$\sin(xy)\sin(yz)\sin(zx) = \frac{8F_1F_2F_3}{a_{01}{}^2a_{02}{}^2a_{03}{}^2},$$

und nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$N = \frac{36V^2}{a_{01}{}^2a_{02}{}^2a_{03}{}^2}$$

ist, so ist:

$$\frac{\sin(xy)\sin(yz)\sin(zx)}{N} = \frac{2F_1F_2F_3}{9V^2} = \frac{2F_1F_2F_3}{(3V)^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\Delta\overline{M_0M_1M_2} = \frac{F_1F_2F_3}{(3V)^2}\sqrt{\left\{\begin{aligned}&A'^2+B'^2+C'^2-2A'B'\cos(F_1F_2)\\ &\qquad\qquad -2B'C'\cos(F_2F_3)\\ &\qquad\qquad -2C'A'\cos(F_3F_1)\end{aligned}\right\}},$$

gleichfalls eine offenbar sehr bemerkenswerthe Formel.

§. 7.

Einen anderen Ausdruck für den Flächeninhalt des Dreiecks $M_0M_1M_2$ kann man auf folgende Art finden.

Nach meiner früheren Abhandlung über das tetraedrische oder quadriplanare Coordinatensystem im Allgemeinen. §. 29. Nr. 226) ist offenbar:

$$\frac{\text{Val. abs.}\,(\overset{0}{p}_0\Omega_0' - \overset{1}{p}_0\Omega_1' + \overset{2}{p}_0\Omega_2' - \overset{3}{p}_0\Omega_3')}{3T} = \frac{\sqrt{Q_3}}{\Delta M_0 M_1 M_2},$$

ıd vorher nach §. 5. ist:

$$3T = \frac{F_0F_1F_2F_3}{(3V)^3} \cdot \text{Val. abs.}\,(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D});$$

so ist offenbar:

$$\frac{\text{Val. abs.}\,(\overset{0}{p}_0\Omega_0' - \overset{1}{p}_0\Omega_1' + \overset{2}{p}_0\Omega_2' - \overset{3}{p}_0\Omega_3')}{\text{Val. abs.}\,(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D})} = \frac{F_0F_1F_2F_3}{(3V)^3} \cdot \frac{\sqrt{Q_3}}{\Delta M_0 M_1 M_2}.$$

Nach der genannten früheren Abhandlung §. 28. Nr. 210), Nr. 212), Nr. 214), Nr. 216) ist aber der absolute Werth von

$$\overset{0}{p}_0\Omega_0' - \overset{1}{p}_0\Omega_1' + \overset{2}{p}_0\Omega_2' - \overset{3}{p}_0\Omega_3'$$

der absolute Werth von

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{p}_0\{\overset{1}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{1}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2)\}\\
-&\overset{1}{p}_0\{\overset{0}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{2}{p}_2)\}\\
+&\overset{2}{p}_0\{\overset{0}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{1}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_2)\}\\
-&\overset{3}{p}_0\{\overset{0}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2) + \overset{1}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_2)\},
\end{aligned}$$

oder der absolute Werth von

$$\begin{aligned}
&\overset{0}{p}_0\{\overset{1}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{1}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2)\}\\
-&\overset{1}{p}_0\{\overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{3}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{2}{p}_2) + \overset{0}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{3}{p}_2)\}\\
+&\overset{2}{p}_0\{\overset{3}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_2) + \overset{0}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{3}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{3}{p}_2) + \overset{1}{p}_1(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{3}{p}_3\overset{0}{p}_2)\}\\
-&\overset{3}{p}_0\{\overset{0}{p}_1(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_3 - \overset{1}{p}_3\overset{2}{p}_2) + \overset{1}{p}_1(\overset{2}{p}_2\overset{0}{p}_3 - \overset{2}{p}_3\overset{0}{p}_2) + \overset{2}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{1}{p}_3 - \overset{0}{p}_3\overset{1}{p}_2)\},
\end{aligned}$$

lso nach §. 5. im Obigen der absolute Werth von

$$\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D};$$

lglich ist:

$$\text{Val.abs.}(\overset{0}{p}_0\Omega_0' - \overset{1}{p}_0\Omega_1' + \overset{2}{p}_0\Omega_2' - \overset{3}{p}_0\Omega_3')$$
$$= \text{Val.abs.}(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D}),$$

also:

$$\frac{\text{Val.abs.}(\overset{0}{p}_0\Omega_0' - \overset{1}{p}_0\Omega_1' + \overset{2}{p}_0\Omega_2' - \overset{3}{p}_0\Omega_3')}{\text{Val.abs.}(\overset{0}{p}_0\mathfrak{A} - \overset{1}{p}_0\mathfrak{B} + \overset{2}{p}_0\mathfrak{C} - \overset{3}{p}_0\mathfrak{D})} = 1,$$

und daher nach dem Obigen:

$$\frac{F_0F_1F_2F_3}{(3V)^3} \cdot \frac{\sqrt{Q_3}}{\Delta\, M_0M_1M_2} = 1,$$

also:

$$\Delta\, M_0M_1M_2 = \frac{F_0F_1F_2F_3}{(3V)^3}\sqrt{Q^3},$$

wo nach der genannten früheren Abhandlung §. 24. Nr. 191):

$$\begin{aligned} Q_3 = {} & A_3'^2 + A_3''^2 + A_3'''^2 + A_3^{IV2} - 2A_3'A_3''\cos(F_0F_1) \\ & - 2A_3'A_3'''\cos(F_0F_2) \\ & - 2A_3'A_3^{IV}\cos(F_0F_3) \\ & - 2A_3''A_3'''\cos(F_1F_2) \\ & - 2A_3''A_3^{IV}\cos(F_1F_3) \\ & - 2A_3'''A_3^{IV}\cos(F_2F_3) \end{aligned}$$

ist.

Die Grössen

$$A_3', \quad A_3'', \quad A_3''', \quad A_3^{IV}$$

sind die Coefficienten in der Gleichung

$$A_3'p_0 + A_3''p_1 + A_3'''p_2 + A_3^{IV}p_3 = 0$$

der Ebene $M_0M_1M_2$, wie diese Gleichung aus den Coordinaten der Ecken

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2$$

nämlich

$$\overset{0}{p}_0, \overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2, \overset{0}{p}_3; \quad \overset{1}{p}_0, \overset{1}{p}_1, \overset{1}{p}_2, \overset{1}{p}_3; \quad \overset{2}{p}_0, \overset{2}{p}_1, \overset{2}{p}_2, \overset{2}{p}_3$$

in der aus der genannten früheren Abhandlung bekannten Weise abgeleitet werden. Nach dieser Abhandlung §. 28. Nr. 217) ist nämlich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$A_3' = \pm\Omega_3', \quad A_3'' = \mp\Omega_3'', \quad A_3''' = \mp\Omega_3''', \quad A_3^{IV} = \mp\Omega_3^{IV};$$

wo für

$$\Omega_3', \quad \Omega_3'', \quad \Omega_3''', \quad \Omega_3^{IV}$$

die aus derselben Abhandlung §. 28. Nr. 216) bekannten Ausdrücke zu setzen sind; also ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned} Q_3 = \Omega_3'^2 + \Omega_3''^2 + \Omega_3'''^2 + \Omega_3^{IV2} &+ 2\Omega_3'\Omega_3''\cos(F_0F_1) \\ &+ 2\Omega_3'\Omega_3'''\cos(F_0F_2) \\ &+ 2\Omega_3'\Omega_3^{IV}\cos(F_0F_3) \\ &- 2\Omega_3''\Omega_3'''\cos(F_1F_2) \\ &- 2\Omega_3''\Omega_3^{IV}\cos(F_1F_3) \\ &- 2\Omega_3'''\Omega_3^{IV}\cos(F_2F_3), \end{aligned}$$

welcher Ausdruck für Q_3 in die Formel

$$\Delta\,\overline{M_0M_1M_2} = \frac{F_0F_1F_2F_3}{(3V)^3}\sqrt{Q_3}$$

einzuführen sein würde. In dieser Formel sind alle vier Coordinaten der Ecken M_0, M_1, M_2 gleichmässig vertreten.

Anmerkung zu den beiden vorhergehenden Abhandlungen.

Von der Determinanten-Bezeichnung ist in dieser und der vorhergehenden Abhandlung ganz absichtlich gar kein Gebrauch gemacht worden, um die Formeln überall in völlig entwickelter Gestalt vor sich zu haben, was nach meiner Ueberzeugung in vielen, selbst complicirteren Fällen den Vorzug verdient, so wie man überhaupt von jener Bezeichnung einen mässigeren Gebrauch machen sollte, als es jetzt Mode zu sein scheint, in ähnlicher Weise wie es früher mit den Bezeichnungen der (Hindenburg'schen) combinatorischen Analysis der Fall war. Der Wichtigkeit der Theorie der Determinanten an sich soll natürlich hiedurch kein Abbruch geschehen.

XXV.

Ueber das sphaerische Dreieck, in welchem ein Winkel gleich ist der Summe der beiden anderen.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,
Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule
am hohen Markt in Wien.

Fällt man im rechtwinkeligen sphärischen Dreieck vom Scheitel des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Gegenseite, so gilt von dieser Figur der Schulz'sche Satz: Die Tangente der Kathete ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Tangente der Hypotenuse und der Tangente des anliegenden Segmentes.*)

Die hierin ausgesprochene schöne Analogie zum planen rechtwinkeligen Dreieck lässt es bedauern, dass in den übrigen Beziehungen der Bestandtheile des genannten Dreieckes dieser Zusammenhang weniger deutlich hervortritt, indem doch die ebene Geometrie nur ein besonderer Fall der Geometrie der Kugel ist, wenn man den Radius unendlich setzt.**)

Das im Titel bezeichnete Dreieck, auf welches wir bereits 1863 und 1866 aufmerksam machten***), ist erheblich reicher an

---

*) S. K. F. Schulz Sphaerik, Leipzig 1833, II. Bd. p. 14.

**) S. Chasles, Geschichte der Geometrie p. 236.

***) S. Grunert's Archiv, Thl. XLI, p. 142, Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. LII.

olchen deutlich ausgesprochenen geometrischen Analogien, und ir erlauben uns daher, die Theorie desselben in Kürze mitzuheilen.

Im allgemeinen sphärischen Dreieck, dessen Seiten und Winkel i der üblichen Bezeichnung beziehungsweise a, b, c; A, B, C ind, gelten bekanntlich folgende Gleichungen:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{\cos^2\tfrac{1}{2}a - \sin^2\tfrac{1}{2}b + \cos^2\tfrac{1}{2}c}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+C-A) = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}b + \sin^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}a}{2\cos\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C-B) = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}c - \sin^2\tfrac{1}{2}b}{2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}b - \sin^2\tfrac{1}{2}c}{2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}\text{*)}$$

nd durch Einführung der auch für das plane rechtwinkelige Dreieck estehenden Bedingung:

(1) . . . . . $A+B = C \overset{=}{>} 90^0,$

gibt die letzte derselben unmittelbar:

(2) . . . . . $\sin^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}b = \sin^2\tfrac{1}{2}c,$

eine Beziehung zwischen den drei Seiten des Dreieckes, welche analog dem pythagorischen Lehrsatz ist. Dieselbe kann auch in folgenden Formen geschrieben werden:

(3) . . . . . $\begin{cases} \cos^2\tfrac{1}{2}a = \sin^2\tfrac{1}{2}b + \cos^2\tfrac{1}{2}c, \\ \cos^2\tfrac{1}{2}b = \sin^2\tfrac{1}{2}a + \cos^2\tfrac{1}{2}c; \end{cases}$

(4) . . . . . $\begin{cases} \sin^2\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}(c+b)\sin\tfrac{1}{2}(c-b), \\ \sin^2\tfrac{1}{2}b = \sin\tfrac{1}{2}(c+a)\sin\tfrac{1}{2}(c-a). \end{cases}$

Da $2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$ die Seiten des unter dem sphärischen Dreieck ABC liegenden Sehnendreieckes sind, so erkennt man aus (2) sofort, das letzteres rechtwinkelig ist bei C. Der Mittelpunkt des dem Sehnendreieck umschriebenen Kreises liegt auf der Mitte der Hypotenuse, also liegt der sphärische Mittelpunkt O desselben Kreises auf der Mitte der Seite c und die

*) S. Gudermann, Lehrbuch der niederen Sphärik, Münster 1835 p. 107

Ebene dieser Seite steht auf der Ebene des Sehnendreie senkrecht. Jeder Lage des Punktes C in der Peripherie umschriebenen Kreises entspricht ein Dreieck ABC, für de Winkel die Gleichung (1) giltig bleibt. Diese Eigenschaft entsp dem Satz des Thales vom Winkel im Halbkreis. (M. s. Taf. VII. Fi

Die drei letzten der oben citirten Gleichungen liefern mi und (3) nach kurzer Rechnung:

$$(5)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \sin A = \dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}, \\ \sin B = \dfrac{\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c}, \\ \sin C = \dfrac{\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}. \end{cases}$$

Für das allgemeine sphärische Dreieck gelten ferner folge Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c - \cos A}{\sin A},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c - \cos B}{\sin B},$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B-C) = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b + \cos C}{\sin C}\ *)$$

und die Substitution der Bedingung (1) ergibt hieraus:

$$(6)\ \ldots\ldots\ldots \begin{cases} \cos A = \operatorname{tg}\frac{1}{2}b\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c, \\ \cos B = \operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{1}{2}c, \\ -\cos C = \operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b. \end{cases}$$

Bezeichnet E den sphärischen Excess, so gibt die letzte vorstehenden Gleichungen, indem in unserem besonderen $E = 2C - 180^0$:

$$\sin\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b,$$

welche Gleichung ebenfalls an einen bekannten Satz für Fläche des ebenen rechtwinkeligen Dreieckes erinnert. Du Multiplication der Gleichungen (6) folgt:

$$(8)\ \ldots\ldots \sqrt{-\cos A\cos B\cos C} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c.$$

---

*) S. Gudermann a. a. O. p. 104.

Werden die Gleichungen (5) durch jene (6) der Ordnung nach ividirt, so erhält man:

$$(9)\ldots\ldots\ldots\begin{cases} \operatorname{tg} A = \dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}, \\ \operatorname{tg} B = \dfrac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c}, \\ -\operatorname{tg} C = \dfrac{\cos\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}; \end{cases}$$

und hierin kann auf der rechten Seite mittelst der Gleichungen (2), (3), (4) leicht eine der drei Seiten eliminirt werden.

Die folgenden Gleichungen (10) werden erlangt durch folgende Operationen: Erstens wird die letzte Gleichung in (9) mit den beiden vorhergehenden einzeln multiplicirt; zweitens dividiren wir die dritte in (6) durch das Product der zwei ersten Gleichungen in (5):

$$(10)\ldots\ldots\ldots\begin{cases} \sin^2\frac{1}{2}a = -\operatorname{ctg} B\operatorname{ctg} C, \\ \sin^2\frac{1}{2}b = -\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} C, \\ \sin^2\frac{1}{2}c = -\dfrac{\cos C}{\sin A\sin B}. \end{cases}$$

Mittelst der Bedingungsgleichung (1) kann auch in dem letzten Ausdruck ein Winkel eliminirt werden. Dasselbe gilt von den drei folgenden Gleichungen, welche aus jenen (6) entstehen durch Auflösung nach den Tangenten der halben Seiten:

$$(11)\ldots\ldots\ldots\begin{cases} \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}a = -\dfrac{\cos B\cos C}{\cos A}, \\ \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}b = -\dfrac{\cos A\cos C}{\cos B}, \\ \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}c = -\dfrac{\cos C}{\cos A\cos B} \end{cases}$$

Man erhält aus ihnen durch Multiplication:

$$(12)\ldots\ldots\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}a\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}b\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos^2 C}{\sqrt{-\cos A\cos B\cos C}}.$$

Dividirt man die Gleichungen (10) einzeln und der Ordnung nach durch jene (11), so wird nach einiger Reduction:

$$13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos^2\frac{1}{2}a = \dfrac{\cos A}{\sin B \sin C}, \\ \cos^2\frac{1}{2}b = \dfrac{\cos B}{\sin A \sin C}, \\ \cos^2\frac{1}{2}c = \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B; \end{array} \right.$$

und auch hierin kann in den zwei ersten Gleichungen nach (1 ein Winkel eliminirt oder in der letzten durch einen anderen er setzt werden. Durch Vereinigung der Systeme (10) und (13 ergibt sich noch:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin a = \dfrac{2\sqrt{-\cos A \cos B \cos C}}{\sin B \sin C}, \\ \sin b = \dfrac{2\sqrt{-\cos A \cos B \cos C}}{\sin A \sin C}, \\ \sin c = \dfrac{2\sqrt{-\cos A \cos B \cos C}}{\sin A \sin B}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen A, B, C die Winkel des zum allgemeinen sphäri schen Dreieck ABC gehörigen Sehnendreieckes, so bestimmt ma dieselben nach folgenden Formeln:

$$(15)^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \mathrm{A} = \cos\frac{1}{2}a \cos(A - \frac{1}{2}E), \\ \cos \mathrm{B} = \cos\frac{1}{2}b \cos(B - \frac{1}{2}E), \\ \cos \mathrm{C} = \cos\frac{1}{2}c \cos(C - \frac{1}{2}E). \end{array} \right.$$

Im vorliegenden Fall ist $A - \frac{1}{2}E = 90^0 - B$, $B - \frac{1}{2}E = 90^0 - A$ $C - \frac{1}{2}E = 90^0$ und hiermit wird $\mathrm{C} = 90^0$, was wir schon oben er kannten, und

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cos \mathrm{A} = \cos\frac{1}{2}a \sin B, \\ \cos \mathrm{B} = \cos\frac{1}{2}b \sin A \end{array} \right.$$

oder nach (13):

$$(17) \quad \cos \mathrm{A} = \frac{\sqrt{\cos A \sin B}}{\sin C}, \quad \cos \mathrm{B} = \frac{\sqrt{\sin A \cos B}}{\sin C}$$

oder nach (5):

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin \mathrm{A} = \cos \mathrm{B} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}a}{\sin\frac{1}{2}c}, \\ \sin \mathrm{B} = \cos \mathrm{A} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}c}. \end{array} \right.$$

*) S. Grunert's Archiv 1859, Thl. XXXIII, p. 43; Sitzungsberichte de Wiener Akademie 1865, Bd. LII.

Verbindet man den Mittelpunkt O der Seite c (S. die Fig.) it jenen der Seiten a, b und mit der Ecke C durch Bogen grösster reise, so entstehen vier rechtwinkelige Dreiecke, welche paar- eise symmetrisch kongruent und, wie die vorstehenden Gleichun- en (18) zeigen, sind die vier um O formirten Winkel aarweise den Sehnenwinkeln A, B gleich.

Zieht man von C aus eine Transversale $CD = t$, welche den Winkel in seine Bestaudtheile A, B und die Gegenseite c in die egmente a_1, b_1 zerlegt, so entstehen zwei sphärische Dreiecke ACD, BCD, welche zwei Winkel gleich haben und die dritten ind supplementär. Hieraus folgt, dass die Sinus der Seiten des inen Dreieckes zu den Sinus der entsprechenden Seiten des nderen in constantem Verhältniss stehen, und es gilt unter anderen ie Proportion:

19) . . . . . $\sin a_1 : \sin t = \sin t : \sin b_1$,

. h. der Sinus der Transversale t ist die mittlere geo- ietrische Proportionale zwischen den Sinus der er- eugten Segmente a_1, b_1.*)

---

*) Wendet man die eben bewiesenen Formeln und Sätze auf das Polar- reieck an und kehrt mittelst der bekannten Eigenschaften des letzteren zu den estandtheilen des Hauptdreieckes zurück, so erlangt man die Theorie und igenschaften desjenigen sphärischen Dreieckes, in welchem $a + b = 180^0 + c$.

XXVI.

Ueber die windschiefe Fläche

$$z = \frac{Ay^2}{x^2}.$$

Von

Herrn Dr. *Adolf Hochheim*,
Lehrer an der höheren Gewerbeschule zu Magdeburg.

---

§. 1.

Entstehung der windschiefen Fläche; Ableitung ihrer Gleichung.

Gegeben sei ein dreiaxiges rechtwinkliges Coordinatensystem (die xy-Ebene sei horizontal, die z-Axe vertikal), ferner der parabolische Cylinder ($y^2 = pz$), welcher von der Ebene ($x = c$) in einer Parabel geschnitten wird. Gleitet nun eine gerade Linie, die immer durch die z-Axe gehen und der xy-Ebene parallel bleiben möge, auf der Schnittparabel fort, so wird der geometrische Ort der verschiedenen Lagen dieser Geraden die windschiefe Fläche sein.

Um die Gleichung dieser Fläche aufzustellen, brauchen wir nur die bekannte Eigenschaft der windschiefen Flächen zu berücksichtigen, dass die Tangentialebene in jedem Punkte der Fläche immer die Generatrix, die durch diesen Punkt geht, in sich enthält. Es sei die Gleichung der Tangentialebene:

$$z - z_1 = (x - x_1)\frac{dz}{dx} + y - y_1)\frac{dz}{dy},$$

lann muss die Gleichung der Horizontalprojection der Generatrix sein:

$$(x-x_1)\frac{dz}{dx}+(y-y_1)\frac{dz}{dy}=0,$$

oder da die Generatrix stets durch die z-Axe hindurchgehen soll:

$$x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}=0.$$

Das allgemeine Integral dieser partiellen Differentialgleichung erhält man durch Integration der beiden Differentialgleichungen:

$$x\,dy-y\,dx=0,$$

$$dz=0;$$

woraus sich ergiebt:

1) . . . . . $\frac{y}{x}=u;\quad z=v.$

Da die erzeugende Gerade an der Schnittparabel

2) . . . . . $y^2=pz,\quad x=c$

hingleiten soll, so findet man die Gleichung der windschiefen Fläche, indem man aus den Gleichungen (1) und (2) x, y und z eliminirt und in die zwischen u und v entstehende Relation aus (1) die Werthe derselben einsetzt:

3) . . . . . $z=A\frac{y^2}{x^2},$

wo $A=\frac{c^2}{p}$ ist.

§. 2.

Die Schnittcurve der Oberfläche und einer Ebene.

Gegeben sei eine beliebige Ebene, deren Gleichung

) . . . . . $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\delta=0$

issen möge; sie schneidet die Fläche in einer Curve, deren orizontalprojection bestimmt ist durch die Gleichung:

) . . . . . $x^3\cos\alpha+x^2(y\cos\beta-\delta)+y^2A\cos\gamma=0.$

Da die Gleichung (5) keine Constante, die nicht mit einer ariabeln behaftet ist, enthält, so wird jedenfalls die Curve durch n Anfangspunkt des Coordinatensystems gehen. x und y kommen

nicht getrennt im 1. Grade vor, daher muss die Curve im Opunkte einen Doppelpunkt besitzen.

Die Curve wird die x-Axe ausserdem in der Entfernung $\frac{\delta}{\cos\alpha}$ vom Opunkte durchschneiden.

Wird $\delta = 0$, d. h. geht die schneidende Ebene durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems, so wird die Abscissenaxe eine Tangente der Curve im Doppelpunkte sein. Wird $\gamma = 90^0$ gesetzt, also $\cos\gamma = 0$, so sind die Projectionen der Schnittcurven stets gerade Linien.

Entwickelt man die Gleichung (5) nach y, so ergiebt sich:

$$(6)\ \ldots\ y = \pm\frac{x\sqrt{4\delta A\cos\gamma - 4xA\cos\alpha\cos\gamma + x^2\cos^2\beta}}{2A\cos\gamma} - \frac{x^2\cos\beta}{2A\cos\gamma}.$$

Daraus folgt, dass die Horizontalprojection der Schnittcurve im Allgemeinen nicht symmetrisch zur x-Axe liegt, sondern nur in dem speciellen Falle, wenn $\beta = 90^0$, also $\cos\beta = 0$ ist.

Ueber einige schiefe Schnitte der Oberfläche.

§. 3.

Es sei $\alpha = 90^0$, demnach $\cos\alpha = 0$, die Gleichung (5) nimmt dann die einfachere Gestalt an:

$$7)\ \ldots\ldots\ x^2(y\cos\beta - \delta) + y^2A\cos\gamma = 0.$$

1) δ sei positiv.

Entwickeln wir die Gleichung (7) nach x und vertauschen die Variabeln, so ergiebt sich:

$$(8)\ \ldots\ldots\ y = \pm\frac{x\sqrt{A\cos\gamma}}{\sqrt{\delta - x\cos\beta}}.$$

Wir setzen

$$\sqrt{\frac{A\cos\gamma}{\cos\beta}} = N,$$

$$\frac{\delta}{\cos\beta} = R, \text{ so ist:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm N\frac{R - \frac{1}{2}x}{(R-x)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm N\frac{R - \frac{1}{4}x}{(R-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Curve, deren Gestalt auf Taf. VI. Fig. I. angegeben ist, esteht aus zwei zur x-Axe symmetrischen Theilen, welche sich n Anfangspunkte des Coordinatensystems schneiden und die erade $(x = \frac{\delta}{\cos\beta})$ zur gemeinschaftlichen Asymptote haben. Die f der rechten Seite der y-Axe liegenden Arme kehren beide r x-Axe die convexe Seite zu, die auf der linken Seite der Axe liegenden Arme die concave Seite.

$$\frac{dy}{dx} \text{ wird für } x = \frac{2\delta}{\cos\beta} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ wird für } x = \frac{4\delta}{\cos\beta} = 0.$$

Da sich aber für diese Werthe von x nur imaginäre Werthe n y ergeben, so kann die Curve weder einen Culminationspunkt ch einen Beugungspunkt besitzen.

2) Es sei $\delta = 0$.

Die Gleichung (8) geht in diesem Falle über in:

9) . . . . . $y^2 = -A\frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\cdot x.$

Die Projection der Schnittcurve ist alsdann eine Parabel mit dem Parameter $\frac{A\cos\gamma}{\cos\beta}$, welche sich links von der y-Axe symmetrisch zur x-Axe ausbreitet.

3) δ sei negativ.

Die Gleichung (8) nimmt dann folgende Gestalt an:

(10) . . . . . $y = \pm\frac{x\sqrt{A\cos\gamma}}{\sqrt{-\delta - x\cos\beta}},$

$$\frac{dy}{dx} = \mp N\frac{(R+\frac{x}{2})}{(-R-x)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp N\frac{(R+\frac{x}{4})}{(-R-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die Projection der Schnittcurve hat die in Taf. VI. Fig. II. angegebene Form; sie besteht aus zwei vollständig getrennten Theilen, die sich symmetrisch zu dem negativen Theile der x-Axe ausbreiten und die Gerade $(x = -\frac{\delta}{\cos\beta})$ zur gemeinschaftlichen Asymptote haben.

Da $\frac{dy}{dx}$ für $x = -\frac{2\delta}{\cos\beta}$ gleich 0 wird, so entsprechen diesem Werthe zwei Culminationspunkte der Curve. Setzt man $x = -\frac{4\delta}{\cos\beta}$, so wird $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; jeder Theil der Curve besitzt demnach für diese Abscisse einen Beugungspunkt. Zwischen $x = -\frac{\delta}{\cos\beta}$ und $= -\frac{4\delta}{\cos\beta}$ kehren beide Theile der x-Axe die convexe Seite zu, zwischen $x = -\frac{4\delta}{\cos\beta}$ und $= -\infty$ die concave Seite.

§. 4.

Es sei $\beta = 90^0$, demnach $\cos\beta = 0$, dann nimmt die Gleichung (5) die Gestalt an:

$$(11) \ldots\ldots\ldots y = \pm x\sqrt{\frac{\delta - x\cos\alpha}{A\cos\gamma}}.$$

1) δ sei positiv.

Wir setzen:

$$\frac{\delta}{\cos\alpha} = S,$$

$$\sqrt{\frac{A\cos\gamma}{\cos\alpha}} = R.$$

Daun ist:

$$y = \pm\frac{x}{R}\sqrt{S-x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{R}\cdot\frac{S-\frac{3}{2}x}{\sqrt{S-x}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{1}{R}\cdot\frac{x-S}{(S-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Curve Taf. VI. Fig. III. besteht aus zwei Theilen, die symmetrisch zur x-Axe liegen; sie gehen vom Punkte $(S, 0)$ aus, schneiden sich im Punkte $(0, 0)$ und erstrecken sich dann in die Unendlichkeit. Setzt man $x > S$, so wird y imaginär. Im Punkte $(S, 0)$ läuft die Tangente der y-Axe parallel. Für $x = +^2S$ hat jeder Theil der Curve einen Culminationspunkt. Beugungspunkte sind nicht vorhanden. Zwischen $x = 0$ und $x = +S$ kehren beide Theile der x-Axe die concave Seite zu, zwischen $x = 0$ und $x = -\infty$ die convexe Seite. Asymptoten besitzt die Curve nicht.

2) δ sei $= 0$.

Dann geht die Gleichung (II) über in

$$12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \pm x \sqrt{\frac{-x\cos\alpha}{A\cos\gamma}},$$

araus folgt: die Horizontalprojection der Schnittcurve ist eine eilische oder semicubische Parabel, die sich zu beiden Seiten es negativen Theiles der x-Axe ausbreitet und deren Scheitel it dem Anfangspunkte des Coordinatensystems zusammenfällt.

3) δ sei negativ.

In diesem Falle erhält die Gleichung (II) die Form:

$$13) \quad \ldots\ldots\ldots \quad y = \pm \frac{x}{R}\sqrt{-S-x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{1}{R}\frac{-S-\frac{3}{2}x}{\sqrt{-S-x}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{1}{R}\frac{\frac{3}{4}x+S}{(-S-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Curve hat die in Taf. VI. Fig. IV. angegebene Gestalt; sie breitet sich symmetrisch zu beiden Seiten des negativen Theiles der x-Axe zwischen $x = -S$ und $x = -\infty$ aus und schneidet die x-Axe für $x = -S$ unter rechten Winkeln. Der 0punkt ist ein isolirter Punkt der Curve. Ein Culminationspunkt ist nicht vorhanden, da $\frac{dy}{dx}$ nur für $x = -\frac{2}{3}S$ zu 0 wird. Zwischen $x = -S$ und $x = -\frac{4}{3}S$ kehren beide Theile der x-Axe die concave Seite, darüber hinaus die convexe Seite zu. Für $x = -\frac{1}{3}S$ besitzt jeder Theil der Curve einen Beugungspunkt.

§. 5.

Endlich sei $\gamma = 90^0$, also $\cos\gamma = 0$. Da die Projection der Schnittcurve auf die xy-Ebene in diesem Falle stets eine gerade Linie sein wird, so betrachten wir die Projection derselben auf die yz-Ebene. Die Gleichung derselben ist

$$14) \quad \ldots\ldots\ldots \quad z = \frac{A\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}y^2}{\left(\frac{\delta}{\cos\beta}-y\right)^2}.$$

Wir bezeichnen $A\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta}$ mit M und $\frac{\delta}{\cos\beta}$ mit S, dann ist:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{2MSy}{(S-y)^3},$$

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{2MS(S+2y)}{(S-y)^4}.$$

Die Projection der Schnittcurve (Taf. VI. Fig. V.) besteht aus 2 getrennten Theilen, die sich oberhalb der y-Axe ausbreiten. Der links liegende Theil erstreckt sich von $y = +S$ bis $y = -\infty$, der rechts liegende von $y = +S$ bis $y = +\infty$.

Für $y = +S$ erstrecken sich beide Theile in die Unendlichkeit und haben zur gemeinschaftlichen Asymptote

$$y = +S.$$

Gemeinschaftliche Asymptote ist ausserdem:

$$z = \pm M.$$

Im Punkte (0, 0) besitzt die Curve einen Culminationspunkt, für $y = -\frac{S}{2}$ einen Beugungspunkt. Zwischen $y = -\frac{S}{2}$ und $y = +\infty$ wendet die Curve der y-Axe stets die convexe Seite zu, zwischen $y = -\frac{S}{2}$ und $y = -\infty$ die concave Seite.

Die Projectionen aller betrachteten Schnittcurven auf die Coordinaten-Ebenen sind demnach entweder Parabeln, oder sie gehören der parabolischen Familie dritten Grades an.

§. 6.

Die Schnittebenen mögen den Coordinatenebenen parallel laufen.

1) Die Gleichung der schneidenden Ebene sei $x = M$, sie laufe also der yz-Ebene parallel; dann ist die Gleichung der Schnittcurve:

$$z = \frac{Ay^2}{M^2} \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{M^2}{A}z.$$

Alle der yz-Ebene parallelen Schnittcurven sind demnach Parabeln, deren Parameter abhängig sind von der Grösse M.

2) Die schneidende Ebene laufe der xy-Ebene parallel, ihre Gleichung sei

$$z = R,$$

dann ist die Gleichung der Schnittcurve:

(16) . . . . . $R = A\frac{y^2}{x^2}$,

$$\text{oder} \quad y = \pm x\sqrt{\frac{R}{A}},$$

d. h. Jede der xy-Ebene parallele Ebene schneidet die windschiefe Fläche in 2 Geraden, die unter gleichen Winkeln gegen die xz-Ebene geneigt sind.

3) Die schneidende Ebene laufe endlich der xz-Ebene parallel, ihre Gleichung sei

$$y = S.$$

Die Gleichung der Schnittcurve ist dann:

(17) . . . . . $z = \frac{AS^2}{x^2}$,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{2AS^2}{x^3},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{6AS^2}{x^4}.$$

Die Curve hat die in Taf. VI. Fig. VI. angegebene Gestalt, sie besteht aus zwei Theilen, welche den positiven Theil der z-Axe und die x-Axe zu Asymptoten haben. Beide Theile steigen herab und kehren der x-Axe die convexe Seite zu. Culminations- und Beugungspunkte sind nicht vorhanden.

§. 7.

Geometrische Oerter der Brennpunkte einiger Parabelschaaren, die auf der windschiefen Fläche liegen.

1) Nach §. 3, 2) schneidet jede Ebene, welche der Gleichung

$$y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

entspricht, die windschiefe Fläche in einer Parabel, deren Horizontalprojection die Gleichung

$$y^2 = -\frac{A\cos\gamma}{\cos\beta}x$$

besitzt.

Die Brennpunkte aller dieser Parabeln liegen in der yz-Ebene und zwar ist die Entfernung eines jeden vom Opunkte

$$\frac{A\sin^2\beta}{4\cos\beta},$$

daher

(18) . . . . . $\varrho = \frac{A\sin^2\beta}{4\cos\beta}$

die Polargleichung des geometrischen Ortes der Brennpunkte. Führen wir rechtwinklige Coordinaten ein, so erhalten wir

(19) . . . . . $y = \pm 2z\sqrt{\frac{z}{A-4z}}$,

$$\frac{dy}{dz} = \pm\frac{\sqrt{z}(3A-8z)}{(A-4z)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \pm\frac{\frac{3}{2}A^2}{\sqrt{z}(A-4z)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gestalt der Curve ist in Taf. VI. Fig. VII. angegeben. Sie breitet sich symmetrisch zu beiden Seiten des positiven Theiles der z-Axe zwischen $z = 0$ und $z = \frac{A}{4}$ aus und besitzt im Anfangspunkte des Coordinatensystems einen Doppelpunkt, dessen Tangente mit der z-Axe zusammenfällt; ein anderer Culminationspunkt ist nicht vorhanden. Beide Theile kehren der z-Axe die convexe Seite zu und haben die Gerade $(z = \frac{A}{4})$ zur gemeinschaftlichen Asymptote. Beugungspunkte besitzt die Curve nicht.

2) Nach §. 6, 1) schneidet jede Ebene, deren Gleichung $x = M$ ist, die windschiefe Oberfläche in einer Parabel $y^2 = \frac{M^2}{A}z$.

Alle Brennpunkte dieser Parabeln liegen in der xz-Ebene. Für jedes $x = M$ ist der Abstand des Brennpunktes von der x-Axe $\frac{M^2}{4A}$, daher die Gleichung des geometrischen Ortes aller Brennpunkte

(20) . . . . . $x = 2\sqrt{Az}$.

Die Brennpunkte dieser Parabelschaar liegen demnach auf einer Parabel, deren Parameter $4A$ ist.

§. 8.

Tangential-Ebenen und Normalen der Oberfläche.

Um die Gleichungen derselben aufzustellen, entwickeln wir die partiellen Ableitungen der Gleichung

$$zx^2 - Ay^2 = 0 \quad (F):$$

$$\frac{dF}{dx} = 2zx, \qquad \frac{dF}{dy} = -2Ay, \qquad \frac{dF}{dz} = x^2;$$

dann ergiebt sich als Gleichung der Berührungsebene der Oberfläche im Punkte x, y, z:

$$2zx(x-\xi) - 2Ay(y-\eta) + x^2(z-\zeta) = 0,$$

oder:

$$(21) \ldots\ldots -2zx\xi + 2Ay\eta + x^2z - x^2\zeta = 0,$$

in der xyz constant, dagegen $\xi\eta\zeta$ variabel sind.

Eliminiren wir aus dieser letzteren Gleichung und aus

$$\zeta = \frac{A\eta^2}{\xi^2}$$

die Grösse ζ, so ergiebt sich:

$$-2zx\xi^3 + 2Ay\eta\xi^2 + zx^2\xi^2 - Ax^2\eta^2 = 0,$$

d. i. die Gleichung der Horizontalprojection derjenigen Linie, in der die Tangentialebene die windschiefe Oberfläche zugleich schneidet.

Da $z = \frac{Ay^2}{x^2}$ ist, so geht bei Einsetzung dieses Werthes die Gleichung über in:

$$2Ay^2\xi^3 - 2Ayx\eta\xi^2 + Ax^3\eta^2 - Ay^2x\xi^2 = 0;$$

diese aber ist das Product der beiden Gleichungen:

$$(22) \ldots\ldots \begin{cases} y\xi - \eta x = 0, \\ 2Ay\xi^2 - Ayx\xi - Ax^2\eta = 0. \end{cases}$$

Daraus geht hervor, dass die Tangentialebene im Punkte xyz zugleich die Oberfläche in der Generatrix, die durch diesen Punkt geht, und ausserdem in einer Parabel schneidet. Die Horizontalprojection dieser Parabel hat den Parameter $\frac{x^2}{2y}$, sie schneidet die

x-Axe in den Punkten (0, 0) und $(\frac{x}{2}, 0)$ und hat als Coordinaten des Scheitels $\frac{x}{4}$, $-\frac{y}{8}$.

Die Tangentialebene im Punkte x, y, z berührt aber nur in diesem Punkte und nicht längs der ganzen Generatrix die Oberfläche, da sich bei constant bleibendem z mit einer Aenderung von x und y die Gestalt und Lage der Schnittparabel ändert. Diese Veränderung kann aber nur dann eintreten, wenn die Tangentialebene für einen anderen Punkt der Generatrix mit der ersteren einen Winkel einschliesst.

Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte (0, 0, c) ist:

$$(23) \quad \eta = \pm\sqrt{\frac{c}{A}}\,\xi,$$

d. h. in dem Punkte (0, 0, c) befinden sich zwei Tangentialebenen an der Oberfläche, sie enthalten die z-Axe in sich, stehen auf der xy-Ebene senkrecht und schliessen mit der xz-Ebene gleiche Winkel ein.

Setzen wir $z = 0$ und $y = 0$, so wird die Gleichung der Tangentialebene

$$(24) \quad \zeta = 0,$$

d. h. die xy-Ebene berührt die windschiefe Fläche längs der ganzen Generatrix.

In beiden betrachteten Fällen verschwindet die Schnittparabel.

Die beiden Gleichungen der Normale im Punkte xyz sind:

$$(25) \quad \begin{cases} (\zeta - z)\,2z - x(\xi - x) = 0, \\ (\zeta - z)\,2z + y(\eta - y) = 0. \end{cases}$$

§. 9.

Orthogonalflächen der windschiefen Fläche.

Ertheilen wir der Constanten A in der Gleichung

$$z = \frac{Ay^2}{x^2}$$

alle möglichen Werthe, so stellt die Gleichung ein ganzes System windschiefer Flächen dar. Für dieses System sollen die Ortho-

nalflächen, d. h. die Flächen, welche dasselbe unter rechten inkeln schneiden, gesucht werden. Wir beschränken zunächst sere Betrachtung auf die bisher betrachtete Fläche, die ein lied des Systems ist. Ein Punkt derselben, in dem sie von ner Orthogonalfläche durchschnitten werden möge, besitze die ordinaten x, y, z. Die Gleichung der Tangentialebene in diesem nkte ist

$$2zx(x-\xi)-2Ay(y-\eta)+x^2(z-\zeta)=0.$$

Die Tangentialebene jeder beliebigen Oberfläche, welche die gebene Oberfläche in diesem Punkte lothrecht durchschneidet, uss auf der gegebenen Tangentialebene senkrecht stehen, d. h. e muss eine Normalebene der windschiefen Oberfläche sein. Die leichung jeder Normalebene im Punkte xyz ist:

$$f(x-\xi)+g(y-\eta)+h(z-\zeta)=0,$$

enn f, g, h der Relation

$$26) \ldots\ldots\ldots 2zxf-2Ayg+x^2h=0$$

Genüge leisten.

Bezeichnen wir die Gleichung der gesuchten Orthogonalfläche mit

$$U=0,$$

so ist die Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz:

$$\frac{dU}{dx}(x-\xi)+\frac{dU}{dy}(y-\eta)+\frac{dU}{dz}(z-\zeta)=0;$$

demnach wird

$$\frac{dU}{dx}=\lambda f, \quad \frac{dU}{dy}=\lambda g, \quad \frac{dU}{dz}=\lambda h$$

sein.

Durch Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung (26) erhalen wir die partielle Differentialgleichung der Orthogonalfläche:

$$27) \ldots\ldots 2zx\frac{dU}{dx}-2Ay\frac{dU}{dy}+x^2\frac{dU}{dz}=0.$$

Da diese Schlüsse für jeden anderen Punkt unserer windchiefen Oberfläche, ferner für jede Fläche unseres Systems und die zugehörige Orthogonalfläche Geltung haben, so können wir mit Hülfe von (3) die veränderliche Constante A eliminiren; dann ergiebt sich:

$$(28) \quad \ldots\ldots 2z\frac{dU}{dx} - \frac{2xz}{y}\frac{dU}{dy} + x\frac{dU}{dz} = 0,$$

deren allgemeines Integral zu bilden ist.

Aus (28) folgt:

$$dx : dy : dz = 2z : -\frac{2xz}{y} : x,$$

demnach ist:

$$y\,dy = -x\,dx$$

und

$$2z\,dz = x\,dx.$$

Durch Integration dieser beiden letzten Gleichungen erhalten wir:

$$y^2 + x^2 = \alpha,$$

$$(29) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z^2 - \frac{x^2}{2} = \beta,$$

wo α und β zwei willkürliche Constanten sind.

Da jedes von diesen beiden Integralen der gegebenen Differentialgleichung entspricht, so wird jeder auf beliebige Weise aus ihnen zusammengesetzte Ausdruck:

$$(30) \quad \ldots\ldots\ldots \Pi\left(x^2 + y^2,\ z^2 - \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

ein allgemeines Integral derselben sein.

Das System windschiefer Flächen wird demnach von jeder Fläche, welche der Gleichung (30) entspricht, rechtwinklig geschnitten werden.

§. 10.

Cubatur der windschiefen Fläche.

Die windschiefe Fläche möge geschnitten sein durch die beiden Ebenen:

$$z = b,$$

$$x = a.$$

Es soll das Volumen desjenigen Körpers bestimmt werden, welcher rechts von der yz-Ebene liegt und von der krummen Oberfläche und den beiden Schnittebenen begrenzt wird. Wir betrachten hierbei z und x als unabhängige, y als abhängige Variable und entwickeln demnach die Gleichung (3) nach y:

$$y = \pm x\sqrt{\frac{z}{A}};$$

ann ist der Inhalt:

31) . . . . . $J = 2\int_0^a dx \int_0^b \frac{x\sqrt{z}}{\sqrt{A}}\,dz,$

$$\int \frac{x\sqrt{z}}{\sqrt{A}}\,dz = \tfrac{2}{3}\frac{xz^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A}},$$

emnach:

$$\int_0^b \frac{x\sqrt{z}}{\sqrt{A}}\,dz = \tfrac{2}{3}\frac{xb^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A}}.$$

etzen wir diesen Werth in (31) ein, so ergiebt sich:

$$J = \tfrac{4}{3}\frac{b^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{A}}\int_0^a x\,dx,$$

lso:

32) . . . . . $J = \frac{2}{3}\frac{a^2 b\sqrt{b}}{\sqrt{A}}.$

Die Ebene $x = a$ schneidet die windschiefe Fläche in einer arabel $(y = \pm a\sqrt{\frac{z}{A}})$. Bilden wir über dieser Parabel einen eraden parabolischen Cylinder, dann ist das Volumen desjenigen örpers, welcher von der krummen Oberfläche, der yz-Ebene und en beiden Ebenen

$$x = a,$$
$$y = b$$

egrenzt wird:

33) . . . . . $J_1 = \frac{4}{9}\frac{a^2 b\sqrt{b}}{\sqrt{A}}.$

Aus (32) und (33) folgt:

$$J : J_1 = 1 : 2,$$

. h. das Volumen desjenigen Körpers, welcher von dem paraboschen Cylinder und den Ebenen $x = 0$, $x = a$, $z = b$ eingechlossen ist, wird durch den darin liegenden Theil der windchiefen Fläche halbirt.

XXVII.

Berechnung der geodätischen Coordinaten und der geographischen Position der Dreieckspunkte, gestützt auf die Bessel'schen sphäroidischen Umwandlungsformeln.

Von

Herrn Major *Andres*,
Professor an der k. und k. Militär-Akademie zu Wiener-Neustadt.

Zur Lösung dieser zwei Aufgaben bedient man sich gewöhnlich der vom italienischen Astronomen Oriani 1807 veröffentlichten Formeln, welche aus den Näherungs-Gleichungen der sphäroidischen Trigonometrie:

$$\sigma = \frac{s}{b} \cdot 206264 \cdot 8 (1 - \tfrac{1}{4} e^2 \cos m),$$

$$w = \omega - \tfrac{1}{2} e^2 \sigma \sin \alpha \cos u$$

abgeleitet, und wobei die höheren als zweiten Potenzen von e vernachlässigt wurden. (Grunert's ebene, sphärische und sphäroidische Trigonometrie, 12. Kapitel.)

In meinen Vorträgen über „höhere Geodäsie" und „sphärische Astronomie" an der k. k. Militär-Akademie zu Wiener-Neustadt habe ich von diesen Formeln Umgang genommen, und ging zur Berechnung der oben angedeuteten Elemente von den strengen Bessel'schen Umwandlungsformeln aus, welchen bekanntlich eine Abplattung $= \frac{1}{299.1528}$ zu Grunde liegt.

Da diese Berechnungsart die Behandlung des bezüglichen hrstoffes bedeutend vereinfacht, ferner jedenfalls schärfere Re-ltate als die Oriani'sche Methode liefert, ohne in der Durch-rung schwieriger zu sein, und ich bis jetzt in keinem Werke rüber detaillirte Angaben fand, so dürfte die Veröffentlichung rselben vielleicht nicht ohne Interesse und Nutzen für die höhere odätische Praxis sein.

Die erwähnten Bessel'schen Umwandlungsformeln lauten: ayer's Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche g. 37—44)

$$\sigma = \frac{(\alpha)}{b} s + (\beta)\cos(2M+\sigma)\sin\sigma + (\gamma)\cos(4M+2\sigma)\sin 2\sigma + \ldots\ldots (I)$$

$$w = \omega - \frac{e^2 \sin m}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}e^2}} \left\{ \begin{matrix} (\alpha')\sigma + (\beta')\sin\sigma\cos(2M+\sigma) \\ + (\gamma')\sin 2\sigma\cos(4M+2\sigma+\ldots\ldots \end{matrix} \right\} \ldots\ldots (II)$$

orin bedeutet (m. vergl. Taf. VII. Fig. II.):

. . die gemessene geodätische, oder die bekannte Dreiecksseite $A'B'$

. . den sphärischen Abstand (Bogen) AB

. . den sphärischen Längenunterschied
. . den sphäroidischen Längenunterschied } zwischen A und B

), (β), (γ) und (α'), (β'), (γ') sind bestimmte aus der Bessel'-hen Hilfstafel zu entnehmende Faktoren, von welchen in dieser afel die Logarithmen angegeben sind. Die Argumente dieser afel sind:

die Gleichung (I)

$$\log \frac{e\cos m}{\sqrt{1-e^2}},$$

die Gleichung (II)

$$\log \frac{e\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}e^2}} \cos m.$$

Die Hilfswinkel M und m bestimmt man aus folgenden Glei-ungen:

$$\operatorname{tng} M = \frac{\operatorname{tng} u}{\cos\alpha},$$

$$\cos m = \frac{\sin u}{\sin M};$$

rin u die reduzirte Breite und α das nordöstliche Azimuth für n Punkt A bedeutet.

Bezeichnen wir die beobachtete Polhöhe von A mit φ, so ist bekanntlich

$$\operatorname{tng} u = \frac{b}{a} \operatorname{tng} \varphi,$$

wobei die beiden Erdachsen a und b gegeben sind.

Nach Bessel's Bestimmungen hat man:

$$\left.\begin{aligned} \log a &= 6{\cdot}514\ 8235.\ 337 \\ \log b &= 6{\cdot}513\ 3693\ \ 539 \end{aligned}\right\} \text{für die Längeneinheit Toise.}$$

$$\log. e^2 = 7{\cdot}824\ 4104\ \ 150.$$

I.

Berechnung der geodätischen Coordinaten $AC = x$ und $BC = y$.

Sind von den Dreieckspunkten A und B, entweder durch Beobachtungen oder durch die bekannte Rechnungsweise mittelst der Dreiecksseite und den obigen Bessel'schen Formeln die geographischen Breiten φ und φ_1, somit auch die reducirten Breiten u und u_1, ferner der sphärische Längenunterschied ω bekannt, und denkt man sich die geodätische Linie BC so gegen den Meridian von A gezogen, dass der Winkel bei C oder das Azimuth α_2 gleich 90^0 beträgt, so sind $AC = x$ und $BC = y$ die beiden geodätischen Coordinaten, welche zu bestimmen sind.

Die Lösung besteht im Allgemeinen in Folgendem:

Durch die geodätische Coordinate BC wird das sphärische Hilfsdreieck PAB in zwei sphärisch rechtwinkelige Dreiecke getheilt. Man bestimmt nun zuerst aus dem sphärisch rechtwinkeligen Dreiecke PCB die reducirte Breite für den Punkt C der Coordinate BC, sucht alsdann die sphärischen Abstände BC und AC und verwandelt diese nach der Formel (I) in die geodätischen Linien, wie diess weiter unten näher erörtert ist.

1. Berechnung der reducirten Breite u_2 für den Fusspunkt C der Coordinate y. Aus dem sphärisch rechtwinkeligen Dreiecke PCB findet man mittelst Anwendung der Neper'schen Regel:

$$\cos \omega = \operatorname{cotg}\{90 - (90 - u_2)\} \operatorname{cotg}(90 - u_1),$$

woraus folgt:

$$\operatorname{tng} u_2 = \frac{\operatorname{tng} u_1}{\cos \omega} \quad (\alpha).$$

2. Berechnung der sphärischen Abstände $AC = \sigma_x$ und $B = \sigma_y$. Man findet σ_x, wie leicht einzusehen ist, aus der leichung

$$\sigma_x = u_2 - u \quad (\beta).$$

Den sphärischen Abstand $CB = \sigma_y$ erhält man, mittelst nwendung der Neper'schen Regel aus dem erwähnten sphärisch chtwinkeligen Dreiecke PCB, indem man hat:

$$\sin \sigma_y = \sin \omega \cos u_1,$$

$$\cos \sigma_y = \frac{\sin u_1}{\sin u_2}.$$

Die obere Gleichung durch die untere dividirt gibt:

$$\operatorname{tng} \sigma_y = \frac{\sin u_2}{\operatorname{tng} u_1} \sin \omega \quad (\gamma).$$

3. Verwandelt man diese sphärischen Abstände in die geoitischen Linien nach der Formel (I), wodurch die zu suchenden oordinaten gefunden sind.

Die erwähnte Formel modifizirt sich jedoch wie folgt:

1) Zur Berechnung von x.

In diesem Falle ist das Azimuth $\alpha = 0$, daher

$$\operatorname{tng} M = \operatorname{tng} u,$$

$$M = u,$$

$$\cos m = \frac{\sin M}{\sin u} = 1,$$

$$m = 0.$$

Somit die Formel (I) übergeht in:

$$\sigma_x = \frac{(\alpha)}{b} x + (\beta) \cos(2u + \sigma_x) \sin \sigma_x + \ldots\ldots \text{(III)}$$

oraus für die Coordinate:

$$x = \frac{b}{(\alpha)} \left\{ \sigma_x - (\beta) \cos(2u + \sigma_x) \sin \sigma_x - \ldots\ldots \right\} \quad (\delta)$$

lgt.

Das Argument der Hilfstafel wird (weil $m = 0$ gleich $\lg \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = 8{\cdot}9136594$) und somit auch die Faktoren (α) und $\beta)$ konstant. Man findet für

$$(\alpha) = 5{\cdot}313\ 6973 \qquad (\beta) = 2{\cdot}538\ 1120$$

2) Zur Berechnung von y.

In diesem Falle ist das Azimuth $\alpha = 90^0$, daher:

$$\operatorname{tng} M = \frac{\operatorname{tng} u_2}{0} = \infty,$$

$$M = 90^0,$$

$$\cos m = \frac{\sin u_2}{\sin M} = \sin u_2,$$

$$m = 90 - u_2.$$

Somit die Formel (I) sich wie folgt gestaltet:

$$\sigma_y = \frac{(\alpha)}{b} y - (\beta) \cos \sigma_y \sin \sigma_y \quad \ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

woraus

$$y = \frac{b}{(\alpha)} \left\{ \sigma_y + (\beta) \cos \sigma_y \sin \sigma_y + \ldots\ldots \right\} \quad (\varepsilon).$$

Das Argument der Hilfstafel ist:

$$\log \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \sin u_2 = 8{\cdot}9136594 + \log \sin u_2.$$

II.

Berechnung der Breiten, der Längenunterschiede und der Azimuthe aus den Coordinaten oder aus den Abständen vom Haupt-Meridian und Perpendikel.

Ist A der Dreieckspunkt, von welchem die geographische Breite $= \varphi$, die Länge $= L$, und das nordöstliche Azimuth nach dem Punkte $B = \alpha$ bekannt ist, und sind für den Punkt B die Coordinaten $AC = x$ und $BC = y$ mit Bezug auf den Punkt A, durch welchen der Haupt-Meridian und das Perpendikel gezogen sind, gegeben*), so soll für den Punkt B die Breite $= \varphi_1$, der

*) Diese Coordinaten sind entweder nach den Formeln der ebenen oder der sphärischen Trigonometrie berechnet.

Wären diese Coordinaten nach den Formeln der sphäroidischen Trigonometrie berechnet worden, so kann diese Aufgabe nicht mehr bestehen, da zu diesem Zwecke schon früher auf die bekannte Weise die geographischen Positionen der Dreieckspunkte aus den Dreiecksseiten ermittelt worden sind.

sphärische und sphäroidische Längenunterschied ω und w, sowie das nordöstliche Azimuth zurück auf den Punkt $A = \alpha_1$ gerechnet werden.

Im Allgemeinen besteht die Lösung dieser Aufgabe darin, dass die beiden Coordinaten x und y als geodätische Linien betrachtet, in die sphärischen Abstände σ_x und σ_y verwandelt, und die übrigen zu suchenden Stücke aus den Dreiecken PCB und PAB wie folgt gefunden werden:

1. Berechnet man mittelst der Formel (I) aus den gegebenen geodätischen Linien x und y die sphärischen Abstände σ_x und σ_y.

Man hat nämlich nach den vorhergehenden Nummern hierfür folgende Reihen:

a) Für die Abcisse x

$$\sigma_x = \frac{(\alpha)}{b} x + (\beta) \cos(2u + \sigma_x) \sin \sigma_x + \quad \ldots\ldots (V)$$

worin die Faktoren (α) und (β) der Hilfstafel constant sind und zwar

$$(\alpha) = 5{\cdot}313\ 6973, \qquad (\beta) = 2{\cdot}538\ 1120.$$

b) Für die Abcisse y

$$\sigma_y = \frac{(\alpha)}{b} y - (\beta) \cos \sigma_y \sin \sigma_y - \quad \ldots\ldots\ldots (VI)$$

Das Argument für die Hilfstafel zur Bestimmung der Faktoren (α) und (β) ist:

$$\log \frac{e \sin u_2}{\sqrt{1 - e^2}},$$

wobei, wie leicht einzusehen, die reducirte Breite für den Punkt C

$$u_2 = u + \sigma_x$$

ist.

2. Aus dem bei C rechtwinkeligen Dreiecke PCB (Taf. VII. Fig. II.) erhält man, mittelst Anwendung der Neper'schen Regel:

$$\sin u_1 = \sin u_2 \cos \sigma_x.$$

Hierdurch ist vom Punkte B die reduzirte Polhöhe und somit auch nach der bekannten Formel:

$$\operatorname{tng} \varphi_1 = \frac{a}{b} \operatorname{tng} u_1$$

die geographische Breite φ_1 gefunden.

Bei untergeordneten Dreieckspunkten, oder wenn die Abstände nicht gross sind, genügt in den Formeln für σ_x und σ_y das erste Glied, wie diess das weiter unten durchgeführte Beispiel zur Genüge darstellt, und wodurch die Rechnung höchst einfach wird.

3. Berechnet man aus demselben sphärisch rechtwinkeligen Dreiecke den sphärischen Längenunterschied ω, und verwandelt denselben nach der Bessel'schen Formel (II) in den sphäroidischen Längenunterschied.

Man findet nämlich:

$$\operatorname{tng}\omega = \frac{\operatorname{tng}\sigma_y}{\cos u_2},$$

und weil das Azimuth $\alpha = 90^0$, somit $M = 90^0$, $m = 90 - u_2$,

$$w = \omega - \frac{e^2 \cos u_2}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}e^2}} \left\{ (\alpha')\,\sigma_y - (\beta')\sin\sigma_y \cos\sigma_y \right\}$$

Für das Argument der Hilfstafel hat man

$$\log \frac{e\sqrt[3]{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}e^2}} \sin u_2 = 8{\cdot}850\ 8255,_6 + \log\sin u_2.$$

Schliesslich hat man $L_1 = L \pm w$.

4. Endlich findet man, da nunmehr α, u und u_1 bekannt sind, mittelst Anwendung des Sinussatzes der sphäroidischen Trigonometrie:

$$\sin\alpha : -\sin\alpha_1 = \cos u_1 : \cos u,$$

das nordöstliche Azimuth des Punktes B nach dem Punkte A. Man hat nämlich die Gleichung

$$-\sin\alpha_1 = \frac{\cos u}{\cos u_1} \cdot \sin\alpha,$$

die, wie bekannt, auch durch Anwendung des Sinussatzes der sphärischen Trigonometrie aus dem sphärischen Hilfsdreiecke gefunden wird.

Zusammenstellung der Formeln.

I.

Zur Berechnung der geodätischen Coordinaten.

Gegeben ist:

ür den Punkt A die geographische Breite . . . . . $= \varphi$.
„ „ „ „ „ reducirte „ . . . . . $= u$ *).
benso für den Punkt B die geographische Breite . . . $= \varphi_1$.
„ „ „ „ „ „ reducirte „ . . . $= u_1$.
er sphärische Längenunterschied . . . . . $= \omega$.

Zu suchen für den Punkt B mit Bezug auf den Punkt A:

ie Abscisse (auf dem Meridian gezählt) . . . . . $= x$.
ie Ordinate (auf dem Perpendikel gezählt) . . . . . $= y$.

1.

$$\operatorname{tng} u_2 = \frac{\operatorname{tng} u_1}{\cos \omega}.$$

2.

$$\sigma_x'' = u_2 - u_1.$$

3.

$$\operatorname{tng} \sigma_y = \frac{\sin u_2}{\operatorname{tng} u_1} \sin \omega.$$

4.

$$x = \frac{b}{(\alpha)} \left\{ \sigma_x - (\beta) \cos (2u + \sigma_x) \sin \sigma_x - \ldots\ldots \right\}$$

$$\log b = 6.\ 513\ 3693.\ 539 \text{ (für Toisen)}$$

$$(\alpha) = 5 \cdot 313\ 6973. \qquad (\beta) = 2 \cdot 538\ 1120.$$

$$y = \frac{b}{(\alpha)} \left\{ \sigma_y + (\beta) \cos \sigma_y \sin \sigma_y + \ldots\ldots \right\}$$

---

*). $\operatorname{tng} u = \frac{b}{a} \operatorname{tng} \varphi.$

$$\log \frac{b}{a} = 9 \cdot 998\ 5458.\ 202 - 10.$$

Argument der Hilfstafel:

$$\log \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \sin u_2, \quad \log \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = 8{\cdot}913\ 6594.$$

II.

Berechnung der Breiten, der Längenunterschiede und der Azimuthe der Dreieckspunkte aus den gegebenen Coordinaten.

Von dem Punkte A ist bekannt:

Die geographische Breite . . . . . $= \varphi$.
„ reducirte „ . . . . . $= u$.
„ geographische Länge . . . . . $= L$.
Das nordöstliche Azimuth von A nach B . . . . . $= \alpha$.
Die Abcisse (Abstand vom Perpendikel) des Punktes B $= x$.
„ Ordinate (Abstand vom Meridian) mit Bezug auf A $= y$.

Zu rechnen für den Punkt B:

Die geographische Breite . . . . . $= \varphi_1$.
„ reducirte „ . . . . . $= u_1$.
Der sphärische Längenunterschied . . . . . $= \omega$.
„ sphäroidische „ . . . . . $= w$.
Die geographische Länge . . . . . $= L_1$.
Das nordöstliche Azimuth von B nach A . . . . . $= \alpha_1$.

1.

$$\sigma_x'' = \frac{(\alpha)}{b} x + (\beta) \cos(2u + \sigma_x) \sin \sigma_x + \ldots\ldots$$

$$(\alpha) = 5{\cdot}313\ 6973. \qquad (\beta) = 2{\cdot}538\ 1120.$$

$$\log b = 6{\cdot}513\ 3693{\cdot}539 \text{ (für Toisen).}$$

2.

$$u_2 = u + \sigma_x.$$

3.

$$\sigma_y'' = \frac{(\alpha)}{b} y - (\beta) \cos \sigma_y \sin \sigma_y - \ldots.$$

ument der Hilfstafel:

$$\log \frac{e \sin u_2}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \log \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = 8{\cdot}915\ 7613{\cdot}_2.$$

4.

$$\sin u_1 = \sin u_2 \cos \sigma_y,$$

$$\operatorname{tng} \varphi_1 = \frac{a}{b} \operatorname{tng} u_1,$$

$$\log \frac{a}{b} = 0{\cdot}001\ 4541{\cdot}_8.$$

5.

$$\operatorname{tng} \omega = \frac{\operatorname{tang} \sigma_y}{\cos u_2},$$

$$v = \omega - \frac{e^2 \cos u_2}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}e^2}} \left\{ (\alpha') \sigma_y - (\beta') \cos \sigma_y \sin \sigma_y - \ldots\ldots \right\}$$

$$\log \frac{e^2}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}e^2}} = 7{\cdot}829\ 319.$$

ument der Hilfstafel:

$$\begin{cases} \log \dfrac{e\sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}e^2}} \sin u_2. \\ \log \dfrac{e\sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{1-\frac{3}{4}e^2}} = 8{\cdot}850\ 8255{\cdot}_6. \end{cases}$$

$$L_1 = L + w.$$

6.

$$-\sin \alpha_1 = \sin \alpha \cdot \frac{\cos u}{\cos u_1}.$$

Beispiele.

Ad 1.

Es sind die geodätischen Coordinaten für den Punkt Königsberg mit Bezug auf den Punkt Trunz (preussische Gradmessung und Bayer's Küstenvermessung) zu berechnen, indem gegeben ist

für Trunz.	für Königsberg.
$\varphi = 54^0\ 13'\ 11''.46$	$\varphi_1 = 54^0\ 42'\ 50''.50$
$u = 54^0\ 7'\ 43''.70$	$u_1 = 54^0\ 37'\ 24''.65$
$\alpha = 48^0\ 9'\ 52''.53$	$\alpha_1 = 228^0\ 56'\ 52''.33$

$$\omega = 0^0\ 57'\ 39''.89$$

1.

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tng} u_1 &= 0{\cdot}148\ 7138{\cdot}_3 \\ \log \cos \omega &= 9{\cdot}999\ 9389{\cdot}_3 \\ \hline \log \operatorname{tng} u_2 &= 0{\cdot}148\ 7749{\cdot}_6 \\ u_2 &= 54^0\ 37'\ 37''.34 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} u &= 54^0\ 7'\ 43''.70 \\ \hline \sigma_x &= 0^0\ 29'\ 53''.64 \\ \sigma_x &= 1793''.64 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \log \sin \omega &= 8{\cdot}224\ 6306{\cdot}_0 \\ \log \sin u_2 &= 9{\cdot}911\ 3712{\cdot}_4 \\ \text{d. Erg. } \log \operatorname{tng} u_1 &= 9{\cdot}851\ 2861{\cdot}_7 \\ \hline \log \operatorname{tng} \sigma_y &= 7{\cdot}987\ 2880{\cdot}_1 \\ \sigma_y &= 0^0\ 33'\ 23''.08 \\ \sigma_y &= 2003''\ 08 \end{aligned}$$

4.

a) Berechnung von x.

$$
\begin{aligned}
(\beta) &= 2\cdot538\ 1120 \\
\log\cos(2u+\sigma_x) &= 9\cdot507\ 2232 \text{ neg.} \\
\log\sin\sigma_x &= 7\cdot785\ 4342 \\
\hline
\log \text{II Glied} &= 9\cdot830\ 7694 \text{ neg.} \\
\text{Zahl II Glied} &= -0''.677 \\
\sigma_x &= 1793''.640 \\
\sigma_x - \text{II Glied} &= 1794''.317 \\
\log(\sigma_x - \text{II Glied}) &= 3\cdot253\ 8992\cdot_2 \\
\log b &= 6\cdot513\ 3693\cdot_5 \quad \text{add.} \\
\frac{1}{(\alpha)} &= 4\cdot686\ 3027\cdot_0 \\
\hline
\log x &= 4\cdot453\ 5712\cdot_7 \\
x &= 28416\cdot54 \text{ Toisen.}
\end{aligned}
$$

b) Berechnung von y.

$$
\begin{aligned}
\log\sin u_2 &= 9\cdot911\ 3753 \\
\log\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} &= 8\cdot913\ 6594 \\
\hline
\text{Argument} &= 8\cdot825\ 0347
\end{aligned}
$$

s der Hilfstafel:

$$
\begin{aligned}
(\beta) &= 2\cdot36\ 140 \\
\log\cos\sigma_y &= 9\cdot99\ 997 \\
\log\sin\sigma_y &= 7\cdot98\ 749 \\
\hline
\log \text{II Glied} &= 0\cdot34\ 886 \\
\text{Zahl II Glied} &= 2''.23 \\
\sigma_y &= 2003''.08 \\
\hline
\sigma_y + \text{II Glied} &= 2005.31
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\log(\sigma_y + \text{II Glied}) &= 3\cdot302\ 1815\cdot_6 \\
\log b &= 6\cdot513\ 3693\cdot_5 \quad \text{add.} \\
\text{d. Erg. } \log\alpha &= 4\cdot686\ 0591\cdot_7 \\
\hline
\log y &= 4\cdot501\ 6100\cdot_8 \\
y &= 41740.229 \text{ Toisen.}
\end{aligned}
$$

Ad II.

Es ist die geographische Breite, die Länge und das Azimut von Königsberg zu berechnen, indem bekannt ist:

Vom Punkte Trunz: die geographische Breite $\varphi = 54^0\ 13'\ 11''.4$
„ „ reducirte „ $u = 54^0\ 7'\ 43''.7$
Das nordöstliche Azimuth nach Königsberg $\alpha = 48^0\ 9'\ 52''.5$

Ferner sind die, mittelst der Formeln der ebenen Trigonometrie, berechneten Abstände des Punktes Königsberg vom Meridian und Perpendikel des Punktes Trunz:

$x = 28\ 428{\cdot}24$ Tois. $\quad y = 31\ 755{\cdot}72$
$\log x = 4{\cdot}453\ 7499{\cdot}_3$ $\quad \log y = 4{\cdot}501\ 8221{\cdot}_0$

1.

$(\alpha) = 5{\cdot}313\ 6973{\cdot}_0$ $\quad (\beta) = 2{\cdot}538\ 1120$
d. Erg. $\log b = 3{\cdot}486\ 6306{\cdot}_{5-10}$ $\quad \log\cos(2u+\sigma_x') = 9{\cdot}511\ 2329$ neg
$\log x = 4{\cdot}453\ 7499{\cdot}_3$ $\quad \log\sin\sigma_x' = 7{\cdot}939\ 6338$

$\log$ I. Nhgsw. $\sigma_x' = 3{\cdot}254\ 0778{\cdot}_8$ $\quad \log$ II Glied $= 9{\cdot}988\ 9787$ neg
I. Nhgsw. $\sigma_x' = 1795''.040$ $\quad$ II Glied $= -0''.975$
II Glied $= -0{\cdot}975$

definitiv $\sigma_x = 1794''\ 065$
$\sigma_x = 0^0\ 29'\ 54''.065$

2.

$u = 54^0\ 7'\ 43''.700$
$\sigma_x = 0^0\ 29'\ 54''.065$
$u_2 = 54^0\ 37'\ 37''.765$

3.

$$\log\frac{e}{\sqrt{1-e^2}} = 8{\cdot}915\ 7613$$
$$\log\sin u_2 = 9{\cdot}911\ 3734$$
Argument $= 8{\cdot}827\ 1347$

$(\alpha) = 5\cdot313\ 9361\cdot_0$
$\log y = 4\cdot501\ 8221\cdot_0$
1. Erg. $\log b = 3\cdot486\ 6306\cdot_{5-10}$
1. Nhgsw. $\sigma_y' = 3\cdot302\ 3888\cdot_5$
l. Nhgsw. $\sigma_y' = 2006''\ 267$
$-$ II Glied $= -1''.\ 796$
definitiv $\sigma_y = 2004''.\ 471$

$(\beta) = 2\cdot36\ 559$
$\log\cos\sigma_y' = 9\cdot99\ 997$
$\log\sin\sigma_y' = 7\cdot78\ 876$
$\log$ II Glied $= 0\cdot25432$
Zahl II Glied $= 1''.\ 796$

$\sigma_y = 0^o\ 33'\ 24''.\ 47$

4.

$\log\sin u_2 = 9\cdot911\ 3720\cdot_4$
$\log\cos\sigma_y = 9\cdot999\ 9794\cdot_3$
$\log\sin u_1 = 9\cdot911\ 3514._7$
$u_1 = 54^o\ 37'\ 24.''\ 06$
$\log\operatorname{tng} u_1 = 0\cdot148\ 7111\cdot_6$
$\log\frac{a}{b} = 0\cdot001\ 4541\cdot_8$
$\log\varphi_1 = 0\cdot150\ 1653\cdot_4$
$\varphi_1 = 54^o\ 42'\ 49''.\ 99$
Bebachtet wurde $54^o\ 42'\ 50''.\ 50$
Differenz $0''.\ 51$

mit eine sehr befriedigende Uebereinstimmung.

5.

$\log\operatorname{tng}\sigma_y = 7\cdot987\ 5857\cdot_0$
$\log\cos u_2 = 9\cdot762\ 5995\cdot$
$\log\operatorname{tng}\omega = 8\cdot224\ 9861\cdot_3$
$\omega = 0^o\ 57'\ 42''.\ 34$

Argument $= 8\ 762\ 19$

$(\alpha') = 9\cdot69\ 87\ 29$
$\log\sigma_y = 3\cdot30\ 19\ 95$
$\log\frac{e^2}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{4}e^2}} = 7\cdot82\ 51\ 37$
$\log A = 0\cdot82\ 5861$
$A = 6''.\ 696$
$B = 0.\ 552$
$A - B = 6''\ 144$
$w = \omega - 6''.\ 144 = 0^o\ 57'\ 36''.\ 196.$

$(\beta') = 1\cdot754$
$\log\cos\sigma_y = 9\cdot999$
$\log\sin\sigma_y = 7\cdot989$
$\log B = 9\cdot742$
$B = 0''.\ 552$

Die Berechnung dieses Längenunterschiedes aus der Dreiecksseite Trunz-Königsberg ($\log s = 4{\cdot}629\ 6286$) gibt:

$$w = 0^{0}\ 57'\ 35''.97.$$

(Bayer's Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche.)

6.

$$\begin{aligned}
\log \sin \alpha &= 9{\cdot}872\ 1935{\cdot}_{5} \\
\log \cos u &= 9{\cdot}767\ 8717{\cdot}_{3} \\
\text{d. Erg. } \log \cos u_1 &= 0{\cdot}237\ 3587{\cdot}_{1} \\
\hline
\log \sin \alpha_1 &= 9{\cdot}877\ 4239{\cdot}_{9} \text{ neg.} \\
\alpha_1 &= 288^{0}\ 56'\ 45''.76 \\
\text{beobachtet wurde } \alpha_1 &= 288\ 56\ 52.\ 53 \\
\hline
\text{Differenz} & \quad 6''.77.
\end{aligned}$$

XXVIII.

Ueber die Bestimmung der Vielecke durch die Halbirungspunkte ihrer Seiten.

Von

Herrn Oberstudienrath Dr. *Nagel*
in Ulm.

Die folgende Untersuchung bietet keine Schwierigkeiten dar. Ich theile sie hier mit, weil sie manche Lehrer der ebenen Geometrie auf Bedingungen zu Construktionsaufgaben aufmerksam machen dürfte, die bis jetzt in der Aufgabenliteratur ziemlich vernachlässigt worden sind, und für den Unterricht doch desswegen brauchbar werden können, weil sie zu leichten und elementaren Construktionen führen.

Ich setze folgende allgemein bekannten und elementaren Sätze voraus:

1. Jedes Dreieck wird durch die Verbindung der Halbirungspunkte seiner Seiten in vier kongruente Dreiecke zerlegt.

2. In jedem Vierecke bilden die vier Halbirungspunkte der Seiten die Eckpunkte eines Parallelogramms.

Daraus folgt:

1. Jedes Dreieck ist durch die drei Halbirungspunkte seiner Seiten vollkommen bestimmt. Die Aufgabe, ein Dreieck zu konstruiren, von welchem die drei Halbirungspunkte der Seiten gegeben sind, ist also eine bestimmte (nur eine Lösung zulassende) Aufgabe, welcher nur die Determination beigefügt werden muss, dass die drei gegebenen Punkte nicht in gerader Linie liegen dürfen.

2. Dagegen ist die Aufgabe, ein Viereck zu konstruiren, von welchem die vier Halbirungspunkte der Seiten gegeben sind, entweder unmöglich oder unbestimmt. Sie ist unmöglich, wenn die vier Punkte die Eckpunkte eines Viereckes bilden, welches kein Parallelogramm ist. Ist dagegen letzteres der Fall, so lässt die Aufgabe unendlich viele Auflösungen zu, indem jede durch einen der vier gegebenen Punkte so hindurchgezogene gerade Linie, dass sie in diesem Punkte halbirt wird, der Aufgabe Genüge leistet. Die Aufgabe wird also nur dadurch zu einer bestimmten, dass eine der vier Seiten des gesuchten Vierecks nach Lage und Grösse gegeben ist.

Dies vorausgesetzt, lässt sich folgender Satz beweisen:

Jedes Vieleck von ungerader Seitenzahl ist konstruirbar, (und zwar ist die Aufgabe bestimmt), wenn die Halbirungspunkte seiner Seiten gegeben sind. Jedes Vieleck von gerader Seitenzahl aber ist entweder unmöglich oder unbestimmt, wenn die Halbirungspunkte seiner Seiten gegeben sind.

Denn jedes N-eck lässt sich durch Diagonalen in $N-2$ Dreiecke zerlegen. Ist N eine ungerade Zahl, so ist auch die Zahl der Dreiecke ungerade und das N-eck zerfällt also in $\frac{1}{2}(N-3)$ Vierecke und ein Dreieck. Das erste Viereck besteht aus drei Seiten des N-ecks und einer Diagonale, jedes folgende aus zwei Seiten des N-ecks und zwei Diagonalen, und das noch übrige Dreieck aus der letzten Diagonale und den beiden letzten Seiten des N-ecks. Durch die gegebenen drei Halbirungspunkte des ersten Vierecks ist der vierte auf der ersten Diagonale liegende Halbirungspunkt gegeben, und so für jede folgende Diagonale bis zur letzten, also sind für das übrige Dreieck die drei Halbirungs-

punkte der Seiten, also das Dreieck selbst bestimmt; für das schliessende Viereck sind also nicht blos die vier die Eckpun eines Parallelogramms bildenden Halbirungspunkte der Seit sondern auch eine Seite selbst (eben die gefundene Diagona der Lage und Grösse nach gegeben, also das Viereck zu k struiren, und so zurück bis zum ersten.

Ist dagegen N eine gerade Zahl, so ist die Zahl Dreiecke auch $N-2$, also eine gerade Zahl; folglich z fällt das N-eck in $\frac{1}{2}(N-2)$ Vierecke. Stellt man d selben Betrachtungen an wie beim vorigen N-eck, so ergibt si leicht, dass beim letzten Viereck die Aufgabe nur möglich i wenn die vier erhaltenen Halbirungspunkte die Eckpunkte ein Parallelogramms bilden, in diesem Falle aber unendlich viele A lösungen möglich sind. Ein solches N-eck ist also nur dann b stimmt, wenn noch eine Seite desselben nach Lage und Grös gegeben ist.

(Die bei den Aufgaben erforderlichen Determinationen, z. dass nicht drei nebeneinander liegende Halbirungspunkte in gerad Linie liegen dürfen u. s. w., übergehe ich).

Zur Erläuterung mögen folgende zwei Aufgaben dienen:

1. Ein Neuneck zu konstruiren, von welchem die neun H birungspunkte $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7\ A_8\ A_9$ (Taf. VII. Fig. III.) d Seiten gegeben sind.

Auflösung. Ziehe $A_1\ A_2$ und $A_2\ A_3$ und ergänze zum P rallelogramm $A_1\ A_2\ A_3\ P_1$, so ist P_1 gefunden; ziehe $P_1\ A_4$ u $P_1\ A_9$ und ergänze zum Parallelogramm $P_1\ A_4\ P_2\ A_9$, so ist gefunden; ziehe $P_2\ A_5$ und $P_2\ A_8$ und ergänze zum Parallelogram $P_2\ A_5\ A_3\ A_8$, so ist P_3 gefunden. Durch $P_3\ A_6\ A_7$ ist das Dreie $M_1\ M_2\ M_3$ bestimmt. Da nun vom Viereck $M_2\ M_3\ M_5\ M_4$ Halbirungspunkte der vier Seiten und die Seite $M_2\ M_3$ der Grös und Lage nach gegeben sind, so ist das Viereck, also auch das nächste Viereck $M_4\ M_5$ der Grösse und Lage nach gegeb u. s. w.

2. Ein Achteck zu konstruiren, wenn die acht Halbirung punkte der Seiten $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6\ A_7\ A_8$ (Taf. VII. Fig. IV.) g geben sind.

Auflösung. Es ergibt sich, wie im Vorigen, dass dur $A_1\ A_2\ A_3$ auch P_1 als vierter Eckpunkt eines Parallelogram gegeben ist; ebenso ist durch $P_1\ A_4\ A_8$ auch P_2 gegeben. D Auflösung ist daher nur dann möglich, wenn P_2 mit den sch

gegebenen Punkten A_5 A_6 A_7 ebenfalls ein Parallelogramm bildet. In diesem Falle aber wird jede durch A_6 gezogene gerade Linie, welche in A_6 halbirt wird, der Aufgabe Genüge leisten. Die Aufgabe ist daher entweder unbestimmt oder unmöglich.

XXIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

In ein gegebenes Dreieck ist ein Kreis beschrieben; in das durch die Berührungspunkte dieses Kreises mit den Seiten des Dreiecks bestimmte Dreieck ist wieder ein Kreis beschrieben; u. s. w. u. s. w. Welches ist die Gränzlage der Mittelpunkte der eingeschriebenen Kreise?

R. W. Genese, B. A.

Zu beweisen, dass für $s = u + x + y + z$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} (s-u)^2, & x^2, & y^2, & z^2 \\ u^2, & (s-x)^2, & y^2, & z^2 \\ u^2, & x^2, & (s-y)^2, & z^2 \\ u^2, & x^2, & y^2, & (s-z^2) \end{vmatrix}$$

$$= 2(u+x+y+z)^5 uxyz\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{u+x+y+z}\right)$$

ist.

J. Wolstenholme.

Man soll die Gleichung

$$(x^2+12x-10)^2 = 2(51x^2-102x+55)$$

auflösen.

Rev. N. J. Knisely.

XXX.

Miscellen.

Schreiben des Herrn Oberlehrers C. Hellwig an der Realschule I. Ordnung in Erfurt an den Herausgeber.

In Beziehung auf einen von Ihnen verfassten, in Th. 52 des Archivs enthaltenen Aufsatz und einen von Herrn Dir. Strehlke in Th. 53 mitgetheilten Beweis eines geometrischen Satzes erlaube ich mir Ihnen nachstehende Bemerkungen zu übermachen, welche Sie vielleicht die Güte haben, in eines der nächsten Hefte des Archivs aufzunehmen.

Herr Dir. Strehlke hat in Th. 53. pag. 127 dieses Archivs einen einfachen Beweis für die Formeln mitgetheilt, welche die Entfernungen zwischen dem Mittelpunkt des um ein Dreieck beschriebenen Kreises einerseits und den Mittelpunkten der vier die Seiten des Dreiecks berührenden Kreise andererseits durch die betreffenden Radien ausdrücken. Er bemerkt am Schluss dieses Beweises, dass er anderweitig die auf die äusseren Berührungskreise sich beziehenden Ausdrücke bisher nicht erwähnt gefunden habe. Ich erlaube mir deshalb auf Th. 19. pag. 37 dieses Archivs, oder auf pag. 54 des zweiten Cursus meiner i. J. 1865 erschienenen Schule der Geometrie hinzuweisen. Der von mir an letzterer Stelle angedeutete Beweis stimmt übrigens mit dem von Herrn St. mitgetheilten überein; nur wird von mir die fragliche Entfernung in Bezug auf den inneren Berührungskreis als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks aufgefasst, dessen Hypotenuse R und dessen andere Kathete die Hälfte derjenigen kleinsten Sehne des umschriebenen Kreises ist, welche durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises hindurchgeht. Auf diese Weise kann man die Anwendung des arithmetischen Satzes: $(a+b).(a-b) = a^2-b^2$ vermeiden und durch geometrische Betrachtungen ersetzen, was

ibrigens Herr St. durch eine an der betreffenden Stelle gemachte Anmerkung auch anzudeuten scheint. Eine andere Herleitung derselben Formeln hat der Herr Herausgeber des Archivs in Th. 36 von pag. 343 an gegeben.

In meinem bereits oben angezogenen Aufsatze (Archiv Th. 19) habe ich unterlassen, die Entfernungen zwischen dem Schwerpunkt einerseits und den Mittelpunkten der Berührungskreise andererseits zu ermitteln. Ich will dies hier nachholen. Indem ich die in jenem Aufsatze eingeführten Bezeichnungen beibehalte, führe ich für die Entfernung des Schwerpunkts vom Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises das Zeichen X ein. Man denke sich dasjenige Dreieck, dessen Ecken der Halbirungspunkt der Verbindungsgeraden zwischen dem Höhendurchschnitt und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, der eben erwähnte Mittelpunkt und der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises sind, dessen Seiten also $\frac{1}{3}E_3$, H und E sind. Auf der ersten dieser Seiten befindet sich der Schwerpunkt in solcher Lage, dass seine Entfernung von der ersten Ecke des Dreiecks den dritten Theil dieser Seite d. h. $\frac{1}{6}E_3$ beträgt. Die Verbindungsgerade dieses Theilungspunktes mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks ist X. Daher hat man nach einem Dreieckssatze (m. vergl. Schule der Geometrie pag. 48, Satz 469) die Beziehung:

$$E^2 + 2H^2 = \tfrac{1}{6}E_3{}^2 + 3X^2,$$

also:

$$3X^2 = E^2 + 2H^2 - \tfrac{1}{6}E_3{}^2.$$

Führt man in diese Gleichung die in den Formeln (61), (74) und (59) des angeführten Aufsatzes enthaltenen Werthe ein, so entsteht hieraus:

$$3X^2 = R(R-2r) + \tfrac{1}{2}(R-2r)^2 - \tfrac{3}{2}R^2 + \tfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2)$$
$$= \tfrac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) - 4Rr + 2r^2,$$

folglich:

$$) \ldots\ldots X^2 = \tfrac{1}{18}(a^2+b^2+c^2) - \tfrac{2}{3}r(2R-r).$$

Diese Betrachtung lässt sich auch auf die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise anwenden und es ergiebt sich auf diesem Wege für die Entfernung X_1 des Schwerpunktes vom Mittelpunkt des ersten dieser Kreise die Bestimmung:

$$) \ldots\ldots X_1{}^2 = \tfrac{1}{18}(a^2+b^2+c^2) + {}^2r_1(2R+r_1).$$

Es bestätigt sich auch hier wieder, dass man die für die äusseren Berührungskreise geltenden metrischen Bestimmungen leicht durch einfache Uebertragung aus den entsprechenden auf

den inneren Berührungskreis bezüglichen erhält, wenn man an Stelle des Radius dieses letzteren den mit negativem Vorzeichen zu versehenden Radius des betreffenden äusseren Berührungskreises einführt. Sollten in diesen Bestimmungen die Seiten des Dreiecks vorkommen, so hat man diejenige derselben negativ zu setzen, welche der äussere Berührungskreis von aussen berührt. So lässt sich z. B. die Gleichung (I), nachdem man ihr die Form

$$X^2 = \tfrac{1}{18}(a^2+b^2+c^2) + \tfrac{2}{3}r(r+4R) - 4Rr$$

gegeben, vermöge der Relationen:

$$r + 4R = r_1 + r_2 + r_3,$$

$$4r.(r_1+r_2+r_3) = 2(ab+ac+bc) - (a^2+b^2+c^2)\ *)$$

und

$$2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$$

sofort in eine solche umwandeln, welche nur die Seiten des Dreiecks enthält. Sie lautet:

$$X^2 = \tfrac{1}{3}(ab+ac+bc) - \tfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{2abc}{a+b+c},$$

übereinstimmend mit dem von Collins gefundenen, von dem Herrn Herausgeber in Th. 52. pag. 247, auf Grund seines früheren Aufsatzes in Th. 36 des Archivs, hergeleiteten Werthe.

Aus diesem kann man auf die oben angegebene Weise ohne Weiteres auf denjenigen schliessen, welcher sich auf den die Seite a von aussen berührenden Kreis bezieht; er heisst:

$$X_1^2 = \tfrac{1}{3}(bc-ab-ac) - \tfrac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) + \frac{2abc}{b+c-a}.$$

Der Formel des Herrn Herausgebers in Th. 52. pag. 248 des Archivs würde bei diesem Kreise die folgende entsprechen:

$$9X_1^2 = 6(R+r_1)^2 - 2(1-2\cos A\cos B\cos C)R^2.$$

Um schliesslich X und X_1 durch die Radien der Berührungskreise allein auszudrücken, mögen neben (1) und (2) die Beziehungen:

$$a^2+b^2+c^2 = 2(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3) - 2r(r_1+r_2+r_3)$$

und

$$4R = r_1+r_2+r_3-r$$

benutzt werden. Man findet auf diese Weise:

$$X^2 = \tfrac{1}{9}(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3) - \tfrac{2}{9}(rr_1+rr_2+rr_3) + r^2$$

und

$$X_1^2 = \tfrac{1}{9}(r_2r_3-rr_2-rr_3) - \tfrac{4}{9}(rr_1-r_1r_2-r_1r_3) + r_1^2.$$

*) In der Gleichung (67) auf pag. 40. Th. 19 des Archivs fehlt der Factor 4.

XXXI.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy,$$

in welcher n eine ganze positive Zahl, die grösser als 2 ist, und A, B, C constante Zahlen bezeichnen.

Von

Herrn ***Simon Spitzer***,
Professor am k. k. Polytechnikum in Wien.

Das Integrale der Gleichung

$$y^{(n)} = x^2y'' + (\alpha+\beta+1)xy' + \alpha\beta y \quad \ldots\ldots (1)$$

habe ich im 3. Bande der mathematischen Annalen Seite 453 in der Form

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha-1} v^{\beta-1} (C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} + \ldots + C_n e^{\lambda_n uvx}) du\, dv$$

gegeben, in welcher

$$C_1 \quad C_2 \ldots C_n$$

willkürliche Constante, ferner

$$\lambda_1 \quad \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

die n Wurzeln der Gleichung

$$\lambda^n = 1$$

sind, und α und β positive Zahlen (oder solche imaginäre Zahlen, deren reelle Bestandtheile positiv sind) bezeichnen.

Ist aber $\alpha = 0$, oder ist α eine ganze negative Zahl, etwa $\alpha = -a$, so erscheint ein particuläres Integrale der Gleichung (1) in Gestalt einer ganzen algebraischen Function von x, welche vom a^{ten} Grade ist, und diess soll im Nachfolgenden bewiesen werden.

1. Ist $\alpha = 0$, so erscheint die Gleichung (1) in der Gestalt

$$y^{(n)} = x^2y'' + (\beta+1)xy',$$

und dieser Gleichung genügt, wie man auf den ersten Blick sieht,

$$y = C,$$

woselbst C eine willkürliche Constante bezeichnet.

2. Ist $\alpha = -1$, so erscheint die Gleichung (1) in der Gestalt

$$y^{(n)} = x^2y'' + \beta xy' - \beta y,$$

und ihr genügt, wie man sich leicht überzeugt,

$$y = Cx,$$

unter C eine willkürliche Constante verstanden.

3. Ist $\alpha = -2$, so erscheint die Gleichung (1) in der Gestalt

$$y^{(n)} = x^2y'' + (\beta-1)xy' - 2\beta y$$

und ihr genügt, wie man sich wieder leicht überzeugt

$$y = Cx^2,$$

unter C eine willkürliche Constante verstanden.

4. Ist $\alpha = -3$, so hat die Gleichung (1) die Gestalt

$$y^{(n)} = x^2y'' + (\beta-2)xy' - 2\beta y \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Sie führt, 3mal differenzirt, zu folgender Gleichung:

$$y^{(n+3)} = x^2y^{(5)} + (\beta+4)xy^{(4)} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Nun ist klar, dass die beiden letzten Gleichungen n particuläre Integrale gemeinschaftlich haben, denn es müssen ja offenbar alle Integrale, welche der Gleichung (2) genügen, auch der Gleichung (3) Genüge leisten, denn die Gleichung (3) ist ja eine blosse Folge der Gleichung (2).

Die Gleichung (3) hat aber ausser den genannten n particulären Integralen noch 3 particuläre Integrale, die nicht der Gleichung (2) genügen, und die bloss in die Rechnung eingeführt worden sind durch das 3malige Differenziren der Gleichung (2).

Es folgt aber aus (3)

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

ter $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ willkürliche Constante verstanden. Da dieser Aus-
uck 4 willkürliche Constante enthält, so repräsentirt er 4 particuläre
egrale der Gleichung (3), wenigstens eines dieser particulären Inte-
le gehört daher der Gleichung (2) an. Um dieses zu finden, setzen
den in (4) aufgestellten Werth von y in (2) und bestimmen die
stanten $C_1\ C_2\ C_3\ C_4$ so, dass der Gleichung (2) identisch Genüge
hieht.

Will man die Rechnung wirklich ausführen, so ist man genöthigt,
n in der Gleichung (2) zu specialisiren. Nehmen wir an, es sei
=3, alsdann hat man die Gleichung

$$y''' = x^2y'' + (\beta - 2)xy' - 3\beta y \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

man in selber

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3,$$

erhält man:

$$= x^2(2C_3 + 6C_4x) + (\beta - 2)x(C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2) - 3\beta(C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3),$$

diese zerfällt in folgendes System von Gleichungen:

$$0 = 6C_4 + 3(\beta - 2)C_4 - 3\beta C_4,$$
$$0 = 2C_3 + 2(\beta - 2)C_3 - 3\beta C_3,$$
$$0 = (\beta - 2)C_2 - 3\beta C_2,$$
$$6C_4 = -3\beta C_1.$$

Aus ihnen ergiebt sich:

$$C_2 = C_3 = 0,$$
$$C_1 = -\frac{2}{\beta}C_4.$$

Demnach erhält man

$$y = C_4(x^3 - \frac{2}{\beta}),$$

einfacher

$$y = \beta x^3 - 2$$

particuläres Integrale der Gleichung (5).

Genau auf dieselbe Art kann man verfahren, wenn $\alpha = -4$,
... ist.

XXXII.

Der Flächeninhalt der Ellipse durch die Coefficienten ihrer allgemeinen Gleichung für cartesische und trimetrische Coordinaten ausgedrückt.

Von

dem Herausgeber.

I.

In meiner Abhandlung: Allgemeine Discussion der Gle chung der Linien des zweiten Grades. Thl. LI. Nr. XXVI S. 319. §. 7. habe ich mit Bezug auf eine Stelle in den Werken v Gauss in einem besonderen Falle den Flächeninhalt der Ellip durch die Coefficienten in ihrer Gleichung für cartesische Coor naten ausgedrückt. Ich will jetzt, was ich damals unterliess, jene Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, diese Untersuchung g im Allgemeinen anstellen, wobei der ganze Inhalt der genannten handlung als bekannt vorausgesetzt wird.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, und also auch Ellipse, für cartesische Coordinaten ist:

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

wobei, wie in der genannten Abhandlung, der Coordinatenwinkel du α bezeichnet werden soll.

Nach Thl. LI. S. 317. sind die beiden Halbaxen der Ellipse

$$\sqrt{\pm\frac{\Omega}{P}},\quad \sqrt{\pm\frac{\Omega}{Q}};$$

wo eine Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander nicht Statt findet, sondern in beiden Ausdrücken die Zeichen nur so zu nehmen sind, dass die Grössen unter den Wurzelzeichen positiv werden.

Nach Thl. LI. S. 304. und S. 305. wird die Curve in zwei Fällen eine Ellipse, nämlich wenn

$$C^2-AB<0,$$

$$A>0, \qquad B>0;$$

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0;$$

und wenn

$$C^2-AB<0,$$

$$A<0, \qquad B<0;$$

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE<0$$

ist.

Nach Thl. LI. S. 281. ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\begin{aligned} 2P\sin\alpha^2 = {} & A+B-2C\cos\alpha \\ & \mp\sqrt{(A-B)^2+4(C-A\cos\alpha)(C-B\cos\alpha)}, \\ 2Q\sin\alpha^2 = {} & A+B-2C\cos\alpha \\ & \pm\sqrt{(A-B)^2+4(C-A\cos\alpha)(C-B\cos\alpha)}; \end{aligned}$$

also, wie man durch Multiplication leicht findet:

$$PQ\sin\alpha^2 = AB-C^2,$$

oder:

$$PQ=\frac{AB-C^2}{\sin\alpha^2},$$

so dass also im Falle der Ellipse stets

$$PQ>0$$

ist.

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt der Ellipse durch $\mathfrak{F}$, so ist nach dem Obigen und dem bekannten Ausdrucke des Flächeninhalts der Ellipse durch ihre Halbaxen offenbar:

$$\mathfrak{F}=\frac{\pi\,\mathrm{val.abs.}\,\Omega}{\sqrt{PQ}},$$

XXXII.

Der Flächeninhalt der Ellipse durch die Coefficienten i ihrer allgemeinen Gleichung für cartesische und trimetrische Coordinaten ausgedrückt.

Von

dem Herausgeber.

I.

In meiner Abhandlung: Allgemeine Discussion der Gl chung der Linien des zweiten Grades. Thl. LI. Nr. XXVI S. 319. §. 7. habe ich mit Bezug auf eine Stelle in den Werken v Gauss in einem besonderen Falle den Flächeninhalt der Ellip durch die Coefficienten in ihrer Gleichung für cartesische Coor naten ausgedrückt. Ich will jetzt, was ich damals unterliess, u jene Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, diese Untersuchung g im Allgemeinen anstellen, wobei der ganze Inhalt der genannten A handlung als bekannt vorausgesetzt wird.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, und also auch d Ellipse, für cartesische Coordinaten ist:

$$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0,$$

wobei, wie in der genannten Abhandlung, der Coordinatenwinkel dur α bezeichnet werden soll.

Nach Thl. LI. S. 317. sind die beiden Halbaxen der Ellipse

$$\sqrt{\pm\frac{\Omega}{P}}, \quad \sqrt{\pm\frac{\Omega}{Q}};$$

wo eine Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander nicht Statt findet, sondern in beiden Ausdrücken die Zeichen nur so zu nehmen sind, dass die Grössen unter den Wurzelzeichen positiv werden.

Nach Thl. LI. S. 304. und S. 305. wird die Curve in zwei Fällen eine Ellipse, nämlich wenn

$$C^2-AB<0,$$

$$A>0, \qquad B>0;$$

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE>0;$$

und wenn

$$C^2-AB<0,$$

$$A<0, \qquad B<0;$$

$$AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE<0$$

ist.

Nach Thl. LI. S. 281. ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$2P\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \mp\sqrt{(A-B)^2+4(C-A\cos\alpha)(C-B\cos\alpha)},$$

$$2Q\sin\alpha^2 = A+B-2C\cos\alpha \pm\sqrt{(A-B)^2+4(C-A\cos\alpha)(C-B\cos\alpha)};$$

also, wie man durch Multiplication leicht findet:

$$PQ\sin\alpha^2 = AB-C^2,$$

oder:

$$PQ=\frac{AB-C^2}{\sin\alpha^2},$$

so dass also im Falle der Ellipse stets

$$PQ>0$$

ist.

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt der Ellipse durch $\mathfrak{F}$, so ist nach dem Obigen und dem bekannten Ausdrucke des Flächeninhalts der Ellipse durch ihre Halbaxen offenbar:

$$\mathfrak{F}=\frac{\pi\,\text{val.abs.}\,\Omega}{\sqrt{PQ}},$$

folglich, weil nach dem Vorhergehenden

$$\sqrt{PQ} = \frac{\sqrt{AB-C^2}}{\sin\alpha}$$

ist

$$\mathfrak{F} = \frac{\pi \sin\alpha \,\text{val.abs.}\, \Omega}{\sqrt{AB-C^2}}.$$

Nach Theil LI. S. 282. ist

$$\Omega = \frac{AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE}{C^2-AB},$$

und folglich offenbar in dem ersten der beiden obigen Fälle:

$$\text{val.abs.}\,\Omega = \frac{AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE}{AB-C^2};$$

und in dem zweiten der beiden obigen Fälle:

$$\text{val.abs.}\,\Omega = -\frac{AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE}{AB-C^2};$$

also:

$$\text{val.abs.}\,\Omega = \pm\frac{AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE}{AB-C^2},$$

wenn man in dem ersten und zweiten der beiden obigen Fälle beziehungsweise das obere und untere Zeichen nimmt.

Mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen ist folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\mathfrak{F} = \pm\frac{\pi \sin\alpha.(AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE)}{(AB-C^2)\sqrt{AB-C^2}},$$

oder es ist:

$$\mathfrak{F} = \frac{\pi \sin\alpha.\,\text{val.abs.}(AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE)}{(AB-C^2)\sqrt{AB-C^2}}.$$

Für rechtwinklige cartesische Coordinaten ist $\alpha = 90^0$, folglich:

$$\mathfrak{F} = \frac{\pi\,\text{val.abs.}(AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE)}{(AB-C^2)\sqrt{AB-C^2}}.$$

Für $A=a$, $B=c$, $C=b$, $D=0$, $E=0$, $F=-1$ findet man in dem in Rede stehenden besonderen Falle unter den dortigen Voraussetzungen ganz denselben, in diesem besonderen Falle auch von Gauss für rechtwinklige Coordinaten gegebenen Ausdruck wie a. a. O.

Man wird an Entwickelungen wie die vorstehenden gewiss auch die grossen Vortheile erkennen, welche — namentlich früher anderweitig gegebenen Formeln gegenüber — die in der oben genannten Abhandlung von mir entwickelten ganz allgemeinen Formeln gewähren.

II.

In meiner Abhandlung: Allgemeine Discussion der Gleichung des zweiten Grades

$$Ap_0^2+Bp_1^2+Cp_2^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0=1$$

zwischen Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten. Thl. LI. Nr. XXIX. S. 326. habe ich S. 350. gezeigt, dass in den dort gebrauchten Zeichen das Product der Quadrate der beiden Halbaxen der Ellipse oder Hyperbel der absolute Werth der Grösse

$$\frac{4H^2J^4}{G^3}$$

ist.

Nach Thl. LI. S. 337. ist nun die Curve in zwei Fällen eine Ellipse, nämlich wenn:

$$G<0,$$
$$A>0, \quad B>0,$$
$$H>0$$

und wenn

$$G<0,$$
$$A<0, \quad B<0,$$
$$H<0$$

ist.

Also ist nach dem Vorhergehenden offenbar das Product der beiden Halbaxen

$$-\frac{2J^2\,\text{val.abs.}\,H}{G\sqrt{-G}}.$$

Bezeichnen wir nun wieder den Flächeninhalt der Ellipse durch $\mathfrak{F}$, so ist in dem ersten der beiden obigen Fälle:

$$\mathfrak{F}=-\frac{2\pi J^2H}{G\sqrt{-G}},$$

und in dem zweiten der beiden obigen Fälle ist:

$$\mathfrak{F} = \frac{2\pi J^2 \mathrm{H}}{\mathrm{G}\sqrt{-\mathrm{G}}};$$

folglich:

$$\mathfrak{F} = \mp \frac{2\pi J^2 \mathrm{H}}{\mathrm{G}\sqrt{-\mathrm{G}}},$$

wenn man in dem ersten und zweiten der beiden obigen Fälle ziehungsweise das obere und untere Zeichen nimmt.

Ueberhaupt kann man setzen:

$$\mathfrak{F} = -\frac{2\pi J^2 \mathrm{val.abs.H}}{\mathrm{G}\sqrt{-\mathrm{G}}}.$$

Nach Thl. LI. S. 337. ist:

$$\begin{aligned}
\mathrm{G} = \quad & (D^2 - 4AB)\sin w_{01}^2 \\
& + (E^2 - 4BC)\sin w_{12}^2 \\
& + (F^2 - 4CA)\sin w_{20}^2 \\
& - 2(DE - 2BF)\sin w_{01}\sin w_{12} \\
& - 2(EF - 2CD)\sin w_{12}\sin w_{20} \\
& - 2(FD - 2AE)\sin w_{20}\sin w_{01},
\end{aligned}$$

$$\mathrm{H} = AE^2 + BF^2 + CD^2 - 4ABC - DEF;$$

und wie in Thl. XXXVIII. S. 406. ist

$$J = \frac{4\Delta^2}{s_0 s_1 s_2},$$

wo Δ und s_0, s_1, s_2 ganz dieselbe Bedeutung haben wie an dem eben angeführten Orte.

Will man statt der Winkel w_{01}, w_{12}, w_{20} die Winkel des d Dreilinien-Coordinatensysteme zu Grunde gelegten Dreiecks in obigen Formeln einführen, so hat man die in Thl. LII. S. 333. ff. gebenen sehr einfachen, eine ganz unmittelbare Uebertragung gest tenden Regeln in Anwendung zu bringen, worüber also hier nic weiter zu sagen ist.

XXXIII.

Die allgemeinen Theoreme von Pascal, Desargues, Pappus, Carnot und Chasles von den Kegelschnitten, mit Zugrundelegung des trimetrischen oder Dreilinien-Coordinatensystems entwickelt.

Von

dem Herausgeber.

(Fig. s. Taf. VII.)

Einleitung.

Bekanntlich lassen aus einigen allgemeinen Theoremen die meisten Eigenschaften der Kegelschnitte sich ableiten, viele diese Curven betreffende Aufgaben können mittelst derselben wenigen Sätze in besonders eleganter Weise gelöst werden, und diese Sätze sind daher jedenfalls als die eigentliche Grundlage der allgemeinen Theorie der Kegelschnitte zu betrachten. Die wichtigste Rolle unter diesen Sätzen spielen zunächst die Theoreme von Pappus, von Pascal, von Desargues, von Carnot und von Chasles, wie man dieselben gegenwärtig meistens zu nennen pflegt. Deshalb hat auch Chasles in seinem trefflichen Traité des sections coniques, faisant suite au Traité de Géométrie supérieure, par M. Chasles. Première Partie. Paris 1865., welches Buch nach unserer Ueberzeugung allen denen, welche die aus dem Gesichtspunkte der sogenannten neueren Geometrie behandelte Theorie der Kegelschnitte kennen lernen wollen, vor allen übrigen — natürlich in Verbindung mit dem berühmten Traité de Géométrie supérieure, par

M. Chasles. Paris 1852 — zum Studium dringendst empfohlen werden muss, die genannten Theoreme zur hauptsächlichsten und eigentlichen Grundlage der Theorie der Kegelschnitte gemacht (m. s. p. 3. n°. 4. Propriété fondamentale relative aux points d'une conique. — Théorème de Chasles, wie ich dasselbe nennen möchte. — p. 16. n°. 19. Théorème de Pappus. — p. 17. n°. 20. Théorème de Desargues. — p. 18. n°. 22. Théorème de Pascal. — p. 19. n°. 23. Théorème de Carnot). — Natürlich ist in der genannten trefflichen Buche, wie dessen Zweck es erforderte, eine rein-geometrische Darstellung und Entwickelung der genannten wichtigen Theoreme gegeben worden, nach welcher dieselben aus der §. I. n°. 1. p. 1. gegebenen Definition der Kegelschnitte, welche dieselben eben so, wie schon Apollonius that, durch Durchschneidung eines Kegels mit kreisförmiger Grundfläche durch eine Ebene entstehen lässt, auf Grundlage der in der Géométrie supérieure enthaltenen Untersuchungen, abgeleitet werden.

So scharfsinnig, wichtig und im höchsten Grade interessant diese rein-geometrischen Theorieen auch sind, so einfach dieselben auch meistens zum Zwecke führen: so scheint mir doch neben denselben auch eine analytische Darstellung der genannten Theoreme ihre ganz besondere Bedeutung und Berechtigung zu haben; und allerdings sind analytisch-geometrische Beweise für einige derselben auch schon in mehr oder weniger anerkennungswerther Weise gegeben worden. Dessenungeachtet scheint mir aber — aus verschiedenen nicht weiter hier zu erörternden Gründen — eine neue zusammenhängende analytisch-geometrische Darstellung dieser Theoreme nicht überflüssig und aus mehreren Gründen wünschenswerth zu sein, weshalb ich eine solche in dieser Abhandlung entwickeln werde. Mit der Entwickelung dieser Theorie der genannten Theoreme verbinde ich aber noch den besonderen Zweck, eine Anwendung der trimetrischen oder Dreilinien-Coordinaten, welche ich der folgenden Theorie durchweg zu Grunde legen werde, zu zeigen, und dadurch dieselben zu immer häufigerem Gebrauche bei geometrischen Untersuchungen zu empfehlen, wobei ich zugleich hoffe, dass die folgenden Untersuchungen auch eine nicht geringe Anzahl neuer Resultate, insbesondere neuer merkwürdiger und eleganter analytischer Ausdrücke, enthalten werden.

Den Inhalt meiner Abhandlungen: Das System der Dreilinien-Coordinaten in allgemeiner analytischer Entwickelung. Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. S. 389. — Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, insbesondere auch die allgemeine Gleichung des Kreises, in Dreilinien-Coordinaten oder in sogenannten trimetrischen Coordinaten. Thl. LI.

Nr. XXVII. S. 257. — womit man auch noch die Abhandlung: Allgemeine Discussion der Gleichung des zweiten Grades

$$Ap_0^2+Bp_1^2+Cp_2^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0=0$$

zwischen Dreilinien-Coordinaten oder sogenannten trimetrischen Coordinaten. Thl. LI. Nr. XXIX. S. 326. verbinden kann — setze ich im Folgenden als vollständig bekannt voraus, und werde häufig Gelegenheit haben, mich auf dieselben zu beziehen, wenn dies auch der Kürze wegen öfters nur im Allgemeinen ohne bestimmte Zurückweisungen, was hier hinreicht, geschehen wird, welches hier ein für alle Mal bemerkt sein mag. — Auch vergleiche man rücksichtlich der im Folgenden vorkommenden Winkel ω die Abhandlung Thl. LII. Nr. XXI. §. 1.

I.

Fünf und sechs Punkte in einem Kegelschnitte.

§. 1.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte hat, wie in Thl. LI. Nr. XXVII. gezeigt worden ist, die Form:

$$Ap_0^2+Bp_1^2+Cp_2^2+Dp_0p_1+Ep_1p_2+Fp_2p_0=0,$$

welche wir daher zur Grundlage aller unserer folgenden Untersuchungen machen.

Wenn wir nun fünf Punkte:

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A}$$

deren Coordinaten beziehungsweise durch:

$$\begin{array}{lll} \overset{1}{p}_0, & \overset{1}{p}_1, & \overset{1}{p}_2; \\ \overset{2}{p}_0, & \overset{2}{p}_1, & \overset{2}{p}_2; \\ \overset{3}{p}_0, & \overset{3}{p}_1, & \overset{3}{p}_2; \\ \overset{4}{p}_0, & \overset{4}{p}_1, & \overset{4}{p}_2; \\ \overset{5}{p}_0, & \overset{5}{p}_1, & \overset{5}{p}_2 \end{array}$$

bezeichnet werden mögen, haben, und uns die Aufgabe stellen, durc

Dreieck $\overset{3}{A}\overset{4}{A}\overset{5}{A}$ als Fundamentaldreieck des Coordi-
nen, so dass dessen Seiten in der Ordnung

$$\overset{3}{A}\overset{4}{A}, \quad \overset{4}{A}\overset{5}{A}, \quad \overset{5}{A}\overset{3}{A}$$

Axe (m. s. die Abhandlung Thl. XXXVIII.
den; dann sind die Coordinaten der Punkte

$$\overset{3}{A}, \quad \overset{4}{A}, \quad \overset{5}{A}$$

ngsweise:

$$0, \quad \overset{3}{p_1}, \quad 0;$$

$$0, \quad 0, \quad \overset{4}{p_2};$$

$$\overset{5}{p_0}, \quad 0, \quad 0;$$

Obigen

$$), \quad \overset{3}{p_2} = 0; \quad \overset{4}{p_0} = 0, \quad \overset{4}{p_1} = 0; \quad \overset{5}{p_1} = 0, \quad \overset{5}{p_2} = 0$$

h die fünf obigen Gleichungen zur Bestimmung der Con-
Form:

$$\overset{1}{p_1} + B\overset{1}{p_1}\overset{1}{p_2} + C\overset{1}{p_2}\overset{1}{p_0} + A_1\overset{1}{p_0}^2 + B_1\overset{1}{p_1}^2 + C_1\overset{1}{p_2}^2 = 0,$$

$$\overset{2}{p_1} + B\overset{2}{p_1}\overset{2}{p_2} + C\overset{2}{p_2}\overset{2}{p_0} + A_1\overset{2}{p_0}^2 + B_1\overset{2}{p_1}^2 + C_1\overset{2}{p_2}^2 = 0,$$

$$B_1\overset{3}{p_1}^2 = 0, \quad C_1\overset{4}{p_2}^2 = 0, \quad A_1\overset{5}{p_0}^2 = 0$$

und da nun aus den drei letzten Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0$$

eiben uns zur Bestimmung der Constanten A, B, C nur
ei Gleichungen:

$$A\overset{1}{p_0}\overset{1}{p_1} + B\overset{1}{p_1}\overset{1}{p_2} + C\overset{1}{p_2}\overset{1}{p_0} = 0,$$

$$A\overset{2}{p_0}\overset{2}{p_1} + B\overset{2}{p_1}\overset{2}{p_2} + C\overset{2}{p_2}\overset{2}{p_0} = 0;$$

ichung des zu bestimmenden Kegelschnitts nimmt die Form:

$$Ap_0p_1 + Bp_1p_2 + Cp_2p_0 = 0$$

nan aus den zwei Gleichungen:

diese fünf Punkte einen Kegelschnitt zu beschreiben; so haben wir, indem wir jetzt die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, was des Folgenden wegen vortheilhaft ist, durch

$$Ap_0p_1+Bp_1p_2+Cp_2p_0+A_1p_0^2+B_1p_1^2+C_1p_2^2=0$$

bezeichnen, zur Bestimmung der Constanten

$$A,\quad B,\quad C;\qquad A_1,\quad B_1,\quad C_1$$

die fünf folgenden Gleichungen:

$$\overset{1}{A}\overset{1}{p_0}p_1+\overset{1}{B}p_1\overset{1}{p_2}+\overset{1}{C}\overset{1}{p_2}p_0+\overset{1}{A_1}p_0^2+\overset{1}{B_1}p_1^2+\overset{1}{C_1}p_2^2=0,$$

$$\overset{2}{A}\overset{2}{p_0}p_1+\overset{2}{B}p_1\overset{2}{p_2}+\overset{2}{C}\overset{2}{p_2}p_0+\overset{2}{A_1}p_0^2+\overset{2}{B_1}p_1^2+\overset{2}{C_1}p_2^2=0,$$

$$\overset{3}{A}\overset{3}{p_0}p_1+\overset{3}{B}p_1\overset{3}{p_2}+\overset{3}{C}\overset{3}{p_2}p_0+\overset{3}{A_1}p_0^2+\overset{3}{B_1}p_1^2+\overset{3}{C_1}p_2^2=0,$$

$$\overset{4}{A}\overset{4}{p_0}p_1+\overset{4}{B}p_1\overset{4}{p_2}+\overset{4}{C}\overset{4}{p_2}p_0+\overset{4}{A_1}p_0^2+\overset{4}{B_1}p_1^2+\overset{4}{C_1}p_2^2=0,$$

$$\overset{5}{A}\overset{5}{p_0}p_1+\overset{5}{B}p_1\overset{5}{p_2}+\overset{5}{C}\overset{5}{p_2}p_0+\overset{5}{A_1}p_0^2+\overset{5}{B_1}p_1^2+\overset{5}{C_1}p_2^2=0.$$

Ueberlegt man nun aber, dass es hier offenbar gar nicht auf die Bestimmung der wirklichen Werthe der Constanten

$$A,\quad B,\quad C;\qquad A_1,\quad B_1,\quad C_1$$

sondern offenbar bloss auf die Bestimmung der Verhältnisse dieser Constanten unter einander ankommt, indem man ja die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte sich durch jede beliebige der sechs Constanten dividirt denken kann; so ist klar, dass uns durch das Obige zwischen fünf unbekannten Grössen fünf Gleichungen des ersten Grades oder sogenannte lineare Gleichungen gegeben sind, mittelst welcher also die fünf unbekannten Grössen, und folglich auch die sechs Constanten, im Allgemeinen wenigstens, immer bestimmt werden können, was unmittelbar zu dem folgenden Satze führt:

Durch fünf Punkte lässt im Allgemeinen sich immer ein Kegelschnitt beschreiben, oder fünf Punkte liegen im Allgemeinen immer in einem Kegelschnitte; auch ist dieser Kegelschnitt im Allgemeinen durch die fünf gegebenen Punkte immer vollständig bestimmt, so dass sich also durch fünf gegebene Punkte im Allgemeinen immer nur ein Kegelschnitt beschreiben lässt.

Um nun die Gleichung dieses Kegelschnitts selbst zu finden, wollen wir, was offenbar verstattet ist und die Untersuchung ungemein

einfacht, das Dreieck $\overset{3}{A}\overset{4}{A}\overset{5}{A}$ als Fundamentaldreieck des Coordi-ensystems annehmen, so dass dessen Seiten in der Ordnung

$$\overset{3}{A}\overset{4}{A}, \quad \overset{4}{A}\overset{5}{A}, \quad \overset{5}{A}\overset{3}{A}$$

1ste, 2te, 3te Seite oder Axe (m. s. die Abhandlung Thl. XXXVIII. XXXVI.) betrachtet werden; dann sind die Coordinaten der Punkte

$$\overset{3}{A}, \quad \overset{4}{A}, \quad \overset{5}{A}$$

nbar beziehungsweise:

$$0, \quad \overset{3}{p_1}, \quad 0;$$

$$0, \quad 0, \quad \overset{4}{p_2};$$

$$\overset{5}{p_0}, \quad 0, \quad 0;$$

dass im Obigen

$$\overset{3}{p_0} = 0, \quad \overset{3}{p_2} = 0; \quad \overset{4}{p_0} = 0, \quad \overset{4}{p_1} = 0; \quad \overset{5}{p_1} = 0, \quad \overset{5}{p_2} = 0$$

; wodurch die fünf obigen Gleichungen zur Bestimmung der Con-nten die Form:

$$A\overset{1}{p_0}\overset{1}{p_1} + B\overset{1}{p_1}\overset{1}{p_2} + C\overset{1}{p_2}\overset{1}{p_0} + A_1\overset{1}{p_0}^2 + B_1\overset{1}{p_1}^2 + C_1\overset{1}{p_2}^2 = 0,$$

$$A\overset{2}{p_0}\overset{2}{p_1} + B\overset{2}{p_1}\overset{2}{p_2} + C\overset{2}{p_2}\overset{2}{p_0} + A_1\overset{2}{p_0}^2 + B_1\overset{2}{p_1}^2 + C_1\overset{2}{p_2}^2 = 0,$$

$$B_1\overset{3}{p_1}^2 = 0, \quad C_1\overset{4}{p_2}^2 = 0, \quad A_1\overset{5}{p_0}^2 = 0$$

nehmen; und da nun aus den drei letzten Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0$$

gt, so bleiben uns zur Bestimmung der Constanten A, B, C nur ch die zwei Gleichungen:

$$A\overset{1}{p_0}\overset{1}{p_1} + B\overset{1}{p_1}\overset{1}{p_2} + C\overset{1}{p_2}\overset{1}{p_0} = 0,$$

$$A\overset{2}{p_0}\overset{2}{p_1} + B\overset{2}{p_1}\overset{2}{p_2} + C\overset{2}{p_2}\overset{2}{p_0} = 0;$$

d die Gleichung des zu bestimmenden Kegelschnitts nimmt die Form:

$$Ap_0p_1 + Bp_1p_2 + Cp_2p_0 = 0$$

Wenn man aus den zwei Gleichungen:

$$A\overset{1\,1}{p_0p_1}+B\overset{1\,1}{p_1p_2}+C\overset{1\,1}{p_2p_0}=0,$$

$$A\overset{2\,2}{p_0p_1}+B\overset{2\,2}{p_1p_2}+C\overset{2\,2}{p_2p_0}=0$$

nach und nach

$$B, \quad C, \quad A$$

eliminirt, so erhält man die drei Gleichungen:

$$A(\overset{1\,1}{p_0p_1}\cdot\overset{2\,2}{p_1p_2}-\overset{1\,1}{p_1p_2}\cdot\overset{2\,2}{p_0p_1})-C(\overset{1\,1}{p_1p_2}\cdot\overset{2\,2}{p_2p_0}-\overset{1\,1}{p_2p_0}\cdot\overset{2\,2}{p_1p_2})=0,$$

$$B(\overset{1\,1}{p_1p_2}\cdot\overset{2\,2}{p_2p_0}-\overset{1\,1}{p_2p_0}\cdot\overset{2\,2}{p_1p_2})-A(\overset{1\,1}{p_2p_0}\cdot\overset{2\,2}{p_0p_1}-\overset{1\,1}{p_0p_1}\cdot\overset{2\,2}{p_2p_0})=0,$$

$$C(\overset{1\,1}{p_2p_0}\cdot\overset{2\,2}{p_0p_1}-\overset{1\,1}{p_0p_1}\cdot\overset{2\,2}{p_2p_0})-B(\overset{1\,1}{p_0p_1}\cdot\overset{2\,2}{p_1p_2}-\overset{1\,1}{p_1p_2}\cdot\overset{2\,2}{p_0p_1})=0;$$

und kann also offenbar:

$$A=\overset{1\,1}{p_1p_2}\cdot\overset{2\,2}{p_2p_0}-\overset{1\,1}{p_2p_0}\cdot\overset{2\,2}{p_1p_2}=-\overset{1\,2}{p_2p_2}(\overset{1\,2}{p_0p_1}-\overset{1\,2}{p_1p_0}),$$

$$B=\overset{1\,1}{p_2p_0}\cdot\overset{2\,2}{p_0p_1}-\overset{1\,1}{p_0p_1}\cdot\overset{2\,2}{p_2p_0}=-\overset{1\,2}{p_0p_0}(\overset{1\,2}{p_1p_2}-\overset{1\,2}{p_2p_1}),$$

$$C=\overset{1\,1}{p_0p_1}\cdot\overset{2\,2}{p_1p_2}-\overset{1\,1}{p_1p_2}\cdot\overset{2\,2}{p_0p_1}=-\overset{1\,2}{p_1p_1}(\overset{1\,2}{p_2p_0}-\overset{1\,2}{p_0p_2})$$

oder auch:

$$A=\overset{1\,2}{p_2p_2}(\overset{1\,2}{p_0p_1}-\overset{1\,2}{p_1p_0}),$$

$$B=\overset{1\,2}{p_0p_0}(\overset{1\,2}{p_1p_2}-\overset{1\,2}{p_2p_1}),$$

$$C=\overset{1\,2}{p_1p_1}(\overset{1\,2}{p_2p_0}-\overset{1\,2}{p_0p_2})$$

setzen, wodurch man also für die gesuchte Gleichung des zu b stimmenden, durch die fünf gegebenen Punkte gehenden Kegelschnit die folgende erhält:

$$1)\ \ldots\ldots\ \left.\begin{aligned}&\overset{1\,2}{p_2p_2}(\overset{1\,2}{p_0p_1}-\overset{1\,2}{p_1p_0})\cdot p_0p_1\\+&\overset{1\,2}{p_0p_0}(\overset{1\,2}{p_1p_2}-\overset{1\,2}{p_2p_1})\cdot p_1p_2\\+&\overset{1\,2}{p_1p_1}(\overset{1\,2}{p_2p_0}-\overset{1\,2}{p_0p_2})\cdot p_2p_0\end{aligned}\right\}=0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit

$$\overset{1\,2}{p_0p_0}\cdot\overset{1\,2}{p_1p_1}\cdot\overset{1\,2}{p_2p_2},$$

wird dieselbe:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{p_1 p_0}-\frac{1}{p_0 p_1}\right)p_0 p_1 \\ &+\left(\frac{1}{p_2 p_1}-\frac{1}{p_1 p_2}\right)p_1 p_2 \\ &+\left(\frac{1}{p_0 p_2}-\frac{1}{p_2 p_0}\right)p_2 p_0 \end{aligned}\right\} = 0,$$

nd wenn man nun mit $p_0 p_1 p_2$ dividirt:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{p_1 p_0}-\frac{1}{p_0 p_1}\right)\frac{1}{p_2} \\ &+\left(\frac{1}{p_2 p_1}-\frac{1}{p_1 p_2}\right)\frac{1}{p_0} \\ &+\left(\frac{1}{p_0 p_2}-\frac{1}{p_2 p_0}\right)\frac{1}{p_1} \end{aligned}\right\} = 0,$$

ler:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{p_1 p_2}-\frac{1}{p_2 p_1}\right)\frac{1}{p_0} \\ &+\left(\frac{1}{p_2 p_0}-\frac{1}{p_0 p_2}\right)\frac{1}{p_1} \\ &+\left(\frac{1}{p_0 p_1}-\frac{1}{p_1 p_0}\right)\frac{1}{p_2} \end{aligned}\right\} = 1.$$

Zwischen p_0, p_1, p_2 findet bekanntlich immer die Gleichung

$$p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J$$

tatt.

§. 2.

Wenn nun sechs Punkte in einem Kegelschnitte liegen sollen, der wenn sich durch sechs Punkte ein Kegelschnitt soll beschreiben assen, so müssen diese sechs Punkte, weil durch fünf Punkte nach em Vorhergehenden sich nur ein bestimmter Kegelschnitt beschreiben asst, offenbar einer gewissen Bedingung genügen, welche wir jetzt ufsuchen wollen.

Die sechs Punkte bezeichnen wir durch

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

und ihre Coordinaten beziehungsweise durch:

$$\begin{array}{lll} \overset{1}{p}_0, & \overset{1}{p}_1, & \overset{1}{p}_2; \\ \overset{2}{p}_0, & \overset{2}{p}_1, & \overset{2}{p}_2; \\ \overset{3}{p}_0, & \overset{3}{p}_1, & \overset{3}{p}_2; \\ \overset{4}{p}_0, & \overset{4}{p}_1, & \overset{4}{p}_2; \\ \overset{5}{p}_0, & \overset{5}{p}_1, & \overset{5}{p}_2 \\ \overset{6}{p}_0, & \overset{6}{p}_1, & \overset{6}{p}_2. \end{array}$$

Nehmen wir aber das Dreieck $\overset{4\,5\,6}{A\,A\,A}$ als das Fundamentaldreieck des Coordinatensystems an, und betrachten dessen Seiten

$$\overset{4\,5}{A\,A},\quad \overset{5\,6}{A\,A},\quad \overset{6\,4}{A\,A}$$

in dieser Folge als 1ste, 2te, 3te Seite desselben; so ist:

$$\overset{4}{p}_0 = 0,\ \overset{4}{p}_2 = 0;\qquad \overset{5}{p}_0 = 0,\ \overset{5}{p}_1 = 0;\qquad \overset{6}{p}_1 = 0,\ \overset{6}{p}_2 = 0.$$

Sollen nun die sechs Punkte in einem Kegelschnitte liegen, dessen allgemeine Gleichung wir wie vorher durch

$$Ap_0p_1 + Bp_1p_2 + Cp_2p_0 + A_1p_0^2 + B_1p_1^2 + C_1p_2^2 = 0$$

bezeichnen wollen, so müssen die Constanten A, B, C; A_1, B_1 sich so bestimmen lassen, dass den sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} &A\overset{1\,1}{p_0p_1} + B\overset{1\,1}{p_1p_2} + C\overset{1\,1}{p_2p_0} + A_1\overset{1}{p_0}^2 + B_1\overset{1}{p_1}^2 + C_1\overset{1}{p_2}^2 = 0, \\ &A\overset{2\,2}{p_0p_1} + B\overset{2\,2}{p_1p_2} + C\overset{2\,2}{p_2p_0} + A_1\overset{2}{p_0}^2 + B_1\overset{2}{p_1}^2 + C_1\overset{2}{p_2}^2 = 0, \\ &A\overset{3\,3}{p_0p_1} + B\overset{3\,3}{p_1p_2} + C\overset{3\,3}{p_2p_0} + A_1\overset{3}{p_0}^2 + B_1\overset{3}{p_1}^2 + C_1\overset{3}{p_2}^2 = 0, \\ &A\overset{4\,4}{p_0p_1} + B\overset{4\,4}{p_1p_2} + C\overset{4\,4}{p_2p_0} + A_1\overset{4}{p_0}^2 + B_1\overset{4}{p_1}^2 + C_1\overset{4}{p_2}^2 = 0, \\ &A\overset{5\,5}{p_0p_1} + B\overset{5\,5}{p_1p_2} + C\overset{5\,5}{p_2p_0} + A_1\overset{5}{p_0}^2 + B_1\overset{5}{p_1}^2 + C_1\overset{5}{p_2}^2 = 0. \\ &A\overset{6\,6}{p_0p_1} + B\overset{6\,6}{p_1p_2} + C\overset{6\,6}{p_2p_0} + A_1\overset{6}{p_0}^2 + B_1\overset{6}{p_1}^2 + C_1\overset{6}{p_2}^2 = 0 \end{aligned}$$

ird. Wegen der obigen Annahme des Fundamentaldreiecks linatensystems gehen aber die drei letzten Gleichungen beeise in

$$B_1 \overset{4}{p_1}^2 = 0, \qquad C_1 \overset{5}{p_2}^2 = 0, \qquad A_1 \overset{6}{p_0}^2 = 0$$

liefern also:

$$A_1 = 0, \qquad B_1 = 0, \qquad C_1 = 0;$$

nn weiter darauf ankommt, dass A, B, C sich so bestimmen ss die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\overset{1\,1}{p_0 p_1} + B\overset{1\,1}{p_1 p_2} + C\overset{1\,1}{p_2 p_0} &= 0, \\ A\overset{2\,2}{p_0 p_1} + B\overset{2\,2}{p_1 p_2} + C\overset{2\,2}{p_2 p_0} &= 0, \\ A\overset{3\,3}{p_0 p_1} + B\overset{3\,3}{p_1 p_2} + C\overset{3\,3}{p_2 p_0} &= 0 \end{aligned}$$

erden, und man also die gesuchte Bedingungsgleichung enn man aus diesen drei Gleichungen die Grössen A, B, C nur ihre Verhältnisse) vollständig eliminirt.

em Ende multiplicire man diese drei Gleichungen nach der

$$\begin{aligned} &\overset{2\,2}{p_1 p_2} \cdot \overset{3\,3}{p_2 p_0} - \overset{2\,2}{p_2 p_0} \cdot \overset{3\,3}{p_1 p_2}, \\ &\overset{3\,3}{p_1 p_2} \cdot \overset{1\,1}{p_2 p_0} - \overset{3\,3}{p_2 p_0} \cdot \overset{1\,1}{p_1 p_2}, \\ &\overset{1\,1}{p_1 p_2} \cdot \overset{2\,2}{p_2 p_0} - \overset{1\,1}{p_2 p_0} \cdot \overset{2\,2}{p_1 p_2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{2\,2}{p_2 p_0} \cdot \overset{3\,3}{p_0 p_1} - \overset{2\,2}{p_0 p_1} \cdot \overset{3\,3}{p_2 p_0}, \\ &\overset{3\,3}{p_2 p_0} \cdot \overset{1\,1}{p_0 p_1} - \overset{3\,3}{p_0 p_1} \cdot \overset{1\,1}{p_2 p_0}, \\ &\overset{1\,1}{p_2 p_0} \cdot \overset{2\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,1}{p_0 p_1} \cdot \overset{2\,2}{p_2 p_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{2\,2}{p_0 p_1} \cdot \overset{3\,3}{p_1 p_2} - \overset{2\,2}{p_1 p_2} \cdot \overset{3\,3}{p_0 p_1}, \\ &\overset{3\,3}{p_0 p_1} \cdot \overset{1\,1}{p_1 p_2} - \overset{3\,3}{p_1 p_2} \cdot \overset{1\,1}{p_0 p_1}, \\ &\overset{1\,1}{p_0 p_1} \cdot \overset{2\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,1}{p_1 p_2} \cdot \overset{2\,2}{p_0 p_1}; \end{aligned}$$

so erhält man in allen Fällen die gesuchte Bedingungsgleichung:

5)

$$\left.\begin{array}{l} {}^{1\,1}_{p_0p_1}({}^{2\,2}_{p_1p_2}\cdot{}^{3\,3}_{p_2p_0} - {}^{2\,2}_{p_2p_0}\cdot{}^{3\,3}_{p_1p_2}) \\ +{}^{2\,2}_{p_0p_1}({}^{3\,3}_{p_1p_2}\cdot{}^{1\,1}_{p_2p_0} - {}^{3\,3}_{p_2p_0}\cdot{}^{1\,1}_{p_1p_2}) \\ +{}^{3\,3}_{p_0p_1}({}^{1\,1}_{p_1p_2}\cdot{}^{2\,2}_{p_2p_0} - {}^{1\,1}_{p_2p_0}\cdot{}^{2\,2}_{p_1p_2}) \end{array}\right\} = 0$$

oder:

6)

$$\left.\begin{array}{l} {}^{1\,1}_{p_0p_1}({}^{2\,2}_{p_1p_2}\cdot{}^{3\,3}_{p_2p_0} - {}^{2\,2}_{p_2p_0}\cdot{}^{3\,3}_{p_1p_2}) \\ +{}^{1\,1}_{p_1p_2}({}^{2\,2}_{p_2p_0}\cdot{}^{3\,3}_{p_0p_1} - {}^{2\,2}_{p_0p_1}\cdot{}^{3\,3}_{p_2p_0}) \\ +{}^{1\,1}_{p_2p_0}({}^{2\,2}_{p_0p_1}\cdot{}^{3\,3}_{p_1p_2} - {}^{2\,2}_{p_1p_2}\cdot{}^{3\,3}_{p_0p_1}) \end{array}\right\} = 0.$$

Man kann diese Gleichungen noch auf verschiedene andere ausdrücken. Dividirt man z. B. die Gleichung 5) durch

$${}^{1\,1}_{p_0p_1}\cdot{}^{2\,2}_{p_0p_1}\cdot{}^{3\,3}_{p_0p_1},$$

so wird dieselbe:

7)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{{}^{2}_{p_2}}{{}_{p_0}}\cdot\dfrac{{}^{3}_{p_2}}{{}_{p_1}} - \dfrac{{}^{2}_{p_2}}{{}_{p_1}}\cdot\dfrac{{}^{3}_{p_2}}{{}_{p_0}} \\ +\dfrac{{}^{3}_{p_2}}{{}_{p_0}}\cdot\dfrac{{}^{1}_{p_2}}{{}_{p_1}} - \dfrac{{}^{3}_{p_2}}{{}_{p_1}}\cdot\dfrac{{}^{1}_{p_2}}{{}_{p_0}} \\ +\dfrac{{}^{1}_{p_2}}{{}_{p_0}}\cdot\dfrac{{}^{2}_{p_2}}{{}_{p_1}} - \dfrac{{}^{1}_{p_2}}{{}_{p_1}}\cdot\dfrac{{}^{2}_{p_2}}{{}_{p_0}} \end{array}\right\} = 0,$$

oder:

8)

$$\frac{{}^{1}_{p_2}}{{}_{p_0}}\left(\frac{{}^{2}_{p_2}}{{}_{p_1}} - \frac{{}^{3}_{p_2}}{{}_{p_1}}\right) + \frac{{}^{2}_{p_2}}{{}_{p_0}}\left(\frac{{}^{3}_{p_2}}{{}_{p_1}} - \frac{{}^{1}_{p_2}}{{}_{p_1}}\right) + \frac{{}^{3}_{p_2}}{{}_{p_0}}\left(\frac{{}^{1}_{p}}{{}_{p_1}} - \frac{{}^{2}_{p_2}}{{}_{p_1}}\right) = 0.$$

Anmerkung.

on in der Abhandlung Thl. IX. Nr. XXVIII. (1847.) habe ich
:hung des durch fünf gegebene Punkte gehenden Kegelschnitts
Bedingungsgleichung, dass sechs Punkte in einem Kegel-
liegen, in Cartesischen Coordinaten gegeben. Zwar ist dort
r gegebenen Punkte als Anfang der Coordinaten angenommen
man übersieht aber sehr leicht, dass die Gleichungen durch
parallele Verschiebung des Coordinatensystems sich sogleich
;er Allgemeinheit erheben lassen.

II.

Das Theorem von Pascal.

§. 3.

Coordinaten der sechs beliebigen Punkte

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

e vorher beziehungsweise:

$$\begin{array}{lll} \overset{1}{p_0}, & \overset{1}{p_1}, & \overset{1}{p_2}; \\ \overset{2}{p_0}, & \overset{2}{p_1}, & \overset{2}{p_2}; \\ \overset{3}{p_0}, & \overset{3}{p_1}, & \overset{3}{p_2}; \\ \overset{4}{p_0}, & \overset{4}{p_1}, & \overset{4}{p_2}; \\ \overset{5}{p_0}, & \overset{5}{p_1}, & \overset{5}{p_2}; \\ \overset{6}{p_0}, & \overset{6}{p_1}, & \overset{6}{p_2}; \end{array}$$

nd nach Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. §. 6. die Gleichungen
en:

$$\overset{1\,2}{A}\overset{1\,2}{A},\quad \overset{2\,3}{A}\overset{2\,3}{A},\quad \overset{3\,4}{A}\overset{3\,4}{A},\quad \overset{4\,5}{A}\overset{4\,5}{A},\quad \overset{5\,6}{A}\overset{5\,6}{A},\quad \overset{6\,1}{A}\overset{6\,1}{A}$$

gsweise:

$$(\overset{1}{p_1}\overset{2}{p_2}-\overset{1}{p_2}\overset{2}{p_1})p_0+(\overset{1}{p_2}\overset{2}{p_0}-\overset{1}{p_0}\overset{2}{p_2})p_1+(\overset{1}{p_0}\overset{2}{p_1}-\overset{1}{p_1}\overset{2}{p_0})p_2=0,$$

$$(\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2}{p_2}\overset{3}{p_1})p_0+(\overset{2}{p_2}\overset{3}{p_0}-\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_2})p_1+(\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_0})p_2=0,$$

$$(\overset{3}{p_1}\overset{4}{p_2}-\overset{3}{p_2}\overset{4}{p_1})p_0+(\overset{3}{p_2}\overset{4}{p_0}-\overset{3}{p_0}\overset{4}{p_2})p_1+(\overset{3}{p_0}\overset{4}{p_1}-\overset{3}{p_1}\overset{4}{p_0})p_2=0,$$

$$(\overset{4}{p_1}\overset{5}{p_2}-\overset{4}{p_2}\overset{5}{p_1})p_0+(\overset{4}{p_2}\overset{5}{p_0}-\overset{4}{p_0}\overset{5}{p_2})p_1+(\overset{4}{p_0}\overset{5}{p_1}-\overset{4}{p_1}\overset{5}{p_0})p_2=0,$$

$$(\overset{5}{p_1}\overset{6}{p_2}-\overset{5}{p_2}\overset{6}{p_1})p_0+(\overset{5}{p_2}\overset{6}{p_0}-\overset{5}{p_0}\overset{6}{p_2})p_1+(\overset{5}{p_0}\overset{6}{p_1}-\overset{5}{p_1}\overset{6}{p_0})p_2=0,$$

$$(\overset{6}{p_1}\overset{1}{p_2}-\overset{6}{p_2}\overset{1}{p_1})p_0+(\overset{6}{p_2}\overset{1}{p_0}-\overset{6}{p_0}\overset{1}{p_2})p_1+(\overset{6}{p_0}\overset{1}{p_1}-\overset{6}{p_1}\overset{1}{p_0})p_2=0.$$

Nehmen wir aber das Dreieck $\overset{4}{A}\overset{5}{A}\overset{6}{A}$ als Fundamentaldreieck d Coordinatensystems an, so ist:

$$\overset{4}{p_0}=0,\quad \overset{4}{p_2}=0;\quad \overset{5}{p_0}=0,\quad \overset{5}{p_1}=0;\quad \overset{6}{p_1}=0,\quad \overset{6}{p_2}=0;$$

und die obigen Gleichungen werden also unter dieser Voraussetzun

$$(\overset{1}{p_1}\overset{2}{p_2}-\overset{1}{p_2}\overset{2}{p_1})p_0+(\overset{1}{p_2}\overset{2}{p_0}-\overset{1}{p_0}\overset{2}{p_2})p_1+(\overset{1}{p_0}\overset{2}{p_1}-\overset{1}{p_1}\overset{2}{p_0})p_2=0,$$

$$(\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2}{p_2}\overset{3}{p_1})p_0+(\overset{2}{p_2}\overset{3}{p_0}-\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_2})p_1+(\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_0})p_2=0,$$

$$\overset{3}{p_2}\overset{\cdot}{p_0}-\overset{3}{p_0}p_2=0,$$

$$p_0=0,$$

$$p_1=0,$$

$$\overset{1}{p_2}p_1-\overset{1}{p_1}p_2=0.$$

Die Gleichung der Linie $\overset{4}{A}\overset{1}{A}$, welche wir späterhin brauch werden, ist:

$$(\overset{4}{p_1}\overset{1}{p_2}-\overset{4}{p_2}\overset{1}{p_1})p_0+(\overset{4}{p_2}\overset{1}{p_0}-\overset{4}{p_0}\overset{1}{p_2})p_1+(\overset{4}{p_0}\overset{1}{p_1}-\overset{4}{p_1}\overset{1}{p_0})p_2=0,$$

also:

$$\overset{1}{p_2}p_0-\overset{1}{p_0}p_2=0.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten der Durchschnittspunk der Linien:

$$\overset{1}{A}\overset{2}{A},\ \overset{4}{A}\overset{5}{A};\qquad \overset{2}{A}\overset{3}{A},\ \overset{5}{A}\overset{6}{A};\qquad \overset{3}{A}\overset{4}{A},\ \overset{6}{A}\overset{1}{A};$$

welche beziehungsweise:

$$A', \quad A'', \quad A'''$$

en mögen, beziehungsweise durch

$$p_0', \ p_1', \ p_2'; \quad p_0'', \ p_1'', \ p_2''; \quad p_0''', \ p_1''', \ p_2'''$$

bestimmen dieselben nach Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. §. 10; so ten wir, mit Beibehaltung der dort gebrauchten Zeichen nach nach Folgendes.

Für den Punkt A′ ist:

$$= \overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1}, \qquad M = \overset{1\,2}{p_2 p_0} - \overset{1\,2}{p_0 p_2}, \qquad N = \overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0};$$

$$L' = 1, \qquad M' = 0, \qquad N' = 0;$$

$$LM' - ML' = -(\overset{1\,2}{p_2 p_0} - \overset{1\,2}{p_0 p_2}),$$

$$MN' - NM' = 0,$$

$$NL' - LN' = \overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0};$$

ch:

$$p_0' = 0,$$

$$p_1' = -\frac{(\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}) J}{(\overset{1\,2}{p_2 p_0} - \overset{1\,2}{p_0 p_2}) \sin w_{01} - (\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}) \sin w_{20}},$$

$$p_2' = \frac{(\overset{1\,2}{p_2 p_0} - \overset{1\,2}{p_0 p_2}) J}{(\overset{1\,2}{p_2 p_0} - \overset{1\,2}{p_0 p_2}) \sin w_{01} - (\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}) \sin w_{20}};$$

der Kürze wegen:

$$= 0, \qquad p_1' = -K'(\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}), \qquad p_2' = K'(\overset{1\,2}{p_2 p_0} - \overset{1\,2}{p_0 p_2}).$$

Für den Punkt A″ ist:

$$= \overset{2\,3}{p_1 p_2} - \overset{2\,3}{p_2 p_1}, \qquad M = \overset{2\,3}{p_2 p_0} - \overset{2\,3}{p_0 p_2}, \qquad N = \overset{2\,3}{p_0 p_1} - \overset{2\,3}{p_1 p_0};$$

$$L' = 0, \qquad M' = 1, \qquad N' = 0;$$

$$LM' - ML' = \overset{2\,3}{p_1 p_2} - \overset{2\,3}{p_2 p_1},$$

$$MN' - NM' = -(\overset{2\,3}{p_0 p_1} - \overset{2\,3}{p_1 p_0}),$$

$$NL' - LN' = 0;$$

folglich:

$$p_0'' = -\frac{(\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{2}{p_1}\overset{3}{p_0})J}{(\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_2} - \overset{2}{p_2}\overset{3}{p_1})\sin w_{01} - (\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{2}{p_1}\overset{3}{p_0})\sin w_{12}},$$

$$p_1'' = 0,$$

$$p_2'' = \frac{(\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_2} - \overset{2}{p_2}\overset{3}{p_1})J}{(\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_2} - \overset{2}{p_2}\overset{3}{p_1})\sin w_{01} - (\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{2}{p_1}\overset{3}{p_0})\sin w_{12}};$$

oder der Kürze wegen:

$$p_0'' = -K''(\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{2}{p_1}\overset{3}{p_0}), \quad p_1'' = 0, \quad p_2'' = K''(\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_2} - \overset{2}{p_2}\overset{3}{p_1}).$$

Für den Punkt A''' ist:

$$L = \overset{3}{p_2}, \qquad M = 0, \qquad N = -\overset{3}{p_0};$$

$$L' = 0, \qquad M' = \overset{1}{p_2}, \qquad N' = -\overset{1}{p_1};$$

also:

$$LM' - ML' = \overset{3}{p_2}\overset{1}{p_2},$$

$$MN' - NM' = \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2},$$

$$NL' - LN' = \overset{3}{p_2}\overset{1}{p_1};$$

folglich:

$$p_0''' = \frac{\overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2}J}{\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_2}\sin w_{01} + \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2}\sin w_{12} + \overset{3}{p_2}\overset{1}{p_1}\sin w_{20}},$$

$$p_1''' = \frac{\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_1}J}{\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_2}\sin w_{01} + \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2}\sin w_{12} + \overset{3}{p_2}\overset{1}{p_1}\sin w_{20}},$$

$$p_2''' = \frac{\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_2}J}{\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_2}\sin w_{01} + \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2}\sin w_{12} + \overset{3}{p_2}\overset{1}{p_1}\sin w_{20}};$$

oder der Kürze wegen:

$$p_0''' = K'''\overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2}, \qquad p_1''' = K'''\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_1}, \qquad p_2''' = K'''\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_2}.$$

Die nothwendige Bedingungsgleichung, dass die drei Durchschnittspunkte A', A'', A''' in einer geraden Linie liegen, ist nach Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. §. 14[a]:

$$p_0'(p_1''p_2'''-p_1'''p_2'')+p_0''(p_1'''p_2'-p_1'p_2''')+p_0'''(p_1'p_2''-p_1''p_2')=0,$$

also nach dem Obigen:

$$p_0''(p_1'''p_2'-p_1'p_2''')+p_0'''p_1'p_2''=0,$$

oder:

$$p_0''p_1'''p_2'-p_0''p_1'p_2'''+p_0'''p_1'p_2''=0,$$

oder:

$$p_2'p_0''p_1'''-p_1'p_0''p_2'''+p_1'p_2''p_0'''=0,$$

oder:

$$p_0'''p_1'p_2''+p_1'''p_0''p_2'-p_2'''p_0''p_1'=0;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\left.\begin{aligned} K'K''K'''.{}^{3\,1}_{p_0p_2}({}^{1\,2}_{p_0p_1}-{}^{1\,2}_{p_1p_0})({}^{2\,3}_{p_1p_2}-{}^{2\,3}_{p_2p_1}) \\ +K'K''K'''.{}^{3\,1}_{p_2p_1}({}^{2\,3}_{p_0p_1}-{}^{2\,3}_{p_1p_0})({}^{1\,2}_{p_2p_0}-{}^{1\,2}_{p_0p_2}) \\ +K'K''K'''.{}^{3\,1}_{p_2p_2}({}^{2\,3}_{p_0p_1}-{}^{2\,3}_{p_1p_0})({}^{1\,2}_{p_0p_1}-{}^{1\,2}_{p_1p_0}) \end{aligned}\right\}=0,$$

also:

$$\left.\begin{aligned} {}^{3\,1}_{p_0p_2}({}^{1\,2}_{p_0p_1}-{}^{1\,2}_{p_1p_0})({}^{2\,3}_{p_1p_2}-{}^{2\,3}_{p_2p_1}) \\ +{}^{3\,1}_{p_2p_1}({}^{2\,3}_{p_0p_1}-{}^{2\,3}_{p_1p_0})({}^{1\,2}_{p_2p_0}-{}^{1\,2}_{p_0p_2}) \\ +{}^{3\,1}_{p_2p_2}({}^{2\,3}_{p_0p_1}-{}^{2\,3}_{p_1p_0})({}^{1\,2}_{p_0p_1}-{}^{1\,2}_{p_1p_0}) \end{aligned}\right\}=0.$$

Entwickelt man aber diese Gleichung und hebt auf, was sich aufheben lässt, so erhält man als nothwendige Bedingungsgleichung, dass die drei Punkte A′, A″, A‴ in einer geraden Linie liegen, die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} {}^{1\,1}_{p_0p_1}({}^{2\,2}_{p_1p_2}\cdot{}^{3\,3}_{p_2p_0}-{}^{2\,2}_{p_2p_0}\cdot{}^{3\,3}_{p_1p_2}) \\ +{}^{1\,1}_{p_1p_2}({}^{2\,2}_{p_2p_0}\cdot{}^{3\,3}_{p_0p_1}-{}^{2\,2}_{p_0p_1}\cdot{}^{3\,3}_{p_2p_0}) \\ +{}^{1\,1}_{p_2p_0}({}^{2\,2}_{p_0p_1}\cdot{}^{3\,3}_{p_1p_2}-{}^{2\,2}_{p_1p_2}\cdot{}^{3\,3}_{p_0p_1}) \end{aligned}\right\}=0.$$

Diese Gleichung ist aber identisch mit der Gleichung, welche wir in §. 2. 6) als nothwendige Bedingungsgleichung, dass die sechs Punkte

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

in einem Kegelschnitte liegen, oder dass sich durch diese sechs Punkte

ein Kegelschnitt soll beschreiben lassen, gefunden haben. Dal haben wir don folgenden Satz:

Die **nothwendige** Bedingung, dass die sechs Punkte

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

in einem Kegelschnitte liegen, oder dass sich durch die sechs Punkte ein Kegelschnitt beschreiben lässt, ist, da die drei Durchschnittspunkte

$$A',\quad A'',\quad A'''$$

der Linien

$$\overset{1\,2}{AA},\ \overset{4\,5}{AA};\quad \overset{2\,3}{AA},\ \overset{5\,6}{AA};\quad \overset{3\,4}{AA},\ \overset{6\,1}{AA}$$

in einer geraden Linie liegen. Wenn also die sechs Punl

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

in einem Kegelschnitte liegen, so liegen die drei Durc schnittspunkte

$$A',\quad A'',\quad A'''$$

der Linien

$$\overset{1\,2}{AA},\ \overset{4\,5}{AA};\quad \overset{2\,3}{AA},\ \overset{5\,6}{AA};\quad \overset{3\,4}{AA},\ \overset{6\,1}{AA}$$

in einer geraden Linie; und wenn die drei Durchschnit punkte

$$A',\quad A'',\quad A'''$$

der Linien

$$\overset{1\,2}{AA},\ \overset{4\,5}{AA};\quad \overset{2\,3}{AA},\ \overset{5\,6}{AA};\quad \overset{3\,4}{AA},\ \overset{6\,1}{AA}$$

in einer geraden Linie liegen, so liegen die sechs Punl

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

in einem Kegelschnitte, oder durch dieselben lässt si ein Kegelschnitt beschreiben.

Dies ist der Satz von Pascal oder Pascal's sogenann Hexagrammum mysticum.

Die Gleichung der geraden Linie $A'A''A'''$, insofern diese existirt, ist:

$$(p_1'p_2''-p_2'p_1'')p_0+(p_2'p_0''-p_0'p_2'')p_1+(p_0'p_1''-p_1'p_0'')p_2$$

also nach dem Obigen:

$$p_1'p_2''.p_0+p_2'p_0''.p_1-p_1'p_0''.p_2=0,$$

folglich:

$$\left.\begin{aligned}&-K'(p_0^{1\,2}p_1-p_1^{1\,2}p_0).K''(p_1^{2\,3}p_2-p_2^{2\,3}p_1).p_0\\&-K'(p_2^{1\,2}p_0-p_0^{1\,2}p_2).K''(p_0^{2\,3}p_1-p_1^{2\,3}p_0).p_1\\&-K'(p_0^{1\,2}p_1-p_1^{1\,2}p_0).K''(p_0^{2\,3}p_1-p_1^{2\,3}p_0).p_2\end{aligned}\right\}=0$$

oder:

9)

$$\left.\begin{aligned}&(p_0^{1\,2}p_1-p_1^{1\,2}p_0)(p_1^{2\,3}p_2-p_2^{2\,3}p_1).p_0\\&+(p_2^{1\,2}p_0-p_0^{1\,2}p_2)(p_0^{2\,3}p_1-p_1^{2\,3}p_0).p_1\\&+(p_0^{1\,2}p_1-p_1^{1\,2}p_0)(p_0^{2\,3}p_1-p_1^{2\,3}p_0).p_2\end{aligned}\right\}=0,$$

oder:

10)

$$\frac{p_1^{2\,3}p_2-p_2^{2\,3}p_1}{p_0^{1\,2}p_1-p_1^{1\,2}p_0}.p_0+\frac{p_2^{1\,2}p_0-p_0^{1\,2}p_2}{p_0^{1\,2}p_1-p_1^{1\,2}p_0}.p_1+p_2=0,$$

oder:

11)

$$\begin{vmatrix}p_2^3-p_2^2 & p_2^1-p_2^2 & \\ p_2^1-p_2^3 & p_2^2-p_2^1 & p_0\\ p_1^2-p_1^3 & p_1^3-p_1^1 & \end{vmatrix}+\begin{vmatrix}p_2^3-p_2^2 & p_2^1-p_2^2 & \\ p_2^1-p_2^3 & p_2^2-p_2^1 & p_1\\ p_0^2-p_0^3 & p_0^3-p_0^1 & \end{vmatrix}+p_2=0,$$

oder:

12)

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{p_1^1}{p_0}-\frac{p_1^2}{p_0}\right)\left(\frac{p_2^2}{p_1}-\frac{p_2^3}{p_1}\right)p_0\\&+\left(\frac{p_2^1}{p_0}-\frac{p_2^2}{p_0}\right)\left(\frac{p_0^2}{p_1}-\frac{p_0^3}{p_1}\right)p_1\\&+\left(\frac{p_1^1}{p_0}-\frac{p_1^2}{p_0}\right)\left(\frac{p_0^2}{p_1}-\frac{p_0^3}{p_1}\right)p_2\end{aligned}\right\}=0.$$

Den geschlossenen Zug

$$\overset{1}{A}\overset{2}{A}\overset{3}{A}\overset{4}{A}\overset{5}{A}\overset{6}{A}\overset{1}{A}$$

nennt man im Allgemeinen ein Sechseck und

$$\overset{1}{A}\overset{2}{A},\quad \overset{4}{A}\overset{5}{A};\qquad \overset{2}{A}\overset{3}{A},\quad \overset{5}{A}\overset{6}{A};\qquad \overset{3}{A}\overset{4}{A},\quad \overset{6}{A}\overset{1}{A}$$

dessen gegenüberstehende Seiten.

III.

Involution von sechs in gerader Linie liegenden Punkten.

§. 4.

Es seien

$$A,\ A_1;\qquad A',\ A_1';\qquad A'',\ A_1''$$

sechs in gerader Linie liegende Punkte, von denen je zwei in den drei vorstehenden Paaren einander conjungirte Punkte genannt werden. Von diesen sechs Punkten sagt man, dass sie in Involution seien oder ein involutorisches System bilden, wenn sich in der geraden Linie, in welcher die sechs Punkte liegen, die wir der Kürze wegen die Axe der Involution oder des involutorischen Systems nennen wollen, ein Punkt M, den man den Mittelpunkt oder das Centrum der Involution oder des involutorischen Systems zu nennen pflegt, so bestimmen lässt, dass, wenn die gehörig als positiv oder negativ betrachteten Entfernungen der Punkte

$$A,\ A_1;\qquad A',\ A_1';\qquad A'',\ A_1''$$

von diesem Punkte M beziehungsweise durch

$$\xi,\ \xi_1;\qquad \xi',\ \xi_1';\qquad \xi'',\ \xi_1''$$

bezeichnet werden, die drei Producte

$$\xi\xi_1,\qquad \xi'\xi_1',\qquad \xi''\xi_1''$$

einander gleich sind, so dass die Gleichungen

$$\xi\xi_1 = \xi'\xi_1' = \xi''\xi_1''$$

Statt finden.

§. 5.

Indem wir nun die Bedingung aufsuchen wollen, welche die sechs enannten Punkte rücksichtlich ihrer gegenseitigen Lage in der Axe er Involution erfüllen müssen, wenn sie ein involutorisches System ilden sollen, nehmen wir in der Axe der Involution einen beliebigen, ber bestimmten Punkt O als Anfangspunkt an, und bezeichnen die atürlich — mit Rücksicht auf das Vorhergehende — gehörig als ositiv oder als negativ betrachteten und als gegeben anzusehenden ntfernungen der Punkte

$$A,\ A_1;\qquad A',\ A_1';\qquad A'',\ A_1''$$

on dem Anfangspunkte O beziehungsweise durch

$$x,\ x_1;\qquad x',\ x_1';\qquad x'',\ x_1'';$$

lie ebenfalls gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung les Mittelpunkts M der Involution von demselben Anfangspunkte O aber durch i.

Dann haben wir nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten die folgenden allgemein gültigen Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= i+\xi, & x_1 &= i+\xi_1;\\ x' &= i+\xi', & x_1' &= i+\xi_1';\\ x'' &= i+\xi'', & x_1'' &= i+\xi_1'';\end{aligned}$$

lso:

$$\begin{aligned} \xi &= x-i, & \xi_1 &= x_1-i;\\ \xi' &= x'-i, & \xi_1' &= x_1'-i;\\ \xi'' &= x''-i, & \xi_1'' &= x_1''-i;\end{aligned}$$

nd es muss also, wenn die sechs Punkte ein involutorisches System ilden sollen, nach dem vorhergehenden Paragraphen:

13)
$$(x-i)(x_1-i) = (x'-i)(x_1'-i) = (x''-i)(x_1''-i)$$

ein, woraus sich die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} xx_1-(x+x_1)i+ii &= x'x_1'-(x'+x_1')i+ii,\\ x'x_1'-(x'+x_1')i+ii &= x''x_1''-(x''+x_1'')i+ii,\\ x''x_1''-(x''+x_1'')i+ii &= xx_1-(x+x_1)i+ii;\end{aligned}$$

lso die drei Gleichungen:

$$14) \quad \left\{ \begin{array}{ll} xx_1 & -x'x_1' = (x+x_1-x'-x_1')i, \\ x'x_1' & -x''x_1'' = (x'+x_1'-x''-x_1'')i, \\ x''x_1'' & -xx_1 = (x''+x_1''-x-x_1)i; \end{array} \right.$$

folglich die drei Gleichungen:

$$(xx_1-x'x_1')(x'+x_1'-x''-x_1'') = (x'x_1'-x''x_1'')(x+x_1-x'-x_1'),$$

$$(x'x_1'-x''x_1'')(x''+x_1''-x-x_1) = (x''x_1''-xx_1)(x'+x_1'-x''x_1''),$$

$$(x''x_1''-xx_1)(x+x_1-x'-x_1') = (xx_1-x'x_1')(x''+x_1''-xx_1)$$

ergeben. Aus diesen drei Gleichungen erhält man aber als einzige Bedingungsgleichung der Involution die Gleichung:

$$15) \quad \left. \begin{array}{l} xx_1(x'+x_1'-x''-x_1'') \\ +x'x_1'(x''+x_1''-x-x_1) \\ +x''x_1''(x+x_1-x'-x_1') \end{array} \right\} = 0;$$

und unter der Voraussetzung, dass diese Bedingungsgleichung erfüllt ist, ergeben sich aus 14) für die Grösse i, durch welche die Lage des Mittelpunkts der Involution in der Axe der Involution in Bezug auf den angenommenen Anfangspunkt O bestimmt wird, die folgenden Ausdrücke:

$$16) \quad i = \frac{xx_1-x'x_1'}{x+x_1-x'-x_1'} = \frac{x'x_1'-x''x_1''}{x'+x_1'-x''-x_1''} = \frac{x''x_1''-xx_1}{x''+x_1''-x-x_1}.$$

§. 6.

Wenn wir den Anfangspunkt O in einen der sechs gegebenen Punkte, etwa in den Punkt A, verlegen, also $x=0$ setzen, und die entsprechenden Werthe von

$$x_1; \quad x', \ x_1'; \quad x'', \ x_1''$$

beziehungsweise durch

$$u_1; \quad u', \ u_1'; \quad u'', \ u_1''$$

bezeichnen, so wird die Bedingungsgleichung 15):

) . . . $u'u_1'(u''+u_1''-u_1)+u''u_1''(u_1-u'-u_1')=0,$

ler:

) . . . $u'u_1'(u''+u_1''-u_1)-u''u_1''(u'+u_1'-u_1)=0,$

ler:

) . . . . $u'u_1'(u''+u_1''-u_1)=u''u_1''(u'+u_1'-u_1).$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} x_1 &= x+u_1; & \text{also:} \quad u_1 &= x_1-x;\\ x' &= x+u', & u' &= x'-x,\\ x_1' &= x+u_1'; & u_1' &= x_1'-x;\\ x'' &= x+u'', & u'' &= x''-x,\\ x_1'' &= x+u_1''; & u_1'' &= x_1''-x; \end{aligned}$$

nd die Gleichung 17) wird also:

20)

$$\left.\begin{aligned}&(x'-x)(x_1'-x)\{(x''-x)+(x_1''-x)-(x_1-x)\}\\ &+(x''-x)(x_1''-x)\{(x_1-x)-(x'-x)-(x_1'-x)\}\end{aligned}\right\}=0,$$

ler:

21)

$$\left.\begin{aligned}&(x'-x)(x_1'-x)\{(x''-x)+(x_1''-x_1)\}\\ &+(x''-x)(x_1''-x)\{(x_1-x')-(x_1'-x)\}\end{aligned}\right\}=0.$$

ler:

22)

$$\left.\begin{aligned}&(x'-x)(x_1'-x)\{(x''-x_1)+(x_1''-x)\}\\ &+(x''-x)(x_1''-x)\{(x_1-x_1')-(x'-x)\}\end{aligned}\right\}=0,$$

der:

23)

$$\left.\begin{aligned}&(x''-x)\{(x'-x)(x_1'-x)+(x_1''-x)(x_1-x')\}\\ &+(x_1'-x)\{(x'-x)(x_1''-x_1)-(x''-x)(x_1''-x)\}\end{aligned}\right\}=0,$$

der:

24)

$$\left.\begin{aligned}&(x_1''-x)\{(x'-x)(x_1'-x)+(x''-x)(x_1-x_1')\}\\ &+(x'-x)\{(x_1'-x)(x''-x_1)-(x''-x)(x_1''-x)\}\end{aligned}\right\}=0.$$

Wenn man auf der linken Seite der Gleichung 17) die Grösse $'u_1u_1''$ addirt und subtrahirt, so wird dieselbe:

$$\left.\begin{aligned} &-u'(u''u_1''-u_1u_1''-u''u_1'+u_1u_1') \\ &+u_1''(u'u_1'+u''u_1-u_1'u''-u'u_1) \end{aligned}\right\} = 0,$$

also:

$$\left.\begin{aligned} &-u'\{u''(u_1''-u_1')-u_1(u_1''-u_1')\} \\ &+u_1''\{u'(u_1'-u_1)-u''(u_1'-u_1)\} \end{aligned}\right\} = 0;$$

also:

25) . . . $u'(u''-u_1)(u_1''-u_1') = u_1''(u'-u'')(u_1'-u_1).$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} u' &= x'-x, & u''-u_1 &= (x''-x)-(x_1-x) = x''-x_1, \\ & & u_1''-u_1' &= (x_1''-x)-(x_1'-x) = x_1''-x_1'; \\ u_1'' &= x_1''-x, & u'-u'' &= (x'-x)-(x''-x) = x'-x'', \\ & & u_1'-u_1 &= (x_1'-x)-(x_1-x) = x_1'-x_1; \end{aligned}$$

also wird die Bedingungsgleichung:

26)

$$(x'-x)(x''-x_1)(x_1''-x_1') = (x_1''-x)(x'-x'')(x_1'-x_1),$$

oder:

27)

$$(x-x')(x_1-x'')(x_1''-x_1') = (x-x_1'')(x''-x')(x_1'-x_1).$$

Wenn man auf der linken Seite der Gleichung 17) die Grösse $u''u_1u_1'$ addirt und subtrahirt, so wird dieselbe:

$$\left.\begin{aligned} &u''(u'u_1'-u'u_1''-u_1u_1'+u_1u_1'') \\ &-u_1'(u''u_1''-u'u_1''+u'u_1-u''u_1) \end{aligned}\right\} = 0,$$

also:

$$\left.\begin{aligned} &u''\{u'(u_1'-u_1'')-u_1(u_1'-u_1'')\} \\ &-u_1'\{u_1''(u''-u')-u_1(u''-u')\} \end{aligned}\right\} = 0,$$

also:

28) . . . . $u''(u'-u_1)(u_1'-u_1'') = u_1'(u_1''-u_1)(u''-u').$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} u'' &= x''-x, & u'-u_1 &= (x'-x)-(x_1-x) = x'-x_1, \\ & & u_1'-u_1'' &= (x_1'-x)-(x_1''-x) = x_1'-x_1''; \\ u_1' &= x_1'-x, & u_1''-u_1 &= (x_1''-x)-(x_1-x) = x_1''-x_1, \\ & & u''-u' &= (x''-x)-(x'-x) = x''-x'; \end{aligned}$$

also:

29)
$$(x''-x)(x'-x_1)(x_1'-x_1'') = (x_1'-x)(x_1''-x_1)(x''-x')$$

ler:

30)
$$(x-x'')(x_1''-x_1')(x'-x_1) = (x-x_1')(x'-x'')(x_1''-x_1).$$

Aus den beiden Gleichungen:

$$u'(u''-u_1)(u_1''-u_1') = u_1''(u'-u'')(u_1'-u_1),$$
$$u''(u'-u_1)(u_1'-u_1'') = u_1'(u_1''-u_1)(u''-u')$$

olgt durch Division:

1) . . . . . $\dfrac{u'(u''-u_1)}{u''(u'-u_1)} = \dfrac{u_1''(u_1'-u_1)}{u_1'(u_1''-u_1)},$

so:

2) . . $u'u_1'(u''-u_1)(u_1''-u_1) = u''u_1''(u'-u_1)(u_1'-u_1)$;

ich ist:

3) . . . . . $\dfrac{(x'-x)(x''-x_1)}{(x''-x)(x'-x_1)} = \dfrac{(x_1''-x)(x_1'-x_1)}{(x_1'-x)(x_1''-x_1)}.$

Wenn man auf der linken Seite der Gleichung 17) die Grösse $u''u_1$ addirt und subtrahirt, so wird dieselbe:

$$\left.\begin{array}{l} -u'(u''u_1''-u''u_1-u_1'u_1''+u_1u_1') \\ +u''(u'u_1'-u'u_1-u_1'u_1''+u_1u_1'') \end{array}\right\} = 0,$$

lso:

$$\left.\begin{array}{l} -u'\{u''(u_1''-u_1)-u_1'(u_1''-u_1)\} \\ +u''\{u'(u_1'-u_1)-u_1''(u_1'-u_1)\} \end{array}\right\} = 0,$$

lso:

4) . . . $u'(u''-u_1')(u_1''-u_1) = u''(u'-u_1'')(u_1'-u_1).$

Nun ist aber:

$$u' = x'-x, \qquad u''-u_1' = (x''-x)-(x_1'-x) = x''-x_1',$$
$$u_1''-u_1 = (x_1''-x)-(x_1-x) = x_1''-x_1;$$
$$u'' = x''-x, \qquad u'-u_1'' = (x'-x)-(x_1''-x) = x'-x_1'',$$
$$u_1'-u_1 = (x_1'-x)-(x_1-x) = x_1'-x_1;$$

so:

35)
$$(x'-x)(x''-x_1')(x_1''-x_1) = (x''-x)(x'-x_1'')(x_1'-x_1),$$

oder:

36)
$$(x-x')(x_1'-x'')(x_1''-x_1) = (x-x'')(x_1''-x')(x_1'-x_1).$$

Wenn man auf der linken Seite der Gleichung 17) die Grö $u_1u_1'u_1''$ addirt und subtrahirt, so wird dieselbe:

$$\left.\begin{aligned} &u_1'(u'u''-u'u_1-u''u_1''+u_1''u_1)\\ &-u_1''(u_1u_1'-u'u_1'-u''u_1+u''u')\end{aligned}\right\} = 0,$$

also:

$$\left.\begin{aligned} &u_1'\{u'(u''-u_1)-u_1''(u''-u_1)\}\\ &-u_1''\{u_1'(u_1-u')-u''(u_1-u')\}\end{aligned}\right\} = 0,$$

also:

37) . . . . $u_1'(u'-u_1'')(u''-u_1) = u_1''(u_1'-u'')(u_1-u').$

Nun ist aber:

$$u_1' = x_1'-x, \qquad u'-u_1'' = (x'-x)-(x_1''-x) = x'-x_1'',$$
$$u''-u_1 = (x''-x)-(x_1-x) = x''-x_1;$$
$$u_1'' = x_1''-x, \qquad u_1'-u'' = (x_1'-x)-(x''-x) = x_1'-x'',$$
$$u_1-u' = (x_1-x)-(x'-x) = x_1-x';$$

also:

38)
$$(x_1'-x)(x'-x_1'')(x''-x_1) = (x_1''-x)(x_1'-x'')(x_1-x'),$$

oder:

39)
$$(x-x_1')(x'-x_1'')(x''-x_1) = -(x_1-x')(x_1'-x'')(x_1''-x).$$

Wenn man die beiden Gleichungen

$$u'(u''-u_1')(u_1''-u_1) = u''(u'-u_1'')(u_1'-u_1),$$
$$u_1''(u_1'-u'')(u_1-u') = u_1'(u'-u_1'')(u''-u_1)$$

durch einander dividirt, so erhält man die Gleichung:

40) . . . . . $\dfrac{u'(u_1''-u_1)}{u_1''(u_1-u')} = -\dfrac{u''(u_1'-u_1)}{u_1'(u''-u_1)}.$

also:

41) . . . $u'u_1'(u''-u_1)(u_1''-u_1) = u''u_1''(u'-u_1)(u_1'-u_1),$

ganz wie in 32).

Man kann alle diese Gleichungen auf noch andere Arten ausdrücken, was wir nur durch das Folgende erläutern wollen.

Nach 39) ist:

$$(x-x_1')(x'-x_1'')(x''-x_1) = -(x_1-x')(x_1'-x'')(x_1''-x),$$

so:

$$\frac{(x-x_1')(x'-x_1'')(x''-x_1)}{xx_1x'x_1'x''x_1''} = -\frac{(x_1-x')(x_1'-x'')(x_1''-x)}{xx_1x'x_1'x''x_1''},$$

ler:

$$\frac{x-x_1'}{xx_1'}\cdot\frac{x'-x_1''}{x'x_1''}\cdot\frac{x''-x_1}{x''x_1} = -\frac{x_1-x'}{x_1x'}\cdot\frac{x_1'-x''}{x_1'x''}\cdot\frac{x_1''-x}{x_1''x},$$

so:

42)

$$\left(\frac{1}{x_1'}-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x_1''}-\frac{1}{x'}\right)\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x''}\right) = -\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x''}-\frac{1}{x_1'}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_1''}\right)$$

er:

43)

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_1'}\right)\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x_1''}\right)\left(\frac{1}{x''}-\frac{1}{x_1}\right) = -\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x'}\right)\left(\frac{1}{x_1'}-\frac{1}{x''}\right)\left(\frac{1}{x_1''}-\frac{1}{x}\right).$$

Für $x=0$ ist nach 39):

$$x_1'(x'-x_1'')(x''-x_1) = x_1''(x_1-x')(x_1'-x''),$$

so:

$$\frac{x_1'(x'-x_1'')(x''-x_1)}{x_1x'x_1'x''x_1''} = \frac{x_1''(x_1-x')(x_1'-x'')}{x_1x'x_1'x''x_1''}$$

ler:

$$\frac{x_1'}{x_1'}\cdot\frac{x'-x_1''}{x'x_1''}\cdot\frac{x''-x_1}{x''x_1} = \frac{x_1''}{x_1''}\cdot\frac{x_1-x'}{x_1x'}\cdot\frac{x_1'-x''}{x_1'x''},$$

so:

l) . . . . $\left(\frac{1}{x_1''}-\frac{1}{x'}\right)\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x''}\right) = \left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x''}-\frac{1}{x_1'}\right),$

ler:

) . . . $\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x_1''}\right)\left(\frac{1}{x''}-\frac{1}{x_1}\right) = -\left(\frac{1}{x'}-\frac{1}{x_1}\right)\left(\frac{1}{x_1'}-\frac{1}{x''}\right).$

IV.

Das Theorem von Desargues.

§. 7.

Es seien wieder

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

sechs Punkte, für welche wir das Coordinatensystem wie früh
§. 3. annehmen, — so dass also $\overset{4}{A}\overset{5}{A}\overset{6}{A}$ das Fundamentaldreieck i
und auch ihre Coordinaten in gleicher Weise bezeichnen. Den
die vier ersten Punkte

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A}$$

gehenden Zug nennen wir im Allgemeinen ein Viereck, un
Linien

$$\overset{1}{A}\overset{2}{A},\ \overset{2}{A}\overset{3}{A},\ \overset{3}{A}\overset{4}{A},\ \overset{4}{A}\overset{1}{A}$$

dessen Seiten; die zwei letzten Punkte

$$\overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

bestimmen eine gerade Linie, welche die gegenüberstehenden S

$$\overset{1}{A}\overset{2}{A},\ \overset{3}{A}\overset{4}{A}$$

des in Rede stehenden Vierecks beziehungsweise in den Pu
B, B_1; die gegenüberstehenden Seiten

$$\overset{4}{A}\overset{1}{A},\ \overset{2}{A}\overset{3}{A}$$

beziehungsweise in den Punkten C, C_1 schneiden mag; die I
$\overset{5}{A}$, $\overset{6}{A}$ wollen wir auch beziehungsweise durch A, A_1 bezeichne
dass also

$$A = \overset{5}{A},\qquad A_1 = \overset{6}{A}$$

ist.

In der durch die Punkte $\overset{5}{A}$, $\overset{6}{A}$ oder A, A_1 bestimmten g
Linie liegen also sechs Punkte

$$A,\ A_1;\qquad B,\ B_1,\qquad C,\ C_1;$$

ad wir wollen nun die Bedingung aufsuchen, welche erfüllt sein uss, wenn diese sechs Punkte ein involutorisches System bilden llen.

Die Coordinaten der Punkte A und A_1 sind beziehungsweise

$$0,\quad 0,\quad \overset{5}{p_2} \qquad \text{und} \qquad \overset{6}{p_0},\quad 0,\quad 0.$$

Nach §. 3. ist für die Linien

$$\overset{1\,2}{AA}, \qquad \overset{5\,6}{AA}$$

ziehungsweise:

$$L = \overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1}. \qquad M = \overset{1\,2}{p_2 p_0} - \overset{1\,2}{p_0 p_2}, \qquad N = \overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0};$$

$$L' = 0, \qquad M' = 1, \qquad N' = 0;$$

so:

$$LM' - ML' = \overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1},$$

$$MN' - NM' = -(\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}),$$

$$NL' - LN' = 0.$$

Folglich sind die Coordinaten des Punktes B:

$$-\frac{(\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}) J}{(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1}) \sin w_{01} - (\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}) \sin w_{12}},$$

$$0,$$

$$\frac{(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1}) J}{(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1}) \sin w_{01} - (\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}) \sin w_{12}};$$

eil nun aber

$$(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1}) \sin w_{01} - (\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}) \sin w_{12}$$

$$= \overset{1}{p_1}(\overset{2}{p_0} \sin w_{12} + \overset{2}{p_2} \sin w_{01}) - \overset{2}{p_1}(\overset{1}{p_0} \sin w_{12} + \overset{1}{p_2} \sin w_{01})$$

$$= \overset{1}{p_1}(J - \overset{2}{p_1} \sin w_{20}) - \overset{2}{p_1}(J - \overset{1}{p_1} \sin w_{20}) = (\overset{1}{p_1} - \overset{2}{p_1}) J$$

t, so sind die Coordinaten des Punktes B:

$$-\frac{\overset{1\,2}{p_0 p_1} - \overset{1\,2}{p_1 p_0}}{\overset{1}{p_1} - \overset{2}{p_1}}, \qquad 0, \qquad \frac{\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1}}{\overset{1}{p_1} - \overset{2}{p_1}}.$$

Für die Linien

$$\overset{3}{A}\overset{4}{A}, \qquad \overset{5}{A}\overset{6}{A}$$

ist:

$$L = \overset{3}{p}_2, \qquad M = 0, \qquad N = -\overset{3}{p}_0;$$

$$L' = 0, \qquad M' = 1, \qquad N' = 0;$$

also:

$$LM' - ML' = \overset{3}{p}_2,$$

$$MN' - NM' = \overset{3}{p}_0,$$

$$NL' - LN' = 0.$$

Folglich sind die Coordinaten von B_1:

$$\frac{\overset{3}{p}_0 J}{\overset{3}{p}_2 \sin w_{01} + \overset{3}{p}_0 \sin w_{12}}, \qquad 0, \qquad \frac{\overset{3}{p}_2 J}{\overset{3}{p}_2 \sin w_{01} + \overset{3}{p}_0 \sin w_{12}};$$

oder:

$$\frac{\overset{3}{p}_0 J}{J - \overset{3}{p}_1 \sin w_{20}}, \qquad 0, \qquad \frac{\overset{3}{p}_2 J}{J - \overset{3}{p}_1 \sin w_{20}}.$$

Für die Linien

$$\overset{4}{A}\overset{1}{A}, \qquad \overset{5}{A}\overset{6}{A}$$

ist:

$$L = \overset{1}{p}_2, \qquad M = 0, \qquad N = -\overset{1}{p}_0;$$

$$L' = 0, \qquad M' = 1, \qquad N' = 0;$$

also:

$$LM' - ML' = \overset{1}{p}_2,$$

$$MN' - NM' = \overset{1}{p}_0,$$

$$NL' - LN' = 0.$$

Folglich sind die Coordinaten von C:

$$\frac{\overset{1}{p}_0 J}{\overset{1}{p}_2 \sin w_{01} + \overset{1}{p}_0 \sin w_{12}}, \qquad 0, \qquad \frac{\overset{1}{p}_2 J}{\overset{1}{p}_2 \sin w_{01} + \overset{1}{p}_0 \sin w_{12}};$$

oder:

$$\frac{\overset{1}{p_0}J}{J-\overset{1}{p_1}\sin w_{20}}, \qquad 0, \qquad \frac{\overset{1}{p_2}J}{J-\overset{1}{p_1}\sin w_{20}}.$$

Für die Linien

$$\overset{2\,3}{AA}, \qquad \overset{5\,6}{AA}$$

ist:

$$L=\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2\,3}{p_2}\overset{3}{p_1}, \qquad M=\overset{2\,3}{p_2}\overset{3}{p_0}-\overset{2\,3}{p_0}\overset{3}{p_2}, \qquad N=\overset{2\,3}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_0};$$

$$L'=0, \qquad M'=1, \qquad N'=0;$$

also:

$$LM'-ML'=\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2\,3}{p_2}\overset{3}{p_1},$$

$$MN'-NM'=-(\overset{2\,3}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_0}),$$

$$NL'-LN'=0.$$

Folglich sind die Coordinaten des Punktes C_1:

$$-\frac{(\overset{2\,3}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_0})J}{(\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2\,3}{p_2}\overset{3}{p_1})\sin w_{01}-(\overset{2\,3}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_0})\sin w_{12}},$$

$$0,$$

$$\frac{(\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2\,3}{p_2}\overset{3}{p_1})J}{(\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2\,3}{p_2}\overset{3}{p_1})\sin w_{01}-(\overset{2\,3}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_0})\sin w_{12}};$$

weil nun aber

$$\begin{aligned}&(\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2\,3}{p_2}\overset{3}{p_1})\sin w_{01}-(\overset{2\,3}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_0})\sin w_{12}\\ &=\overset{2}{p_1}(\overset{3}{p_2}\sin w_{01}+\overset{3}{p_0}\sin w_{12})-\overset{3}{p_1}(\overset{2}{p_2}\sin w_{01}+\overset{2}{p_0}\sin w_{12})\\ &=\overset{2}{p_1}(J-\overset{3}{p_1}\sin w_{20})-\overset{3}{p_1}(J-\overset{2}{p_1}\sin w_{20})=(\overset{2}{p_1}-\overset{3}{p_1})J\end{aligned}$$

ist, so sind die Coordinaten des Punktes C_1:

$$-\frac{\overset{2\,3}{p_0}\overset{3}{p_1}-\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_0}}{\overset{2}{p_1}-\overset{3}{p_2}}, \qquad 0, \qquad \frac{\overset{2\,3}{p_1}\overset{3}{p_2}-\overset{2\,3}{p_2}\overset{3}{p_1}}{\overset{2}{p_1}-\overset{3}{p_1}}.$$

Bezeichnen wir nun die ersten Coordinaten der Punkte

$$A, \ A_1; \qquad B, \ B_1; \qquad C, \ C_1;$$

nämlich ihre Coordinaten in Bezug auf die Seite $\overset{4}{A}\overset{5}{A}$ des Fundamentaldreiecks beziehungsweise durch:

$$\bar{\omega},\ \bar{\omega}_1;\qquad \bar{\omega}',\ \bar{\omega}_1';\qquad \bar{\omega}'',\ \bar{\omega}_1'';$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$\bar{\omega} = 0,$$

$$\bar{\omega}_1 = \overset{6}{p}_0;$$

$$\bar{\omega}' = -\frac{\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0}{p_1 - p_1},$$

$$\bar{\omega}_1' = \frac{\overset{3}{p}_0 J}{J - \overset{3}{p}_1 \sin w_{20}};$$

$$\bar{\omega}'' = \frac{\overset{1}{p}_0 J}{J - \overset{1}{p}_1 \sin w_{20}},$$

$$\bar{\omega}_1'' = -\frac{\overset{2}{p}_0\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_0}{p_1 - p_1}.$$

Wir haben nun aber die sechs folgenden Gleichungen:

$$\overset{1}{p}_0 \sin w_{12} + \overset{1}{p}_1 \sin w_{20} + \overset{1}{p}_2 \sin w_{01} = J,$$

$$\overset{2}{p}_0 \sin w_{12} + \overset{2}{p}_1 \sin w_{20} + \overset{2}{p}_2 \sin w_{01} = J,$$

$$\overset{3}{p}_0 \sin w_{12} + \overset{3}{p}_1 \sin w_{20} + \overset{3}{p}_2 \sin w_{01} = J,$$

$$\overset{4}{p}_0 \sin w_{12} + \overset{4}{p}_1 \sin w_{20} + \overset{4}{p}_2 \sin w_{01} = J,$$

$$\overset{5}{p}_0 \sin w_{12} + \overset{5}{p}_1 \sin w_{20} + \overset{5}{p}_2 \sin w_{01} = J,$$

$$\overset{6}{p}_0 \sin w_{12} + \overset{6}{p}_1 \sin w_{20} + \overset{6}{p}_2 \sin w_{01} = J.$$

Die drei letzten sind:

$$\overset{4}{p}_1 \sin w_{20} = J,\qquad \overset{5}{p}_2 \sin w_{01} = J,\qquad \overset{6}{p}_0 \sin w_{12} = J.$$

Aus den drei ersten erhält man leicht:

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{1\,2\,3}_{}p_0({}^{2\,3}_{}p_1{}^{2\,3}_{}p_2 - {}^{2\,3}_{}p_2{}^{2\,3}_{}p_1) \\ +{}^{2\,3\,1}_{}p_0({}^{3\,1}_{}p_1{}^{3\,1}_{}p_2 - {}^{3\,1}_{}p_2{}^{3\,1}_{}p_1) \\ +{}^{3\,1\,2}_{}p_0({}^{1\,2}_{}p_1{}^{1\,2}_{}p_2 - {}^{1\,2}_{}p_2{}^{1\,2}_{}p_1) \end{array}\right\} \sin w_{12}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} ({}^{2\,3}_{}p_1{}^{2\,3}_{}p_2 - {}^{2\,3}_{}p_2{}^{2\,3}_{}p_1) \\ +({}^{3\,1}_{}p_1{}^{3\,1}_{}p_2 - {}^{3\,1}_{}p_2{}^{3\,1}_{}p_1) \\ +({}^{1\,2}_{}p_1{}^{1\,2}_{}p_2 - {}^{1\,2}_{}p_2{}^{1\,2}_{}p_1) \end{array}\right\} J,$$

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{1\,2\,3}_{}p_1({}^{2\,3}_{}p_2{}^{2\,3}_{}p_0 - {}^{2\,3}_{}p_0{}^{2\,3}_{}p_2) \\ +{}^{2\,3\,1}_{}p_1({}^{3\,1}_{}p_2{}^{3\,1}_{}p_0 - {}^{3\,1}_{}p_0{}^{3\,1}_{}p_2) \\ +{}^{3\,1\,2}_{}p_1({}^{1\,2}_{}p_2{}^{1\,2}_{}p_0 - {}^{1\,2}_{}p_0{}^{1\,2}_{}p_2) \end{array}\right\} \sin w_{20}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} ({}^{2\,3}_{}p_2{}^{2\,3}_{}p_0 - {}^{2\,3}_{}p_0{}^{2\,3}_{}p_2) \\ +({}^{3\,1}_{}p_2{}^{3\,1}_{}p_0 - {}^{3\,1}_{}p_0{}^{3\,1}_{}p_2) \\ +({}^{1\,2}_{}p_2{}^{1\,2}_{}p_0 - {}^{1\,2}_{}p_0{}^{1\,2}_{}p_2) \end{array}\right\} J,$$

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{1\,2\,3}_{}p_2({}^{2\,3}_{}p_0{}^{2\,3}_{}p_1 - {}^{2\,3}_{}p_1{}^{2\,3}_{}p_0) \\ +{}^{2\,3\,1}_{}p_2({}^{3\,1}_{}p_0{}^{3\,1}_{}p_1 - {}^{3\,1}_{}p_1{}^{3\,1}_{}p_0) \\ +{}^{3\,1\,2}_{}p_2({}^{1\,2}_{}p_0{}^{1\,2}_{}p_1 - {}^{1\,2}_{}p_1{}^{1\,2}_{}p_0) \end{array}\right\} \sin w_{01}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} ({}^{2\,3}_{}p_0{}^{2\,3}_{}p_1 - {}^{2\,3}_{}p_1{}^{2\,3}_{}p_0) \\ +({}^{3\,1}_{}p_0{}^{3\,1}_{}p_1 - {}^{3\,1}_{}p_1{}^{3\,1}_{}p_0) \\ +({}^{1\,2}_{}p_0{}^{1\,2}_{}p_1 - {}^{1\,2}_{}p_1{}^{1\,2}_{}p_0) \end{array}\right\} J;$$

die Factoren von $\sin w_{01}$, $\sin w_{12}$, $\sin w_{20}$ sämmtlich einander gleich, nämlich die nachher in 46) durch Δ bezeichnete Grösse sind.

Aus diesen Gleichungen erhält man, wenn der Kürze wegen:

$$46)\ldots \Delta = \overset{1}{p_0}(\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_2} - \overset{2}{p_2}\overset{3}{p_1}) + \overset{2}{p_0}(\overset{3}{p_1}\overset{1}{p_2} - \overset{3}{p_2}\overset{1}{p_1}) + \overset{3}{p_0}(\overset{1}{p_1}\overset{2}{p_2} - \overset{1}{p_2}\overset{2}{p_1})$$
$$= \overset{1}{p_1}(\overset{2}{p_2}\overset{3}{p_0} - \overset{2}{p_0}\overset{3}{p_2}) + \overset{2}{p_1}(\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_0} - \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2}) + \overset{3}{p_1}(\overset{1}{p_2}\overset{2}{p_0} - \overset{1}{p_0}\overset{2}{p_2})$$
$$= \overset{1}{p_2}(\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{2}{p_1}\overset{3}{p_0}) + \overset{2}{p_2}(\overset{3}{p_0}\overset{1}{p_1} - \overset{3}{p_1}\overset{1}{p_0}) + \overset{3}{p_2}(\overset{1}{p_0}\overset{2}{p_1} - \overset{1}{p_1}\overset{2}{p_0})$$

gesetzt wird, leicht:

$$J - \overset{3}{p_1}\sin w_{20} = \frac{(\overset{1}{p_1} - \overset{3}{p_1})(\overset{2}{p_2}\overset{3}{p_0} - \overset{2}{p_0}\overset{3}{p_2}) + (\overset{2}{p_1} - \overset{3}{p_1})(\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_0} - \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2})}{\Delta},$$

$$J - \overset{1}{p_1}\sin w_{20} = \frac{(\overset{2}{p_1} - \overset{1}{p_1})(\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_0} - \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2}) + (\overset{3}{p_1} - \overset{1}{p_1})(\overset{1}{p_2}\overset{2}{p_0} - \overset{1}{p_0}\overset{2}{p_2})}{\Delta}.$$

Also ist nach dem Obigen:

47)

$$\bar{\omega} = 0,$$

$$\bar{\omega}_1 = \frac{\Delta}{(\overset{2}{p_1}\overset{3}{p_2} - \overset{2}{p_2}\overset{3}{p_1}) + (\overset{3}{p_1}\overset{1}{p_2} - \overset{3}{p_2}\overset{1}{p_1}) + (\overset{1}{p_1}\overset{2}{p_2} - \overset{1}{p_2}\overset{2}{p_1})};$$

$$\bar{\omega}' = -\frac{\overset{1}{p_0}\overset{2}{p_1} - \overset{1}{p_1}\overset{2}{p_0}}{\overset{1}{p_1} - \overset{2}{p_1}},$$

$$\bar{\omega}_1' = \frac{\overset{3}{p_0}\Delta}{(\overset{1}{p_1} - \overset{3}{p_1})(\overset{2}{p_2}\overset{3}{p_0} - \overset{2}{p_0}\overset{3}{p_2}) + (\overset{2}{p_1} - \overset{3}{p_1})(\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_0} - \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2})};$$

$$\bar{\omega}'' = \frac{\overset{1}{p_0}\Delta}{(\overset{2}{p_1} - \overset{1}{p_1})(\overset{3}{p_2}\overset{1}{p_0} - \overset{3}{p_0}\overset{1}{p_2}) + (\overset{3}{p_1} - \overset{1}{p_1})(\overset{1}{p_2}\overset{2}{p_0} - \overset{1}{p_0}\overset{2}{p_2})},$$

$$\bar{\omega}_1'' = -\frac{\overset{2}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{2}{p_1}\overset{3}{p_0}}{\overset{2}{p_1} - \overset{3}{p_1}};$$

folglich:

Ferner ist nach 48):

$$\overset{1}{p}_0 \frac{\Delta}{\overline{\omega}_1} - \frac{\overset{1}{p}_0 \Delta}{\overline{\omega}''}$$

$$= \overset{1}{p}_0\{(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1) + (\overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_1) + (\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)\}$$

$$- \{(\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1)(\overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0\overset{1}{p}_2) + (\overset{3}{p}_1 - \overset{1}{p}_1)(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_0 - \overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_2)\}$$

$$= -\overset{1}{p}_2\{(\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0) + (\overset{2}{p}_0\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_0) + (\overset{3}{p}_0\overset{1}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_0)\},$$

wie man leicht findet.

Weiter ist nach 48):

$$\frac{\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0}{\overline{\omega}'} \Delta - (\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0) \frac{\Delta}{\overline{\omega}_1}$$

$$= -(\overset{1}{p}_1 - \overset{2}{p}_1)\{\overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_1) + \overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)\}$$

$$- (\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0)\{(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1) + (\overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_1) + (\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{1}{p}_1)\}$$

$$= -\{\overset{1}{p}_0(\overset{1}{p}_1 - \overset{2}{p}_1) + (\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0)\}(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1)$$

$$- \{\overset{2}{p}_0(\overset{1}{p}_1 - \overset{2}{p}_1) + (\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0)\}(\overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_1)$$

$$- \{\overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_1 - \overset{2}{p}_1) + (\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0)\}(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)$$

$$= -\overset{1}{p}_1(\overset{1}{p}_0 - \overset{2}{p}_0)(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1)$$

$$- \overset{2}{p}_1(\overset{1}{p}_0 - \overset{2}{p}_0)(\overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_1)$$

$$- \overset{3}{p}_1(\overset{1}{p}_0 - \overset{2}{p}_0)(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)$$

$$+ \{\overset{3}{p}_1(\overset{1}{p}_0 - \overset{2}{p}_0) - \overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_1 - \overset{2}{p}_1) - (\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0)\}(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)$$

$$= -(\overset{1}{p}_0 - \overset{2}{p}_0)\{\overset{1}{p}_1(\overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1) + \overset{2}{p}_1(\overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_2 - \overset{3}{p}_2\overset{1}{p}_1) + \overset{3}{p}_1(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)\}$$

$$- (\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)\{(\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0) + (\overset{2}{p}_0\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_0) + (\overset{3}{p}_0\overset{1}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_0)\}$$

$$= -(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)\{(\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0) + (\overset{2}{p}_0\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_0) + (\overset{3}{p}_0\overset{1}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{1}{p}_0)\},$$

weil der erste Theil offenbar verschwindet.

ein involutorisches System bilden sollen, für $x = 0$ zwischen de Grössen x_1; x', x_1'; x'', x_1'' Statt finden müssen, müssen also nach II offenbar auch zwischen den Grössen $\bar{\omega}_1$; $\bar{\omega}'$, $\bar{\omega}_1'$; $\bar{\omega}''$, $\bar{\omega}_1''$ St finden, und werden aus jenen erhalten, wenn man für x über $\bar{\omega}$ setzt.

Mit Rücksicht hierauf wollen wir nun untersuchen, welche I dingung erfüllt sein muss, wenn die Punkte

$$A,\ A_1;\qquad B,\ B_1;\qquad C,\ C_1$$

ein involutorisches System bilden sollen.

Nach 44) ist

$$\left(\frac{1}{\bar{\omega}_1''} - \frac{1}{\bar{\omega}'}\right)\left(\frac{1}{\bar{\omega}_1} - \frac{1}{\bar{\omega}''}\right) = \left(\frac{1}{\bar{\omega}'} - \frac{1}{\bar{\omega}_1}\right)\left(\frac{1}{\bar{\omega}''} - \frac{1}{\bar{\omega}_1'}\right)$$

die nothwendige Bedingungsgleichung, dass die Punkte

$$A,\ A_1;\qquad B,\ B_1;\qquad C,\ C_1$$

ein involutorisches System bilden. Multipliciren wir diese Gleichung

$$p_0^{\,1}p_0^{\,3}(p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2})(p_0^{\,2}p_1^{\,3} - p_1^{\,2}p_0^{\,3})\Delta\Delta,$$

so wird dieselbe:

$$\left\{(p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2})\frac{p_0^{\,2}p_1^{\,3} - p_1^{\,2}p_0^{\,3}}{\bar{\omega}_1''} - (p_0^{\,2}p_1^{\,3} - p_1^{\,2}p_0^{\,3})\frac{p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2}}{\bar{\omega}'}\right.$$

$$\times \left\{p_0^{\,1}p_0^{\,3}\frac{\Delta}{\bar{\omega}_1} - p_0^{\,3}\frac{p_0^{\,1}\Delta}{\bar{\omega}''}\right\}\Delta$$

$$= (p_0^{\,2}p_1^{\,3} - p_1^{\,2}p_0^{\,3})\left\{\frac{p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2}}{\bar{\omega}'}\Delta - (p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2})\frac{\Delta}{\bar{\omega}_1}\right\}$$

$$\times \left\{p_0^{\,3}\frac{p_0^{\,1}\Delta}{\bar{\omega}''} - p_0^{\,1}\frac{p_0^{\,3}\Delta}{\bar{\omega}_1'}\right\}.$$

Nach dem Obigen in 48) ist:

$$(p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2})\frac{p_0^{\,2}p_1^{\,3} - p_1^{\,2}p_0^{\,3}}{\bar{\omega}_1''} - (p_0^{\,2}p_1^{\,3} - p_1^{\,2}p_0^{\,3})\frac{p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2}}{\bar{\omega}'}$$

$$= -(p_1^{\,2} - p_1^{\,3})(p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2}) + (p_1^{\,1} - p_1^{\,2})(p_0^{\,2}p_1^{\,3} - p_1^{\,2}p_0^{\,3})$$

$$= -p_1^{\,2}\{(p_0^{\,1}p_1^{\,2} - p_1^{\,1}p_0^{\,2}) + (p_0^{\,2}p_1^{\,3} - p_1^{\,2}p_0^{\,3}) + (p_0^{\,3}p_1^{\,1} - p_1^{\,3}p_0^{\,1})\},$$

wie man leicht findet.

Ferner ist nach 48):

$$
\begin{aligned}
&{}^{1}p_0\frac{\Delta}{\bar{\omega}_1}-\frac{{}^{1}p_0\Delta}{\bar{\omega}''}\\
&= {}^{1}p_0\{({}^{2}p_1{}^{3}p_2-{}^{2}p_2{}^{3}p_1)+({}^{3}p_1{}^{1}p_2-{}^{3}p_2{}^{1}p_1)+({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\}\\
&\quad-\{({}^{2}p_1-{}^{1}p_1)({}^{3}p_2{}^{1}p_0-{}^{3}p_0{}^{1}p_2)+({}^{3}p_1-{}^{1}p_1)({}^{1}p_2{}^{2}p_0-{}^{1}p_0{}^{2}p_2)\}\\
&= -{}^{1}p_2\{({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)+({}^{2}p_0{}^{3}p_1-{}^{2}p_1{}^{3}p_0)+({}^{3}p_0{}^{1}p_1-{}^{3}p_1{}^{1}p_0)\},
\end{aligned}
$$

wie man leicht findet.

Weiter ist nach 48):

$$
\begin{aligned}
&\frac{{}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0}{\bar{\omega}'}\Delta-({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)\frac{\Delta}{\bar{\omega}_1}\\
&= -({}^{1}p_1-{}^{2}p_1)\{{}^{1}p_0({}^{2}p_1{}^{3}p_2-{}^{2}p_2{}^{3}p_1)+{}^{2}p_0({}^{3}p_1{}^{1}p_2-{}^{3}p_2{}^{1}p_1)+{}^{3}p_0({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\}\\
&\quad-({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)\{({}^{2}p_1{}^{3}p_2-{}^{2}p_2{}^{3}p_1)+({}^{3}p_1{}^{1}p_2-{}^{3}p_2{}^{1}p_1)+({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\}\\
&= -\{{}^{1}p_0({}^{1}p_1-{}^{2}p_1)+({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)\}({}^{2}p_1{}^{3}p_2-{}^{2}p_2{}^{3}p_1)\\
&\quad-\{{}^{2}p_0({}^{1}p_1-{}^{2}p_1)+({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)\}({}^{3}p_1{}^{1}p_2-{}^{3}p_2{}^{1}p_1)\\
&\quad-\{{}^{3}p_0({}^{1}p_1-{}^{2}p_1)+({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)\}({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\\
&= -{}^{1}p_1({}^{1}p_0-{}^{2}p_0)({}^{2}p_1{}^{3}p_2-{}^{2}p_2{}^{3}p_1)\\
&\quad-{}^{2}p_1({}^{1}p_0-{}^{2}p_0)({}^{3}p_1{}^{1}p_2-{}^{3}p_2{}^{1}p_1)\\
&\quad-{}^{3}p_1({}^{1}p_0-{}^{2}p_0)({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\\
&\quad+\{{}^{3}p_1({}^{1}p_0-{}^{2}p_0)-{}^{3}p_0({}^{1}p_1-{}^{2}p_1)-({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)\}({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\\
&= -({}^{1}p_0-{}^{2}p_0)\{{}^{1}p_1({}^{2}p_1{}^{3}p_2-{}^{2}p_2{}^{3}p_1)+{}^{2}p_1({}^{3}p_1{}^{1}p_2-{}^{3}p_2{}^{1}p_1)+{}^{3}p_1({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\}\\
&\quad-({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\{({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)+({}^{2}p_0{}^{3}p_1-{}^{2}p_1{}^{3}p_0)+({}^{3}p_0{}^{1}p_1-{}^{3}p_1{}^{1}p_0)\}\\
&= -({}^{1}p_1{}^{2}p_2-{}^{1}p_2{}^{2}p_1)\{({}^{1}p_0{}^{2}p_1-{}^{1}p_1{}^{2}p_0)+({}^{2}p_0{}^{3}p_1-{}^{2}p_1{}^{3}p_0)+({}^{3}p_0{}^{1}p_1-{}^{3}p_1{}^{1}p_0)\},
\end{aligned}
$$

weil der erste Theil offenbar verschwindet.

Endlich ist nach 48):

$$\overset{3}{p}_0 \frac{\overset{1}{p}_0 \Delta}{\overline{\omega}''} - \overset{1}{p}_0 \frac{\overset{3}{p}_0 \Delta}{\overline{\omega}_1'}$$

$$= \overset{3}{p}_0 \{(\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1)(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2) + (\overset{3}{p}_1 - \overset{1}{p}_1)(\overset{1}{p}_2 \overset{2}{p}_0 - \overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_2)\}$$

$$- \overset{1}{p}_0 \{(\overset{1}{p}_1 - \overset{3}{p}_1)(\overset{2}{p}_2 \overset{3}{p}_0 - \overset{2}{p}_0 \overset{3}{p}_2) + (\overset{2}{p}_1 - \overset{3}{p}_1)(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2)\}$$

$$= (\overset{3}{p}_1 - \overset{1}{p}_1)\{\overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_2 \overset{2}{p}_0 - \overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_2) + \overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_2 \overset{3}{p}_0 - \overset{2}{p}_0 \overset{3}{p}_2)\}$$

$$+ \{\overset{3}{p}_0(\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1) - \overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_1 - \overset{3}{p}_1)\}(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2)$$

$$= (\overset{3}{p}_1 - \overset{1}{p}_1)\{\overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_2 \overset{3}{p}_0 - \overset{2}{p}_0 \overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2) + \overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_2 \overset{2}{p}_0 - \overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_2$$

$$+ \{\overset{3}{p}_0(\overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1) - \overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_1 - \overset{3}{p}_1) - \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_1 - \overset{1}{p}_1)\}(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2)$$

$$= (\overset{3}{p}_1 - \overset{1}{p}_1)\{\overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_2 \overset{3}{p}_0 - \overset{2}{p}_0 \overset{3}{p}_2) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2) + \overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_2 \overset{2}{p}_0 - \overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_2$$

$$- \{(\overset{1}{p}_0(\overset{2}{p}_1 - \overset{3}{p}_1) + \overset{2}{p}_0(\overset{3}{p}_1 - \overset{1}{p}_1) + \overset{3}{p}_0(\overset{1}{p}_1 - \overset{2}{p}_1)\}(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2)$$

$$= -(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2)\{(\overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1 \overset{2}{p}_0) + (\overset{2}{p}_0 \overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1 \overset{3}{p}_0) + (\overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_1 - \overset{3}{p}_1 \overset{1}{p}_0)$$

weil der erste Theil offenbar verschwindet.

Setzen wir nun der Kürze wegen:

49) . . $$G = (\overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1 \overset{2}{p}_0) + (\overset{2}{p}_0 \overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1 \overset{3}{p}_0) + (\overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_1 - \overset{3}{p}_1 \overset{1}{p}_0),$$

so ist:

$$(\overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1 \overset{2}{p}_0) \frac{\overset{2}{p}_0 \overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1 \overset{3}{p}_0}{\overline{\omega}_1''} - (\overset{2}{p}_0 \overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1 \overset{3}{p}_0) \frac{\overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1 \overset{2}{p}_0}{\overline{\omega}'} = -\overset{2}{p}_1 G$$

$$\overset{1}{p}_0 \frac{\Delta}{\overline{\omega}_1} - \frac{\overset{1}{p}_0 \Delta}{\overline{\omega}''} = -\overset{1}{p}_2 G,$$

$$\frac{\overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1 \overset{2}{p}_0}{\overline{\omega}'} \Delta - (\overset{1}{p}_0 \overset{2}{p}_1 - \overset{1}{p}_1 \overset{2}{p}_0) \frac{\Delta}{\overline{\omega}_1} = -(\overset{1}{p}_1 \overset{2}{p}_2 - \overset{1}{p}_2 \overset{2}{p}_1)\, G,$$

$$\overset{3}{p}_0 \frac{\overset{1}{p}_0 \Delta}{\overline{\omega}''} - \overset{1}{p}_0 \frac{\overset{3}{p}_0 \Delta}{\overline{\omega}_1'} = -(\overset{3}{p}_2 \overset{1}{p}_0 - \overset{3}{p}_0 \overset{1}{p}_2)\, G;$$

und die obige Bedingungsgleichung ist also:

$$\overset{3\,2\,1}{p_0 p_1 p_2}\,\Delta\,\mathrm{GG} = (\overset{2\,3}{p_0 p_1} - \overset{2\,3}{p_1 p_0})(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1})(\overset{3\,1}{p_2 p_0} - \overset{3\,1}{p_0 p_2})\,\mathrm{GG}$$

ler:

$$\{\overset{3\,2\,1}{p_0 p_1 p_2}\,\Delta - (\overset{2\,3}{p_0 p_1} - \overset{2\,3}{p_1 p_0})(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1})(\overset{3\,1}{p_2 p_0} - \overset{3\,1}{p_0 p_2})\}\,\mathrm{GG} = 0.$$

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Dreiecks $\overset{1\,2\,3}{A A A}$ durch D_{123}, ist bekanntlich nach Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. §. 17.:

$$D_{123} = \pm\frac{\overset{1}{p_0}(\overset{2\,3}{p_1 p_2} - \overset{3\,2}{p_1 p_2}) + \overset{2}{p_0}(\overset{3\,1}{p_1 p_2} - \overset{1\,3}{p_1 p_2}) + \overset{3}{p_0}(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{2\,1}{p_1 p_2})}{2J},$$

so nach 46):

$$D_{123} = \pm\frac{\Delta}{2J},$$

ıd folglich:

$$\Delta = \pm 2J D_{123}.$$

ach dem Obigen ist:

$$\Delta \sin w_{01} = GJ,$$

so:

$$G = \pm 2 D_{123} \sin w_{01},$$

ınd G verschwindet also nicht, insofern, was natürlich hier im Allgemeinen vorausgesetzt werden kann, D_{123} und $\sin w_{01}$ nicht verschwinden. Daher ist nach dem Obigen die gesuchte Bedingungsgleichung:

50) . . $\overset{3\,2\,1}{p_0 p_1 p_2}\,\Delta - (\overset{2\,3}{p_0 p_1} - \overset{2\,3}{p_1 p_0})(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1})(\overset{3\,1}{p_2 p_0} - \overset{3\,1}{p_0 p_2}) = 0,$

oder:

51) . . . $\Delta = \dfrac{(\overset{2\,3}{p_0 p_1} - \overset{2\,3}{p_1 p_0})(\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1})(\overset{3\,1}{p_2 p_0} - \overset{3\,1}{p_0 p_2})}{\underset{3\;2\;1}{p_0 p_1 p_2}},$

oder:

$$\frac{\Delta}{\underset{3\;2\;1}{p_0 p_1 p_2}} = \frac{\overset{2\,3}{p_0 p_1} - \overset{2\,3}{p_1 p_0}}{\underset{2\;3}{p_1 p_0}} \cdot \frac{\overset{1\,2}{p_1 p_2} - \overset{1\,2}{p_2 p_1}}{\underset{1\;2}{p_2 p_1}} \cdot \frac{\overset{3\,1}{p_2 p_0} - \overset{3\,1}{p_0 p_2}}{\underset{3\;1}{p_0 p_2}}$$

$$= \left(\frac{\overset{2}{p_0}}{\underset{3}{p_0}} \cdot \frac{\overset{3}{p_1}}{\underset{2}{p_1}} - 1\right)\left(\frac{\overset{1}{p_1}}{\underset{2}{p_1}} \cdot \frac{\overset{2}{p_2}}{\underset{1}{p_2}} - 1\right)\left(\frac{\overset{3}{p_2}}{\underset{1}{p_2}} \cdot \frac{\overset{1}{p_0}}{\underset{3}{p_0}} - 1\right);$$

oder:

$$52) \ldots \frac{\Delta}{p_0 p_1 p_2} = -\left(1-\frac{p_0}{p_0}\cdot\frac{p_1}{p_1}\right)\left(1-\frac{p_1}{p_1}\cdot\frac{p_2}{p_2}\right)\left(1-\frac{p_2}{p_2}\cdot\frac{p_0}{p_0}\right)$$

was jedenfalls eine sehr merkwürdige Gleichung ist.

Entwickelt man aber die Gleichung 50) und hebt auf, was sich aufheben lässt, so bringt man dieselbe leicht auf die folgende Form:

$$\left.\begin{aligned} &p_0 p_1 (p_1 p_2 \cdot p_2 p_0 - p_2 p_0 \cdot p_1 p_2) \\ +&p_0 p_1 (p_1 p_2 \cdot p_2 p_0 - p_2 p_0 \cdot p_1 p_2) \\ +&p_0 p_1 (p_1 p_2 \cdot p_2 p_0 - p_2 p_0 \cdot p_1 p_2) \end{aligned}\right\} = 0,$$

welche Gleichung ganz mit der Gleichung 5), nämlich mit der nothwendigen Bedingungsgleichung, dass die sechs Punkte

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

in einem Kegelschnitte liegen, übereinstimmt.

Dies führt unmittelbar zu dem folgenden Satze:

Die **nothwendige** Bedingung, dass die Punkte

$$A = \overset{5}{A},\quad A_1 = \overset{6}{A};\qquad B,\ B_1;\qquad C,\ C_1$$

ein involutorisches System bilden, ist, dass die Punkte

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

in einem Kegelschnitte liegen.

Dies ist der Satz von Desargues; m. s. „Oeuvres de Desargues, reunies et analysées par M. Poudra, Officier supérieur d'état major en retraite. Tome I. Paris 1861. p. 186. und p. 267." — Zur Erläuterung des Vorhergehenden dient Fig. 1.

Die Gleichungen 50), 51), 52) sind sehr merkwürdige Formen der nothwendigen Bedingungsgleichung, dass die sechs Punkte

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

in einem Kegelschnitte liegen, und scheinen uns sehr beachtenswerth zu sein.

V.

Das Theorem von Pappus.

§. 8.

Es seien

$$\overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

er Punkte, deren Coordinaten wir wie gewöhnlich beziehungsweise rch

$$\begin{array}{lll} \overset{3}{p_0}, & \overset{3}{p_1}, & \overset{3}{p_2}; \\ \overset{4}{p_0}, & \overset{4}{p_1}, & \overset{4}{p_2}; \\ \overset{5}{p_0}, & \overset{5}{p_1}, & \overset{5}{p_2}; \\ \overset{6}{p_0}, & \overset{6}{p_1}, & \overset{6}{p_2} \end{array}$$

ezeichnen. Den durch diese vier Punkte gehenden Zug nennen wir berhaupt ein Viereck, und

$$\overset{3\,4}{AA},\ \overset{5\,6}{AA} \quad \text{und} \quad \overset{4\,5}{AA},\ \overset{6\,3}{AA}$$

essen gegenüberstehende Seiten. Ein fünfter Punkt sei $\overset{0}{A}$, dessen oordinaten wir durch $\overset{0}{p_0}, \overset{0}{p_1}, \overset{0}{p_2}$ bezeichnen. Nehmen wir aber das reieck $\overset{4\,5\,6}{AAA}$ als Fundamentaldreieck des Coordinatensystems an, so ass dessen Seiten $\overset{4\,5}{AA}, \overset{5\,6}{AA}, \overset{6\,4}{AA}$ in dieser Ordnung als 1ste, 2te, te Seite oder Axe betrachtet werden, so ist:

$$\overset{4}{p_0} = 0.\quad \overset{4}{p_2} = 0;\quad \overset{5}{p_0} = 0,\quad \overset{5}{p_1} = 0;\quad \overset{6}{p_1} = 0,\quad \overset{6}{p_2} = 0.$$

Die Gleichungen der Seiten

$$\overset{3\,4}{AA},\quad \overset{4\,5}{AA},\quad \overset{5\,6}{AA},\quad \overset{6\,3}{AA}$$

nd beziehungsweise:

$$\overset{3}{p_2}p_0 - \overset{3}{p_0}p_2 = 0,\quad p_0 = 0,\quad p_1 = 0,\quad \overset{3}{p_2}p_1 - \overset{3}{p_1}p_2 = 0.$$

Bezeichnen wir nun die von dem Punkte $\overset{0}{A}$ auf die gegenüberstehenden Seiten

$$\overset{3}{A}\overset{4}{A}, \quad \overset{5}{A}\overset{6}{A} \quad \text{und} \quad \overset{4}{A}\overset{5}{A}, \quad \overset{6}{A}\overset{3}{A}$$

des Vierecks $\overset{3}{A}\overset{4}{A}\overset{5}{A}\overset{6}{A}$ gefällten Perpendikel beziehungsweise durch

$$P_{34}, \quad P_{56} \quad \text{und} \quad P_{45}, \quad P_{63};$$

so ist nach Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. §. 14.:

$$P_{34}^2 = \frac{(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_0 - \overset{3}{p}_0\overset{0}{p}_2)^2}{\overset{3}{p}_2^2 + \overset{3}{p}_0^2 - 2\overset{3}{p}_0\overset{3}{p}_2\cos w_{20}}, \qquad P_{56}^2 = \overset{0}{p}_1^2$$

und

$$P_{45}^2 = \overset{0}{p}_0^2, \qquad P_{63}^2 = \frac{(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{0}{p}_2)^2}{\overset{3}{p}_1^2 + \overset{3}{p}_2^2 - 2\overset{3}{p}_1\overset{3}{p}_2\cos w_{12}}.$$

Folglich ist:

$$P_{34}^2 \cdot P_{56}^2 = \frac{\overset{0}{p}_1^2(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_0 - \overset{3}{p}_0\overset{0}{p}_2)^2}{\overset{3}{p}_2^2 + \overset{3}{p}_0^2 - 2\overset{3}{p}_0\overset{3}{p}_2\cos w_{20}},$$

$$P_{45}^2 \cdot P_{63}^2 = \frac{\overset{0}{p}_0^2(\overset{3}{p}_2\overset{0}{p}_1 - \overset{3}{p}_1\overset{0}{p}_2)^2}{\overset{3}{p}_1^2 + \overset{3}{p}_2^2 - 2\overset{3}{p}_1\overset{3}{p}_2\cos w_{12}};$$

also:

53)

$$\frac{P_{45}^2 \cdot P_{63}^2}{P_{34}^2 \cdot P_{56}^2} = \frac{\overset{0}{p}_0^2(\overset{0}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_1)^2}{\overset{0}{p}_1^2(\overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_0 - \overset{0}{p}_0\overset{3}{p}_2)^2} \cdot \frac{\overset{3}{p}_0^2 + \overset{3}{p}_2^2 - 2\overset{3}{p}_0\overset{3}{p}_2\cos w_{20}}{\overset{3}{p}_1^2 + \overset{3}{p}_2^2 - 2\overset{3}{p}_1\overset{3}{p}_2\cos w_{12}}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass die vier Punkte

$$\overset{3}{A}, \quad \overset{4}{A}, \quad \overset{5}{A}, \quad \overset{6}{A}$$

die wir als fest oder unveränderlich annehmen, in einem Kegelschni liegen, und dass in diesem Kegelschnitte auch der Punkt $\overset{0}{A}$ lie Dann ist nach 1) die Gleichung dieses Kegelschnitts:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_2(\overset{0}{p}_0\overset{3}{p}_1 - \overset{0}{p}_1\overset{3}{p}_0)\cdot\overset{3}{p}_0\overset{3}{p}_1 \\ &+\overset{0}{p}_0\overset{3}{p}_0(\overset{0}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_1)\cdot\overset{3}{p}_1\overset{3}{p}_2 \\ &+\overset{0}{p}_1\overset{3}{p}_1(\overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_0 - \overset{0}{p}_0\overset{3}{p}_2)\cdot\overset{3}{p}_2\overset{3}{p}_0 \end{aligned}\right\} = 0$$

oder:

$$\frac{p_2 p_2 (p_0 p_1 - p_1 p_0)}{p_1 (p_2 p_0 - p_0 p_2)} \cdot p_0 p_1 + \frac{p_0 p_0 (p_1 p_2 - p_2 p_1)}{p_1 (p_2 p_0 - p_0 p_2)} \cdot p_1 p_2 + p_1 \cdot p_2 p_0 = 0,$$

oder:

$$p_2 \cdot \frac{p_2 (p_0 p_1 - p_1 p_0)}{p_1 (p_2 p_0 - p_0 p_2)} \cdot p_0 p_1 + p_0 \cdot \frac{p_0 (p_1 p_2 - p_2 p_1)}{p_1 (p_2 p_0 - p_0 p_2)} \cdot p_1 p_2 + p_1 \cdot p_2 p_0 = 0.$$

Setzen wir nun

$$54) \quad \ldots\ldots\ldots K = \frac{p_0 (p_1 p_2 - p_2 p_1)}{p_1 (p_2 p_0 - p_0 p_2)},$$

so ist, wie man leicht findet:

$$1 + K = \frac{p_2 (p_1 p_0 - p_0 p_1)}{p_1 (p_2 p_0 - p_0 p_2)} = - \frac{p_2 (p_0 p_1 - p_1 p_0)}{p_1 (p_2 p_0 - p_0 p_2)},$$

folglich die vorstehende Gleichung des Kegelschnitts:

$$-(1+K) p_2 \cdot p_0 p_1 + K p_0 \cdot p_1 p_2 + p_1 \cdot p_2 p_0 = 0$$

oder:

$$55) \quad \ldots\ldots (1+K) p_2 \cdot p_0 p_1 - K p_0 \cdot p_1 p_2 - p_1 \cdot p_2 p_0 = 0.$$

Nehmen wir jetzt in diesem Kegelschnitte einen sechsten beliebigen, aber bestimmten Punkt A an, dessen Coordinaten wir durch $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ bezeichnen wollen, so ist nach vorstehender Gleichung:

$$(1+K) p_2 \cdot \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1 - K p_0 \cdot \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 - p_1 \cdot \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_0 = 0,$$

woraus sich:

$$56) \quad \ldots\ldots\ldots K = \frac{\bar{\omega}_0 (\bar{\omega}_1 p_2 - \bar{\omega}_2 p_1)}{\bar{\omega}_1 (\bar{\omega}_2 p_0 - \bar{\omega}_0 p_2)}$$

ergiebt, und also erhellet, dass K eine constante nämlich von der Lage des Punktes A in dem Kegelschnitte ganz unabhängige Grösse ist. Weil nun nach 53)

$$\frac{P_{45}^2 \cdot P_{66}^2}{P_{34}^2 \cdot P_{56}^2} = K^2 \cdot \frac{p_0^2 + p_2^2 - 2 p_0 p_2 \cos w_{20}}{p_1^2 + p_2^2 - 2 p_1 p_2 \cos w_{12}}$$

und offenbar auch

$$\frac{\overset{3}{p_0}^2+\overset{3}{p_2}^2-2\overset{3}{p_0}\overset{3}{p_2}\cos w_{20}}{\overset{3}{p_1}^2+\overset{3}{p_2}^2-2\overset{3}{p_1}\overset{3}{p_2}\cos w_{12}}$$

eine von der Lage des Punktes $\overset{0}{A}$ in dem Kegelschnitte ganz unabhängige, insofern also constante Grösse ist, so ist auch das Verhältniss

$$\frac{P_{45}\cdot P_{63}}{P_{34}\cdot P_{56}}$$

eine constante, von der Lage des Punktes $\overset{0}{A}$ in dem Kegelschnitt ganz unabhängige Grösse. Dies führt auf den folgenden Satz:

Wenn

$$\overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

vier in einem Kegelschnitte liegende feste Punkte sind oder

$$\overset{3\,4\,5\,6}{AAAA}$$

ein in den Kegelschnitt beschriebenes festes Viereck ist, und die auf die gegenüberstehenden Seiten

$$\overset{3\,4}{AA},\ \overset{5\,6}{AA} \quad \text{und} \quad \overset{4\,5}{AA},\ \overset{6\,3}{AA}$$

dieses Vierecks von einem beliebigen fünften Punkte $\overset{0}{A}$ des Kegelschnitts gefällten Perpendikel beziehungsweise durch

$$P_{34},\ P_{56} \quad \text{und} \quad P_{45},\ P_{69}$$

bezeichnet werden: so ist das Verhältniss

$$\frac{P_{45}\cdot P_{63}}{P_{34}\cdot P_{56}}$$

ein constantes, von der Lage des Punktes $\overset{0}{A}$ in dem Kegelschnitte ganz unabhängiges Verhältniss.

Diesen Satz nennt man den Satz von Pappus.

Nach dem Obigen ist:

57)

$$\frac{P_{45}\cdot P_{63}}{P_{34}\cdot P_{56}}=\pm\frac{\overline{\omega}_0(\overline{\omega}_1\overset{3}{p}_2-\overline{\omega}_2\overset{3}{p}_1)}{\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_2\overset{3}{p}_0-\overline{\omega}_0\overset{3}{p}_2)}\sqrt{\frac{\overset{3}{p_0}^2+\overset{3}{p_2}^2-2\overset{3}{p_0}\overset{3}{p_2}\cos w_{20}}{\overset{3}{p_1}^2+\overset{3}{p_2}^2-2\overset{3}{p_1}\overset{3}{p_2}\cos w_{12}}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$\frac{\overline{\omega}_0(\overline{\omega}_1 \overset{3}{p}_2 - \overline{\omega}_2 \overset{3}{p}_1)}{\overline{\omega}_1(\overline{\omega}_2 \overset{3}{p}_0 - \overline{\omega}_0 \overset{3}{p}_2)}$$

positiv oder negativ ist.

Für den Punkt A kann man jeden Punkt des Kegelschnitts annehmen, nur nicht eine der Ecken des Vierecks, weil dadurch die Constante in der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen würde.

Die Constante in 57) kann man auf verschiedene andere Arten ausdrücken, worüber ich aber der Kürze wegen für jetzt nur noch das Folgende bemerken will.

Nach Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. §. 4. 7) ist:

$$\sin w_{01} = -\sin(w_{12} + w_{20}) = -\sin w_{12}\cos w_{20} - \sin w_{20}\cos w_{12},$$

$$\sin w_{12} = -\sin(w_{20} + w_{01}) = -\sin w_{01}\cos w_{20} - \sin w_{20}\cos w_{01};$$

also:

$$\sin w_{01}^2 = -\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20} - \sin w_{20}\sin w_{01}\cos w_{12},$$

$$\sin w_{12}^2 = -\sin w_{01}\sin w_{12}\cos w_{20} - \sin w_{12}\sin w_{20}\cos w_{01}$$

und folglich:

$$\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 = \sin w_{12}\sin w_{20}\cos w_{01} - \sin w_{20}\sin w_{01}\sin w_{12}.$$

Ferner ist (m. s. a. a. O.):

$$\sin w_{20} = -\sin(w_{01} + w_{12}) = -\sin w_{12}\cos w_{01} - \sin w_{01}\cos w_{12},$$

also:

$$\sin w_{20}^2 = -\sin w_{12}\sin w_{20}\cos w_{01} - \sin w_{20}\sin w_{01}\cos w_{12}.$$

Daher haben wir die zwei Gleichungen:

$$\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 = \sin w_{12}\sin w_{20}\cos w_{01} - \sin w_{20}\sin w_{01}\cos w_{12},$$

$$\sin w_{20}^2 = -\sin w_{12}\sin w_{20}\cos w_{01} - \sin w_{20}\sin w_{01}\cos w_{12};$$

aus denen durch Subtraction und Addition:

$$\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 - \sin w_{20}^2 = 2\sin w_{12}\sin w_{20}\cos w_{01},$$

$$\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 + \sin w_{20}^2 = -2\sin w_{20}\sin w_{01}\cos w_{12};$$

also:

$$\cos w_{01} = \frac{\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 - \sin w_{20}^2}{2 \sin w_{12} \sin w_{20}},$$

$$\cos w_{12} = -\frac{\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 + \sin w_{20}^2}{2 \sin w_{20} \sin w_{01}};$$

und nun durch blosse Erhöhung der Indices:

$$\cos w_{12} = \frac{\sin w_{12}^2 - \sin w_{20}^2 - \sin w_{01}^2}{2 \sin w_{20} \sin w_{01}},$$

$$\cos w_{20} = -\frac{\sin w_{12}^2 - \sin w_{20}^2 + \sin w_{01}^2}{2 \sin w_{01} \sin w_{12}}$$

oder:

$$\cos w_{12} = -\frac{\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 + \sin w_{20}^2}{2 \sin w_{20} \sin w_{01}},$$

$$\cos w_{20} = -\frac{\sin w_{01}^2 + \sin w_{12}^2 - \sin w_{20}^2}{2 \sin w_{01} \sin w_{12}}$$

folgt, so dass wir also die drei folgenden Formeln haben:

58) . . . .
$$\begin{cases} \cos w_{01} = \dfrac{\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 - \sin w_{20}^2}{2 \sin w_{12} \sin w_{20}}, \\ \cos w_{12} = \dfrac{-\sin w_{01}^2 + \sin w_{12}^2 - \sin w_{20}^2}{2 \sin w_{20} \sin w_{01}}, \\ \cos w_{20} = \dfrac{-\sin w_{01}^2 - \sin w_{12}^2 + \sin w_{20}^2}{2 \sin w_{01} \sin w_{12}}. \end{cases}$$

Weil nun nach §. 7.

$$\overset{4}{p_1} \sin w_{20} = J, \qquad \overset{5}{p_2} \sin w_{01} = J, \qquad \overset{6}{p_0} \sin w_{12} = J$$

also:

$$\sin w_{01} = \frac{J}{\overset{5}{p_2}}, \qquad \sin w_{12} = \frac{J}{\overset{6}{p_0}}, \qquad \sin w_{20} = \frac{J}{\overset{4}{p_1}}$$

ist, so ist nach dem Obigen, wie man leicht findet:

59)

$$3w_{01} = \tfrac{1}{2}p_0p_1\left(\frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_0^2} - \frac{1}{p_1^2}\right) = -\tfrac{1}{2}p_0p_1\left(\frac{1}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_0^2}\right),$$

$$3w_{12} = -\tfrac{1}{2}p_1p_2\left(\frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_0^2} + \frac{1}{p_1^2}\right) = -\tfrac{1}{2}p_1p_2\left(\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_0^2}\right),$$

$$3w_{20} = -\tfrac{1}{2}p_2p_0\left(\frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_0^2} - \frac{1}{p_1^2}\right) = \tfrac{1}{2}p_2p_0\left(\frac{1}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_0^2}\right);$$

d man erhält also nach 57) den folgenden sehr merkwürdigen sdruck:

$$) \quad \frac{P_{45}.P_{63}}{P_{34}.P_{56}}$$

$$\pm \frac{\bar{\omega}_0(\bar{\omega}_1 p_2 - \bar{\omega}_2 p_1)}{\bar{\omega}_1(\bar{\omega}_2 p_0 - \bar{\omega}_0 p_2)} \sqrt{\frac{p_0^2 + p_2^2 - p_0p_2 \cdot p_0p_2\left(\frac{1}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_0^2}\right)}{p_1^2 + p_2^2 + p_1p_2 \cdot p_1p_2\left(\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} - \frac{1}{p_0^2}\right)}},$$

welchem man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, achdem der Factor vor dem Wurzelzeichen positiv oder negativ

Ueber die Bedeutung der Grössen $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ ist oben alles forderliche gesagt worden.

VI.

Das Theorem von Carnot.

§. 9.

Das Theorem von Carnot ist das folgende:

Wenn die Seiten

$$AB, \quad BC, \quad CA$$

ines Dreiecks ABC (Fig. 2) von einem Kegelschnitte beiehungsweise in den Punkten

$$c, \ c'; \quad a, \ a'; \quad b, \ b'$$

geschnitten werden; so ist:

$$\frac{Ab.Ab'}{Cb.Cb'}\cdot\frac{Ca.Ca'}{Ba.Ba'}\cdot\frac{Bc.Bc'}{Ac.Ac'}=1.$$

Der Beweis dieser Gleichung ist mittelst eines allgemein bekann Satzes von den Transversalen und des Satzes von Desargues s leicht zu führen (m. s. Traité des sections coniques par Chasles. Première Partie. Paris 1865. p. 19.).

Die Seiten BC und CA des Dreiecks ABC werden von beiden Transversalen ab, $a'b'$, welche die Seite AB in γ, γ' tref geschnitten. Also ist nach einem allgemein bekannten Satze von Transversalen:

$$\frac{Ab}{Cb}\cdot\frac{Ca}{Ba}\cdot\frac{B\gamma}{A\gamma}=1,$$

$$\frac{Ab'}{Cb'}\cdot\frac{Ca'}{Ba'}\cdot\frac{B\gamma'}{A\gamma'}=1;$$

und folglich, wenn man multiplicirt:

$$\frac{Ab.Ab'}{Cb.Cb'}\cdot\frac{Ca.Ca'}{Ba.Ba'}\cdot\frac{B\gamma.B\gamma'}{A\gamma.A\gamma'}=1.$$

Nach dem Satze von Desargues bilden aber die Punkte

$$A,\ B;\quad c,\ c';\quad \gamma,\ \gamma'$$

ein involutorisches System; also ist nach 31):

$$\frac{Ac.B\gamma}{A\gamma.Bc}=\frac{A\gamma'.Bc'}{Ac'.B\gamma'},$$

folglich:

$$\frac{B\gamma.B\gamma'}{A\gamma.A\gamma'}=\frac{Bc.Bc'}{Ac.Ac'};$$

und führt man nun diesen Werth von

$$\frac{B\gamma.B\gamma'}{A\gamma.A\gamma'}$$

in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\frac{Ab.Ab'}{Cb.Cb'}\cdot\frac{Ca.Ca'}{Ba.Ba'}\cdot\frac{Bc.Bc'}{Ac.Ac'}=1,$$

welches die zu beweisende Gleichung ist.

VII.

Das Theorem von Chasles.

§. 10.

Das Theorem von Chasles (Traité des sections coniques. remière Partie. p. 3. N°. 4.) ist das folgende:

Wenn man von vier Punkten eines Kegelschnitts nach inem fünften Punkte dieses Kegelschnitts gerade Linien ieht; so ist das anharmonische Verhältniss*) dieser vier eraden Linien, welches auch der fünfte Punkt des egelschnitts sein mag, ein constantes.

Dieser Satz kann aus dem Satze von Pappus sehr leicht abgeitet werden.

In Fig. 3. seien A, B, C, D die vier Punkte des Kegelschnitts nd nach dem fünften Punkte O dieses Kegelschnitts seien von A, B, , D die Geraden AO, BO, CO, DO gezogen. Bezeichnen wir nun ie von O auf die Seiten AB, BC, CD, DA des Vierecks $ABCD$ efällten Perpendikel beziehungsweise durch α, β, γ, δ; so ist nach nem bekannten Elementarsatze:

$$\alpha = \frac{OA.OB.\sin OAB}{AB},$$

$$\beta = \frac{OB.OC.\sin BOC}{BC},$$

$$\gamma = \frac{OC.OD.\sin COD}{CD},$$

$$\delta = \frac{OD.OA.\sin DOA}{DA}.$$

*) Quand quatre droites A, B, C, D, situées dans un même plan, passent r un même point, nous appellerons fonction ou rapport anharmonique s quatre droites, l'expression telle que

$$\frac{\sin(A, C)}{\sin(A, D)} : \frac{\sin(B, C)}{\sin(B, D)},$$

mée des sinus de quatre des six angles que ces droites font deux à deux raité de Géométrie supérieure, par M. Chasles. Paris, 1852. I. N°. 7. p. 7.).

Nach dem Satze von Pappus ist das Verhältniss

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = k$$

eine constante Grösse, nämlich unabhängig von der Lage des Punk O in dem Kegelschnitte; und da nun nach dem Obigen:

$$\alpha\gamma = \frac{OA.OB.OC.OD}{AB.CD} \cdot \sin AOB . \sin COD,$$

$$\beta\delta = \frac{OA.OB.OC.OD}{BC.DA} \cdot \sin BOC . \sin DOA$$

ist, so ist:

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{BC.DA}{AB.CD} \cdot \frac{\sin AOB . \sin COD}{\sin BOC . \sin DOA},$$

folglich:

$$\frac{BC.DA}{AB.CD} \cdot \frac{\sin AOB . \sin COD}{\sin BOC . \sin DOA} = k$$

oder:

$$\frac{\sin AOB}{\sin DOA} : \frac{\sin BOC}{\sin COD} = k \cdot \frac{AB.CD}{BC.DA},$$

worin der zu beweisende Satz ausgesprochen ist, weil wegen der veränderlichkeit der Punkte A, B, C, D die Grösse

$$k \cdot \frac{AB.CD}{BC.DA}$$

constant ist.

Anmerkung.

Auf verschiedene Anwendungen der in dieser Abhandlungen wiesenen merkwürdigen und wichtigen Sätze werde ich viell späterhin zurückkommen.

Zugleich bemerke ich noch, dass in dieser Abhandlung von wissen, die Berührenden der Kegelschnitte betreffenden Sätzen g absichtlich noch gar nicht die Rede gewesen ist, was ich nament bei dem hier vorzugsweise mit dem Namen des Satzes von Chas belegten Satze zu beachten bitte; eine Abhandlung über gewisse Berührenden der Kegelschnitte betreffende allgemeine Sätze, wel nach gleichen Grundsätzen wie die vorliegende bearbeitet ist, f dieser Abhandlung, zu welcher sie in bestimmter enger Beziehu steht, unmittelbar nach.

XXXIV.

Allgemeine Theorie der Berührenden, der Normalen und des Krümmungskreises der Curven mit Zugrundelegung des trimetrischen oder Dreilinien - Coordinatensystems. Die Theoreme von Brianchon und Chasles von den Berührenden der Kegelschnitte, mittelst desselben Coordinatensystems entwickelt.

Von

dem Herausgeber.

I.

Die Berührenden der Curven.

§. 1.

Die Gleichung einer Curve sei:

1) . . . . . $f(p_0, p_1, p_2) = 0,$

wozu aber noch die bekannte Gleichung

2) . . . . . $p_0 \sin w_{12} + p_1 \sin w_{20} + p_2 \sin w_{01} = J$

kommt, so dass also von den Grössen p_0, p_1, p_2 immer nur eine als unabhängig veränderlich betrachtet werden kann, es aber auch verstattet ist, sich die drei Grössen p_0, p_1, p_2 als von einer vierten Grösse, die wir etwa im Allgemeinen durch φ bezeichnen wollen, abhängig zu denken, durch deren Veränderungen die Veränderungen von p_0, p_1, p_2 herbeigeführt werden.

Die Coordinaten eines beliebigen, aber bestimmten Punktes in gegebenen Curve seien $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, so dass also

$$3) \ldots\ldots \begin{cases} f(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2) = 0, \\ \bar{\omega}_0 \sin w_{12} + \bar{\omega}_1 \sin w_{20} + \bar{\omega}_2 \sin w_{01} = J \end{cases}$$

ist.

Lassen wir nun φ, wovon $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ abhängig gedacht werden, Veränderung $\Delta\varphi$ erleiden, wodurch die Veränderungen $\Delta\bar{\omega}_0$, $\Delta\bar{\omega}_1$, von $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ herbeigeführt werden; so ist, wenn wir:

$$4) \ldots \bar{\omega}_0' = \bar{\omega}_0 + \Delta\bar{\omega}_0, \ \bar{\omega}_1' = \bar{\omega}_1 + \Delta\bar{\omega}_1, \ \bar{\omega}_2' = \bar{\omega}_2 + \Delta\bar{\omega}_2$$

setzen, natürlich auch:

$$5) \ldots\ldots \begin{cases} f(\bar{\omega}_0', \bar{\omega}_1', \bar{\omega}_2') = 0, \\ \bar{\omega}_0' \sin w_{12} + \bar{\omega}_1' \sin w_{20} + \bar{\omega}_2' \sin w_{01} = J. \end{cases}$$

Legen wir nun durch die beiden Punkte $(\bar{\omega}_0\ \bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2)$ und $(\bar{\omega}_0'\ \bar{\omega}_1'$ der Curve eine Secante der letzteren, so ist, wenn:

$$6) \ldots\ldots\ldots \begin{cases} L = \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2' - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_1', \\ M = \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_0' - \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_2', \\ N = \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1' - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_0' \end{cases}$$

sesetzt wird, bekanntlich

$$7) \ldots\ldots\ldots \quad Lp_0 + Mp_1 + Np_2 = 0$$

die Gleichung dieser Secante.

Nach dem Taylor'schen Satze ist:

$$\bar{\omega}_0' = \bar{\omega}_0 + \frac{\partial\bar{\omega}_0}{\partial\varphi}\Delta\varphi + R_0,$$

$$\bar{\omega}_1' = \bar{\omega}_1 + \frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\varphi}\Delta\varphi + R_1,$$

$$\bar{\omega}_2' = \bar{\omega}_2 + \frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\varphi}\Delta\varphi + R_2;$$

wo die Reste R_0, R_1, R_2 bekanntlich in Bezug auf $\Delta\varphi$ Grössen zweiten Ordnung sind.

Mittelst leichter Rechnung findet man:

$$L = \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2' - \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_1' = \left(\bar{\omega}_1 \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \varphi} - \bar{\omega}_2 \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \varphi}\right) \Delta\varphi + \bar{\omega}_1 R_2 - \bar{\omega}_2 R_1,$$

$$M = \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_0' - \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_2' = \left(\bar{\omega}_2 \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \varphi} - \bar{\omega}_0 \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \varphi}\right) \Delta\varphi + \bar{\omega}_2 R_0 - \bar{\omega}_0 R_2,$$

$$N = \bar{\omega}_0 \bar{\omega}_1' - \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_0' = \left(\bar{\omega}_0 \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \varphi} - \bar{\omega}_1 \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \varphi}\right) \Delta\varphi + \bar{\omega}_0 R_1 - \bar{\omega}_1 R_0;$$

lso:

$$\frac{L}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_1 \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \varphi} - \bar{\omega}_2 \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \varphi} + \bar{\omega}_1 \frac{R_2}{\Delta\varphi} - \bar{\omega}_2 \frac{R_1}{\Delta\varphi},$$

$$\frac{M}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_2 \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \varphi} - \bar{\omega}_0 \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \varphi} + \bar{\omega}_2 \frac{R_0}{\Delta\varphi} - \bar{\omega}_0 \frac{R_2}{\Delta\varphi},$$

$$\frac{N}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_0 \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \varphi} - \bar{\omega}_1 \frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \varphi} + \bar{\omega}_0 \frac{R_1}{\Delta\varphi} - \bar{\omega}_1 \frac{R_0}{\Delta\varphi}.$$

Die Gleichung 8) der Secante kann man auch auf folgende Art schreiben:

$$\frac{L}{\Delta\varphi} p_0 + \frac{M}{\Delta\varphi} p_1 + \frac{N}{\Delta\varphi} p_2 = 0;$$

nd da nun bekanntlich die Berührende der Curve in dem Punkte $\bar{\omega}_0\ \bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2$) in allein richtiger und streng - wissenschaftlicher Weise ufzufassen ist als die Gränzlinie, welcher diese Secante sich ähert, wenn $\Delta\varphi$ sich der Null nähert, so ist die Gleichung der Berührenden in dem Punkte $(\bar{\omega}_0\ \bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2)$ aufzufassen als die Gränzgleichung, welcher die obige Gleichung der Secante sich nähert, wenn $\Delta\varphi$ sich der Null nähert, und es ist also:

$$\mathrm{Lim} \frac{L}{\Delta\varphi} \cdot p_0 + \mathrm{Lim} \frac{M}{\Delta\varphi} \cdot p_1 + \mathrm{Lim} \frac{N}{\Delta\varphi} \cdot p_2 = 0$$

die Gleichung der Berührenden der Curve in dem Punkte $(\bar{\omega}_0\ \bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2)$ derselben.

Nach den oben entwickelten Ausdrücken von

$$\frac{L}{\Delta\varphi}, \quad \frac{M}{\Delta\varphi}, \quad \frac{N}{\Delta\varphi}$$

st aber offenbar:

$$\operatorname{Lim}\frac{L}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_1\frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_2\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\varphi} + \bar{\omega}_1\operatorname{Lim}\frac{R_2}{\Delta\varphi} - \bar{\omega}_2\operatorname{Lim}\frac{R_1}{\Delta\varphi},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{M}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_2\frac{\partial\bar{\omega}_0}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_0\frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\varphi} + \bar{\omega}_2\operatorname{Lim}\frac{R_0}{\Delta\varphi} - \bar{\omega}_0\operatorname{Lim}\frac{R_2}{\Delta\varphi},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{N}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_0\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_1\frac{\partial\bar{\omega}_0}{\partial\varphi} + \bar{\omega}_0\operatorname{Lim}\frac{R_1}{\Delta\varphi} - \bar{\omega}_1\operatorname{Lim}\frac{R_0}{\Delta\varphi};$$

also, weil R_0, R_1, R_2 in Bezug auf $\Delta\varphi$ Grössen der zweiten Ordnun folglich:

$$\frac{R_0}{\Delta\varphi}, \quad \frac{R_1}{\Delta\varphi}, \quad \frac{R_2}{\Delta\varphi}$$

in Bezug auf $\Delta\varphi$ Grössen der ersten Ordnung sind, und daher:

$$\operatorname{Lim}\frac{R_0}{\Delta\varphi} = 0, \quad \operatorname{Lim}\frac{R_1}{\Delta\varphi} = 0, \quad \operatorname{Lim}\frac{R_2}{\Delta\varphi} = 0$$

ist:

$$\operatorname{Lim}\frac{L}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_1\frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_2\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{M}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_2\frac{\partial\bar{\omega}_0}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_0\frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\varphi},$$

$$\operatorname{Lim}\frac{N}{\Delta\varphi} = \bar{\omega}_0\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_1\frac{\partial\bar{\omega}_0}{\partial\varphi}.$$

Hiernach ist also nach dem Obigen:

$$8)\ldots\ldots\ldots \left.\begin{aligned} &\left(\bar{\omega}_1\frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_2\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\varphi}\right)p_0 \\ +&\left(\bar{\omega}_2\frac{\partial\bar{\omega}_0}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_0\frac{\partial\bar{\omega}_2}{\partial\varphi}\right)p_1 \\ +&\left(\bar{\omega}_0\frac{\partial\bar{\omega}_1}{\partial\varphi} - \bar{\omega}_1\frac{\partial\bar{\omega}_0}{\partial\varphi}\right)p_2 \end{aligned}\right\} = 0$$

die Gleichung der Berührenden der Curve in dem Punkte ($\bar{\omega}_0$ $\bar{\omega}_1$ $\bar{\omega}_2$ derselben.

Bezeichnen wir die Function $f(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ von $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$ $\bar{\omega}_2$ durc u, und setzen also:

$$9)\ldots\ldots\ldots\ldots u = f(\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2);$$

so ist, wegen der beiden Gleichungen 3):

$$10) \ldots \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_0} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_1} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_2} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial \varphi} = 0, \\ \sin w_{12} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_0}{\partial \varphi} + \sin w_{20} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \varphi} + \sin w_{01} \cdot \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial \varphi} = 0; \end{cases}$$

wo natürlich

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_0}, \quad \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_2}$$

partielle Differentialquotienten von u sind, weil überhaupt Differentialquotienten einer Function mit mehreren veränderlichen Grössen überall und immer nur partielle Differentialquotienten sein können, also eine Unterscheidung dieser Differentialquotienten von den Differentialquotienten der Functionen mit einer veränderlichen Grösse in der Bezeichnung nach meiner schon oft ausgesprochenen Ueberzeugung ganz überflüssig, unnütz und namentlich für den geübten und schnellen Rechner im höchsten Grade unbequem ist.

Aus den beiden Gleichungen 10) folgt, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

10*)

$$\frac{\partial \overline{\omega}_0}{\partial \varphi} = G\left(\sin w_{20} \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_2} - \sin w_{01} \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_1}\right),$$

$$\frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \varphi} = G\left(\sin w_{01} \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_0} - \sin w_{12} \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_2}\right),$$

$$\frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial \varphi} = G\left(\sin w_{12} \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_1} - \sin w_{20} \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_0}\right);$$

also, wie man mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\overline{\omega}_0 \sin w_{12} + \overline{\omega}_1 \sin w_{20} + \overline{\omega}_2 \sin w_{01} = J$$

leicht findet:

$$\overline{\omega}_0 \frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \varphi} - \overline{\omega}_1 \frac{\partial \overline{\omega}_0}{\partial \varphi}$$

$$= G\left\{\left(\overline{\omega}_0 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_0} + \overline{\omega}_1 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_1} + \overline{\omega}_2 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_2}\right) \sin w_{01} - J \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_2}\right\},$$

$$\overline{\omega}_1 \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial \varphi} - \overline{\omega}_2 \frac{\partial \overline{\omega}_1}{\partial \varphi}$$

$$= G\left\{\left(\overline{\omega}_0 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_0} + \overline{\omega}_1 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_1} + \overline{\omega}_2 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_2}\right) \sin w_{12} - J \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_0}\right\},$$

$$\overline{\omega}_2 \frac{\partial \overline{\omega}_0}{\partial \varphi} - \overline{\omega}_0 \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial \varphi}$$

$$= G\left\{\left(\overline{\omega}_0 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_0} + \overline{\omega}_1 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_1} + \overline{\omega}_2 \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_2}\right) \sin w_{20} - J \frac{\partial u}{\partial \overline{\omega}_1}\right\}.$$

Von einer Bestimmung des Factors G kann natürlich nur dann die Rede sein, wenn über die Variabele φ etwas Bestimmtes festgesetzt worden ist. Setzte man etwa, was verstattet ist, $\varphi = \bar{\omega}_0$, so wäre

$$\frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \varphi} = 1,$$

also nach dem Obigen:

$$1 = G\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} - \sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right),$$

folglich:

$$G = \frac{1}{\sin w_{20}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} - \sin w_{01}\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}}$$

oder:

$$G = \left\{\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} - \sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right\}^{-1}.$$

Folglich ist nach 8) die Gleichung der Berührenden:

11)

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\left(\bar{\omega}_0\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \bar{\omega}_1\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \bar{\omega}_2\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\sin w_{12} - J\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right\}p_0\\
+&\left\{\left(\bar{\omega}_0\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \bar{\omega}_1\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \bar{\omega}_2\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\sin w_{20} - J\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right\}p_1\\
+&\left\{\left(\bar{\omega}_0\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \bar{\omega}_1\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \bar{\omega}_2\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\sin w_{01} - J\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right\}p_2
\end{aligned}\right\} = 0;$$

oder:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\omega}_0\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}(p_0\sin w_{12} + p_1\sin w_{20} + p_2\sin w_{01})\\
+&\bar{\omega}_1\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}(p_0\sin w_{12} + p_1\sin w_{20} + p_2\sin w_{01})\\
+&\bar{\omega}_2\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}(p_0\sin w_{12} + p_1\sin w_{20} + p_2\sin w_{01})\\
-&J\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}p_0 + \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}p_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}p_2\right)
\end{aligned}\right\} = 0;$$

also offenbar:

12) $$\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}p_0 + \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}p_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}p_2 = \bar{\omega}_0\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \bar{\omega}_1\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \bar{\omega}_2\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2},$$

oder:

13) $$\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}(p_0 - \bar{\omega}_0) + \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}(p_1 - \bar{\omega}_1) + \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}(p_2 - \bar{\omega}_2) = 0.$$

Die Gleichung der Kegelschnitte wollen wir jetzt unter der Form:

14) . . $Ap_0^2+Bp_1^2+Cp_2^2+2Dp_0p_1+2Ep_1p_2+2Fp_2p_0=0$

darstellen; dann ist im Obigen:

15)....$u=A\bar{\omega}_0^2+B\bar{\omega}_1^2+C\bar{\omega}_2^2+2D\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1+2E\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2+2F\bar{\omega}_2\bar{\omega}_0$,

folglich:

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}=2(A\bar{\omega}_0+D\bar{\omega}_1+F\bar{\omega}_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}=2(D\bar{\omega}_0+B\bar{\omega}_1+E\bar{\omega}_2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}=2(F\bar{\omega}_0+E\bar{\omega}_1+C\omega_2);$$

also die Gleichung der Berührenden in dem Punkte $(\bar{\omega}_0\ \bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2)$:

16)

$$\left.\begin{array}{l}(A\bar{\omega}_0+D\bar{\omega}_1+F\bar{\omega}_2)(p_0-\bar{\omega}_0)\\+(D\bar{\omega}_0+B\bar{\omega}_1+E\bar{\omega}_2)(p_1-\bar{\omega}_1)\\+(F\bar{\omega}_0+E\bar{\omega}_1+C\bar{\omega}_2)(p_2-\bar{\omega}_2)\end{array}\right\}=0,$$

oder, wie man leicht findet:

$$(A\bar{\omega}_0+D\bar{\omega}_1+F\bar{\omega}_2)p_0+(D\bar{\omega}_0+B\bar{\omega}_1+E\bar{\omega}_2)p_1+(F\bar{\omega}_0+E\bar{\omega}_1+C\bar{\omega}_2)p_2$$
$$-(A\bar{\omega}_0^2+B\bar{\omega}_1^2+C\bar{\omega}_2^2+2D\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1+2E\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2+2F\bar{\omega}_2\bar{\omega}_0)$$
$$=0,$$

also, weil

$$A\bar{\omega}_0^2+B\bar{\omega}_1^2+C\bar{\omega}_2^2+2D\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1+2E\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2+2F\bar{\omega}_2\bar{\omega}_0=0$$

ist:

17)

$$(A\bar{\omega}_0+D\bar{\omega}_1+F\bar{\omega}_2)p_0+(D\bar{\omega}_0+B\bar{\omega}_1+E\bar{\omega}_2)p_1+(F\bar{\omega}_0+E\bar{\omega}_1+C\bar{\omega}_2)p_2$$
$$=0.$$

II.

Die Normalen der Curven.

§. 2.

Wenn die Gleichungen der Berührenden und der Normale einer Curve in dem Punkte $(\bar{\omega}_0\ \bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2)$ derselben beziehungsweise

18) . . . . . $Lp_0+Mp_1+Np_2=0$

und

19) . . . . . $L'p_0+M'p_1+N'p_2=0$

sind, so hat man bekanntlich (Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. S. 430.) die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}(L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20})L'\\+(L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12})M'\\+(L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N)N'\end{array}\right\}=0$$

und

$$L'\overline{\omega}_0+M'\overline{\omega}_1+N'\overline{\omega}_2=0.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen:

$$J'=\overline{\omega}_0\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}+\overline{\omega}_1\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}+\overline{\omega}_2\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2},$$

so ist nach 11):

$$L=J'\sin w_{12}-J\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0},$$

$$M=J'\sin w_{20}-J\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1},$$

$$N=J'\sin w_{01}-J\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2};$$

folglich, wie man leicht findet:

$$L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20}$$
$$=J'\left\{\sin w_{12}+\sin(w_{20}+w_{01})\right\}-J\left\{\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}+\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}+\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right\},$$

$$L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12}$$
$$=J'\left\{\sin w_{20}+\sin(w_{01}+w_{12})\right\}-J\left\{\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right\},$$

$$L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N$$
$$=J'\left\{\sin w_{01}+\sin(w_{12}+w_{20})\right\}-J\left\{\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right\};$$

also, weil (a. a. O. S. 403):

$$\sin w_{01}=-\sin(w_{12}+w_{20}),$$
$$\sin w_{12}=-\sin(w_{20}+w_{01}),$$
$$\sin w_{20}=-\sin(w_{01}+w_{12})$$

ist:

$$L+M\cos w_{01}+N\cos w_{20}=-J\left\{\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right\},$$

$$L\cos w_{01}+M+N\cos w_{12}=-J\left\{\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right\},$$

$$L\cos w_{20}+M\cos w_{12}+N=-J\left\{\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right\}.$$

Folglich hat man nach dem Obigen die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)L'\\+&\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)M'\\+&\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)N'\end{aligned}\right\}=0,$$

$$L'\bar{\omega}_0+M'\bar{\omega}_1+N'\bar{\omega}_2=0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man, abgesehen von einem gemeinschaftlichen Factor, weil es bloss auf die Verhältnisse der Grössen L', M', N' unter einander ankommt:

(20)

$$\begin{aligned}L'=\;&\bar{\omega}_1\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\&-\bar{\omega}_2\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right),\\M'=\;&\bar{\omega}_2\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\&-\bar{\omega}_0\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right),\\N'=\;&\bar{\omega}_0\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\&-\bar{\omega}_1\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right);\end{aligned}$$

oder:

(21)

$$\begin{aligned}
L' = {} & (\bar{\omega}_1 \cos w_{20} - \bar{\omega}_2 \cos w_{01}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} \\
& + (\bar{\omega}_1 \cos w_{12} - \bar{\omega}_2) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} \\
& + (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_2 \cos w_{12}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}, \\
M' = {} & (\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_0 \cos w_{20}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} \\
& + (\bar{\omega}_2 \cos w_{01} - \bar{\omega}_0 \cos w_{12}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} \\
& + (\bar{\omega}_2 \cos w_{20} - \bar{\omega}_0) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}, \\
N' = {} & (\bar{\omega}_0 \cos w_{01} - \bar{\omega}_1) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} \\
& + (\bar{\omega}_0 - \bar{\omega}_1 \cos w_{01}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} \\
& + (\bar{\omega}_0 \cos w_{12} - \bar{\omega}_1 \cos w_{20}) \frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung der Normale in dem Punkte $(\bar{\omega}_0\ \bar{\omega}_1\ \bar{\omega}_2)$ ist:

(22)

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_1 \left(\cos w_{20} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \cos w_{12} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} \right) \\ -\bar{\omega}_2 \left(\cos w_{01} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \cos w_{12} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} \right) \end{array} \right\} p_0 \\
+ & \left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_2 \left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \cos w_{01} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \cos w_{20} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} \right) \\ -\bar{\omega}_0 \left(\cos w_{20} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \cos w_{12} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} \right) \end{array} \right\} p_1 \\
+ & \left\{ \begin{array}{l} \bar{\omega}_0 \left(\cos w_{01} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \cos w_{12} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} \right) \\ -\bar{\omega}_1 \left(\dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0} + \cos w_{01} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1} + \cos w_{20} \dfrac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2} \right) \end{array} \right\} p_2 \\
& = 0
\end{aligned}$$

oder:

(23)

$$\left\{\begin{array}{l}(\bar\omega_1\cos w_{20}-\bar\omega_2\cos w_{01})\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_0}\\ +(\bar\omega_1\cos w_{12}-\bar\omega_2)\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_1}+(\bar\omega_1-\bar\omega_2\cos w_{12})\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_2}\end{array}\right\}p_0$$

$$+\left\{\begin{array}{l}(\bar\omega_2-\bar\omega_0\cos w_{20})\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_0}\\ +(\bar\omega_2\cos w_{01}-\bar\omega_0\cos w_{12})\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_1}+(\bar\omega_2\cos w_{20}-\bar\omega_0)\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_2}\end{array}\right\}p_1$$

$$+\left\{\begin{array}{l}(\bar\omega_0\cos w_{01}-\bar\omega_1)\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_0}\\ +(\bar\omega_0-\bar\omega_1\cos w_{01})\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_1}+(\bar\omega_0\cos w_{12}-\bar\omega_1\cos w_{20})\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_2}\end{array}\right\}p_2$$

$$=0,$$

r auch:

(24)

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\cos w_{20}\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_0}+\cos w_{12}\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_1}+\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_2}\right)(\bar\omega_1 p_0-\bar\omega_0 p_1)\\ +\left(\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_0}+\cos w_{01}\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_1}+\cos w_{20}\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_2}\right)(\bar\omega_2 p_1-\bar\omega_1 p_2)\\ +\left(\cos w_{01}\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_0}+\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_1}+\cos w_{12}\dfrac{\partial u}{\partial\bar\omega_2}\right)(\bar\omega_0 p_2-\bar\omega_2 p_0)\end{array}\right\}=0.$$

Die Gleichung der Normale eines Kegelschnitts in dem Punkte $\bar\omega_1\ \bar\omega_2$) ist:

(25)

$$\left\{\begin{array}{l}(A\bar\omega_0+D\bar\omega_1+F\bar\omega_2)\cos w_{20}\\ +(D\bar\omega_0+B\bar\omega_1+E\bar\omega_2)\cos w_{12}\\ +(F\bar\omega_0+E\bar\omega_1+C\bar\omega_2)\end{array}\right\}(\bar\omega_1 p_0-\bar\omega_0 p_1)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}(A\bar\omega_0+D\bar\omega_1+F\bar\omega_2)\\ +(D\bar\omega_0+B\bar\omega_1+E\bar\omega_2)\cos w_{01}\\ +(F\bar\omega_0+E\bar\omega_1+C\bar\omega_2)\cos w_{20}\end{array}\right\}(\bar\omega_2 p_1-\bar\omega_1 p_2)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}(A\bar\omega_0+D\bar\omega_1+F\bar\omega_2)\cos w_{01}\\ +(D\bar\omega_0+B\bar\omega_1+E\bar\omega_2)\\ +(F\bar\omega_0+E\bar\omega_1+C\bar\omega_2)\cos w_{12}\end{array}\right\}(\bar\omega_0 p_2-\bar\omega_2 p_0)$$

$$=0.$$

III.

Der Krümmungskreis der Curven.

§. 3.

Die Gleichung der Normale der Curve in dem Punkte ($\bar{\omega}_0$ ist nach II. bekanntlich:

26) . . . . . $L'p_0+M'p_1+N'p_2=0,$

wo L', M', N' ihre aus 20) und 21) bekannte Bedeutung h Lassen wir nun φ die Veränderung $\Delta\varphi$ erleiden, wodurch $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}$ in $\bar{\omega}_0+\Delta\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1+\Delta\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2+\Delta\bar{\omega}_2$ übergehen, so ist der durch letzteren Coordinaten bestimmte Punkt ein dem Punkte ($\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2$ nachbarter Punkt der Curve, und die Gleichung der Normal Curve in diesem Nachbarpunkte des Punktes ($\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2$) ist, indem φ die Veränderung $\Delta\varphi$ erleidet, die Grössen L', M' respective in

27) .. $L''=L'+\Delta L', \quad M''=M'+\Delta M' \quad N''=N'+\Delta N$

übergehen:

28) . . . . . $L''p_0+M''p_1+N''p_2=0.$

Weil nun, wie man sogleich übersieht:

$$L'M''-M'L''=L'\Delta M'-M'\Delta L',$$
$$M'N''-N'M''=M'\Delta N'-N'\Delta M',$$
$$N'L''-L'N''=N'\Delta L'-L'\Delta N'$$

ist; so sind, wenn wir der Kürze wegen:

$$29) \ldots\ldots Q=\left(L'\frac{\Delta M'}{\Delta\varphi}-M'\frac{\Delta L'}{\Delta\varphi}\right)\sin w_{01}$$
$$+\left(M'\frac{\Delta N'}{\Delta\varphi}-N'\frac{\Delta M'}{\Delta\varphi}\right)\sin w_{12}$$
$$+\left(N'\frac{\Delta L'}{\Delta\varphi}-L'\frac{\Delta N'}{\Delta\varphi}\right)\sin w_{20}$$

setzen, nach Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. S. 422. die Coordinate Durchschnittspunkts der beiden Normalen:

$$\frac{\left(M'\frac{\Delta N'}{\Delta\varphi}-N'\frac{\Delta M'}{\Delta\varphi}\right)J}{Q},$$

$$\frac{\left(N'\frac{\Delta L'}{\Delta\varphi}-L'\frac{\Delta N'}{\Delta\varphi}\right)J}{Q},$$

$$\frac{\left(L'\frac{\Delta M'}{\Delta\varphi}-M'\frac{\Delta L'}{\Delta\varphi}\right)J}{Q}.$$

[ach einem bekannten Princip erhält man die Coordinaten des punkts des Krümmungskreises der Curve in dem Punkte $(\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2)$ ben, wenn man, indem $\Delta\varphi$ sich der Null nähert, zu den Gränzen orstehenden Ausdrücke übergeht. Weil nun

$$\text{im}\frac{\Delta L'}{\Delta\varphi}=\frac{\partial L'}{\partial\varphi},\qquad \text{Lim}\frac{\Delta M'}{\Delta\varphi}=\frac{\partial M'}{\partial\varphi},\qquad \text{Lim}\frac{\Delta N'}{\Delta\varphi}=\frac{\partial N'}{\partial\varphi};$$

ach 29):

$$\begin{aligned}\text{Lim}\,Q=&\left(L'\frac{\partial M'}{\partial\varphi}-M'\frac{\partial L'}{\partial\varphi}\right)\sin w_{01}\\&+\left(M'\frac{\partial N'}{\partial\varphi}-N'\frac{\partial M'}{\partial\varphi}\right)\sin w_{12}\\&+\left(N'\frac{\partial L'}{\partial\varphi}-L'\frac{\partial N'}{\partial\varphi}\right)\sin w_{20}\end{aligned}$$

o ist, wenn wir die Coordinaten des Mittelpunkts des Krüm- kreises durch P_0, P_1, P_2 bezeichnen, und der Kürze wegen:

$$\begin{aligned}\ldots\ldots\Omega=&\left(L'\frac{\partial M'}{\partial\varphi}-M'\frac{\partial L'}{\partial\varphi}\right)\sin w_{01}\\&+\left(M'\frac{\partial N'}{\partial\varphi}-N'\frac{\partial M'}{\partial\varphi}\right)\sin w_{12}\\&+\left(N'\frac{\partial L'}{\partial\varphi}-L'\frac{\partial N'}{\partial\varphi}\right)\sin w_{20}\end{aligned}$$

:

$$31) \ldots\ldots \begin{cases} P_0 = \dfrac{\left(M'\dfrac{\partial N'}{\partial\varphi} - N'\dfrac{\partial M'}{\partial\varphi}\right)J}{\Omega}, \\[2ex] P_1 = \dfrac{\left(N'\dfrac{\partial L'}{\partial\varphi} - L'\dfrac{\partial N'}{\partial\varphi}\right)J}{\Omega}, \\[2ex] P_2 = \dfrac{\left(L'\dfrac{\partial M'}{\partial\varphi} - M'\dfrac{\partial L'}{\partial\varphi}\right)J}{\Omega}. \end{cases}$$

Bezeichnet R den Halbmesser des Krümmungskreises, so man nach Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. S. 426. zu dessen Bestimm die Formeln:

32)

$$R^2 = -\frac{(P_0-\overline{\omega}_0)^2\sin 2w_{12} + (P_1-\overline{\omega}_1)^2\sin 2w_{20} + (P_2-\overline{\omega}_2)^2\sin 2}{2\sin w_{01}\sin w_{12}\sin w_{20}}$$

oder:

33)

$$R^2 = -\left\{\frac{(P_0-\overline{\omega}_0)^2\cos w_{12}}{\sin w_{01}\sin w_{20}} + \frac{(P_1-\overline{\omega}_1)^2\cos w_{20}}{\sin w_{12}\sin w_{01}} + \frac{(P_2-\overline{\omega}_2)^2\cos w}{\sin w_{20}\sin w_{12}}\right.$$

§. 4.

Um die vorhergehenden Formeln zur Bestimmung des Kr mungskreises mit Leichtigkeit anwendbar zu machen, müssen wir allen Dingen noch die Differentialquotienten:

$$\frac{\partial L'}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial M'}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial N'}{\partial\varphi}$$

bloss durch partielle Differentialquotienten von

$$u = f(\overline{\omega}_0, \overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2)$$

nach den veränderlichen Grössen $\overline{\omega}_0$, $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ ausdrücken.

Nach 20) ist:

$$\begin{aligned} L' = \quad & \overline{\omega}_1\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0} + \cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1} + \frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right) \\ & -\overline{\omega}_2\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0} + \frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1} + \cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right), \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L'}{\partial \varphi} = {} & \frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \varphi}\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\ & -\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \varphi}\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\ & +\bar{\omega}_1\left\{\cos w_{20}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right)}{\partial \varphi}+\cos w_{12}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right)}{\partial \varphi}+\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)}{\partial \varphi}\right\}\\ & -\bar{\omega}_2\left\{\cos w_{01}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right)}{\partial \varphi}+\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right)}{\partial \varphi}+\cos w_{12}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)}{\partial \varphi}\right\}.\end{aligned}$$

Nun ist nach 10*):

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right)}{\partial \varphi} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0^2}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1 \partial \bar{\omega}_0}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2 \partial \bar{\omega}_0}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \varphi}\\ = {} & G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0^2}\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right)\\ & +G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0 \partial \bar{\omega}_1}\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\ & +G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2 \partial \bar{\omega}_0}\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right)}{\partial \varphi} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0 \partial \bar{\omega}_1}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1^2}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2 \partial \bar{\omega}_1}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \varphi}\\ = {} & G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0 \partial \bar{\omega}_1}\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right)\\ & +G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1^2}\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\ & +G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1 \partial \bar{\omega}_2}\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)}{\partial \varphi} = {} & \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0 \partial \bar{\omega}_2}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_0}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1 \partial \bar{\omega}_2}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_1}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2^2}\cdot\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial \varphi}\\ = {} & G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2 \partial \bar{\omega}_0}\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right)\\ & +G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1 \partial \bar{\omega}_2}\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\ & +G\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2^2}\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right).\end{aligned}$$

Hieraus erhält man leicht:

$$\cos w_{20}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}\right)}{\partial\varphi}+\cos w_{12}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)}{\partial\varphi}$$

$$= G\left(\cos w_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0{}^2}+\cos w_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0\partial\overline{\omega}_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2\partial\overline{\omega}_0}\right)$$

$$\times\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}\right)$$

$$+ G\left(\cos w_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0\partial\overline{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_1{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2\partial\overline{\omega}_0}\right)$$

$$\times\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)$$

$$+ G\left(\cos w_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2\partial\overline{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_1\partial\overline{\omega}_2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2{}^2}\right)$$

$$\times\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}\right)$$

und:

$$\cos w_{01}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}\right)}{\partial\varphi}+\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}\right)}{\partial\varphi}+\cos w_{12}\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)}{\partial\varphi}$$

$$= G\left(\cos w_{01}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0{}^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0\partial\overline{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2\partial\overline{\omega}_0}\right)$$

$$\times\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}\right)$$

$$+ G\left(\cos w_{01}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0\partial\overline{\omega}_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_1{}^2}+\cos w_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_1\partial\overline{\omega}_2}\right)$$

$$\times\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)$$

$$+ G\left(\cos w_{01}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2\partial\overline{\omega}_0}+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_1\partial\overline{\omega}_2}+\cos w_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2{}^2}\right)$$

$$\times\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}\right).$$

Hieraus erhält man mit Rücksicht auf 10*) und mit hier of
verstatteter Weglassung des Factors G — wovon die Zulässigk
der Stelle aus den Formeln 30) und 31) erhellet — nach dem
offenbar die folgenden Ausdrücke:

$$\cdots\cdots\cdots

$$
\begin{aligned}
= & \left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\
& \times\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\
- & \left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\
& \times\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right)\\
+ & \left\{\begin{array}{l}(\bar{\omega}_1\cos w_{20}-\bar{\omega}_2\cos w_{01})\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0{}^2}\\ +(\bar{\omega}_1\cos w_{12}-\bar{\omega}_2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0\partial \bar{\omega}_1}+(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2\cos w_{12})\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2\partial \bar{\omega}_0}\end{array}\right\}\\
& \times\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}\right)\\
+ & \left\{\begin{array}{l}(\bar{\omega}_1\cos w_{20}-\bar{\omega}_2\cos w_{01})\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_0\partial \bar{\omega}_1}\\ +(\bar{\omega}_1\cos w_{12}-\bar{\omega}_2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1{}^2}+(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2\cos w_{12})\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1\partial \bar{\omega}_2}\end{array}\right\}\\
& \times\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_2}\right)\\
+ & \left\{\begin{array}{l}(\bar{\omega}_1\cos w_{20}-\bar{\omega}_2\cos w_{01})\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2\partial \bar{\omega}_0}\\ +(\bar{\omega}_1\cos w_{12}-\bar{\omega}_2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_1\partial \bar{\omega}_2}+(\bar{\omega}_1-\bar{\omega}_2\cos w_{12})\dfrac{\partial^2 u}{\partial \bar{\omega}_2{}^2}\end{array}\right\}\\
& \times\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial \bar{\omega}_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)$$

$$\times\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)$$

$$-\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)$$

$$\times\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}\right)$$

$$+(\overline{\omega}_1\cos w_{20}-\overline{\omega}_2\cos w_{01})\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0{}^2}\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}\right)\\+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0\partial\overline{\omega}_1}\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)\\+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2\partial\overline{\omega}_0}\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}\right)\end{array}\right\}$$

$$+(\overline{\omega}_1\cos w_{12}-\overline{\omega}_2)\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_0\partial\overline{\omega}_1}\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}\right)\\+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_1{}^2}\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)\\+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_1\partial\overline{\omega}_2}\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}\right)\end{array}\right\}$$

$$+(\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_2\cos w_{12})\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2\partial\overline{\omega}_0}\left(\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}-\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}\right)\\+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_1\partial\overline{\omega}_2}\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_2}\right)\\+\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\omega}_2{}^2}\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\overline{\omega}_0}\right)\end{array}\right\}.$$

Mit Rücksicht auf die bekannten Formeln:

$$\sin w_{01}=-\sin(w_{12}+w_{20}),$$

$$\sin w_{12}=-\sin(w_{20}+w_{01}),$$

$$\sin w_{20}=-\sin(w_{01}+w_{12})$$

findet man leicht:

$$\begin{aligned}
&\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\
&\times\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\
-&\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\
&\times\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}\right)\\
=&-\sin w_{12}\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}\\
&-\sin w_{12}\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}\\
&-\sin w_{12}\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2},
\end{aligned}$$

also:

35)

$$\begin{aligned}
&\left(\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\
&\times\left(\sin w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}-\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\
-&\left(\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}+\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}+\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)\\
&\times\left(\sin w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}-\sin w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}\right)\\
=&-\sin w_{12}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\right)^2+2\cos w_{01}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}\cdot\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}\right.\\
&\qquad+2\cos w_{12}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\\
&\qquad\left.+2\cos w_{20}\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\bar{\omega}_0}\right\}.
\end{aligned}$$

Aus den Formeln 20) erhellet, dass M' aus L' erhalten wir wenn man in L' alle unteren Indices oder Accente um eine Einhe erhöhet, und dass N' aus M' erhalten wird, wenn man in M' al unteren Indices oder Accente um eine Einheit erhöhet. Ganz eben erhält man also $\frac{\partial M'}{\partial\varphi}$ aus $\frac{\partial L'}{\partial\varphi}$ und $\frac{\partial N'}{\partial\varphi}$ aus $\frac{\partial M'}{\partial\varphi}$, so dass also a den obigen Ausdrücken von

$$\frac{\partial L'}{\partial\varphi}$$

ısdrücke von

$$\frac{\partial M'}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad \frac{\partial N'}{\partial \varphi}$$

eicht abgeleitet werden können.

ı dem Obigen ist Alles enthalten, was zur leichten und unmittel- Ableitung der den Krümmungskreis einer Curve bestimmenden ıln aus der Gleichung der Curve erforderlich ist. Es werden Umgestaltungen und weitere Entwickelungen der allgemeinen ıln möglich sein; um jedoch für diesen Gegenstand jetzt nicht zu grossen Raum in Anspruch zu nehmen, breche ich diese ıeinen Untersuchungen hier ab, hoffe aber späterhin auf die- zurückzukommen.

IV.

Das Theorem von Brianchon von den Kegelschnitten.

§. 5.

dem durch die Gleichung

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + 2Dp_0p_1 + 2Ep_1p_2 + 2Fp_2p_0 = 0$$

terisirten Kegelschnitte seien

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A},\ \overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

Punkte, und

$$\begin{array}{lll} \overset{1}{p_0}, & \overset{1}{p_1}, & \overset{1}{p_2}; \\ \overset{2}{p_0}, & \overset{2}{p_1}, & \overset{2}{p_2}; \\ \overset{3}{p_0}, & \overset{3}{p_1}, & \overset{3}{p_2}; \\ \overset{4}{p_0}, & \overset{4}{p_1}, & \overset{4}{p_2}; \\ \overset{5}{p_0}, & \overset{5}{p_1}, & \overset{5}{p_2}; \\ \overset{6}{p_0}, & \overset{6}{p_1}, & \overset{6}{p_2} \end{array}$$

seien die Coordinaten dieser Punkte; dann sind nach 17) die Gle chungen der Berührenden des Kegelschnitts in diesen sechs Punkte beziehungsweise:

$$(\overset{1}{A}p_0+\overset{1}{D}p_1+\overset{1}{F}p_2)p_0+(\overset{1}{D}p_0+\overset{1}{B}p_1+\overset{1}{E}p_2)p_1+(\overset{1}{F}p_0+\overset{1}{E}p_1+\overset{1}{C}p_2)p_2=($$

$$(\overset{2}{A}p_0+\overset{2}{D}p_1+\overset{2}{F}p_2)p_0+(\overset{2}{D}p_0+\overset{2}{B}p_1+\overset{2}{E}p_2)p_1+(\overset{2}{F}p_0+\overset{2}{E}p_1+\overset{2}{C}p_2)p_2=($$

$$(\overset{3}{A}p_0+\overset{3}{D}p_1+\overset{3}{F}p_2)p_0+(\overset{3}{D}p_0+\overset{3}{B}p_1+\overset{3}{E}p_2)p_1+(\overset{3}{F}p_0+\overset{3}{E}p_1+\overset{3}{C}p_2)p_2=($$

$$(\overset{4}{A}p_0+\overset{4}{D}p_1+\overset{4}{F}p_2)p_0+(\overset{4}{D}p_0+\overset{4}{B}p_1+\overset{4}{E}p_2)p_1+(\overset{4}{F}p_0+\overset{4}{E}p_1+\overset{4}{C}p_2)p_2=($$

$$(\overset{5}{A}p_0+\overset{5}{D}p_1+\overset{5}{F}p_2)p_0+(\overset{5}{D}p_0+\overset{5}{B}p_1+\overset{5}{E}p_2)p_1+(\overset{5}{F}p_0+\overset{5}{E}p_1+\overset{5}{C}p_2)p_2=($$

$$(\overset{6}{A}p_0+\overset{6}{D}p_1+\overset{6}{F}p_2)p_0+(\overset{6}{D}p_0+\overset{6}{B}p_1+\overset{6}{E}p_2)p_1+(\overset{6}{F}p_0+\overset{6}{E}p_1+\overset{6}{C}p_2)p_2=($$

Legen wir aber als Fundamentaldreieck das Dreieck $\overset{4}{A}\overset{5}{A}\overset{6}{A}$ z Grunde, und nehmen $\overset{4}{A}\overset{5}{A}$, $\overset{5}{A}\overset{6}{A}$, $\overset{6}{A}\overset{4}{A}$ als 1ste, 2te, 3te Seite desselbe an, so ist:

$$\overset{4}{p}_0=0,\quad \overset{4}{p}_2=0;\quad \overset{5}{p}_0=0,\quad \overset{5}{p}_1=0;\quad \overset{6}{p}_1=0,\quad \overset{6}{p}_2=0;$$

und die Gleichungen der sechs Berührenden sind also:

$$(\overset{1}{A}p_0+\overset{1}{D}p_1+\overset{1}{F}p_2)p_0+(\overset{1}{D}p_0+\overset{1}{B}p_1+\overset{1}{E}p_2)p_1+(\overset{1}{F}p_0+\overset{1}{E}p_1+\overset{1}{C}p_2)p_2=0$$

$$(\overset{2}{A}p_0+\overset{2}{D}p_1+\overset{2}{F}p_2)p_0+(\overset{2}{D}p_0+\overset{2}{B}p_1+\overset{2}{E}p_2)p_1+(\overset{2}{F}p_0+\overset{2}{E}p_1+\overset{2}{C}p_2)p_2=0$$

$$(\overset{3}{A}p_0+\overset{3}{D}p_1+\overset{3}{F}p_2)p_0+(\overset{3}{D}p_0+\overset{3}{B}p_1+\overset{3}{E}p_2)p_1+(\overset{3}{F}p_0+\overset{3}{F}p_1+\overset{3}{C}p_2)p_2=0$$

$$\overset{1}{D}p_0+\overset{1}{B}p_1+\overset{1}{E}p_2=0,$$

$$\overset{1}{F}p_0+\overset{1}{E}p_1+\overset{1}{C}p_2=0,$$

$$\overset{1}{A}p_0+\overset{1}{D}p_1+\overset{1}{F}p_2=0.$$

Weil aber die Punhte $\overset{4}{A}$, $\overset{5}{A}$, $\overset{6}{A}$ in dem Kegelschnitte liegen, ist wegen dessen obiger Gleichung:

$$\overset{4}{B}p_1^{\,2}=0,\qquad \overset{5}{C}p_2^{\,2}=0,\qquad \overset{6}{A}p_0^{\,2}=0;$$

also:

$$A=0,\qquad B=0,\qquad C=0;$$

und die Gleichungen der obigen sechs Berührenden sind folgli nach der Reihe:

$$(D\overset{1}{p}_1+F\overset{1}{p}_2)p_0+(D\overset{1}{p}_0+E\overset{1}{p}_2)p_1+(F\overset{1}{p}_0+E\overset{1}{p}_1)p_2=0,$$

$$(D\overset{2}{p}_1+F\overset{2}{p}_2)p_0+(D\overset{2}{p}_0+E\overset{2}{p}_2)p_1+(F\overset{2}{p}_0+E\overset{2}{p}_1)p_2=0,$$

$$(D\overset{3}{p}_1+F\overset{3}{p}_2)p_0+(D\overset{3}{p}_0+E\overset{3}{p}_2)p_1+(F\overset{3}{p}_0+E\overset{3}{p}_1)p_2=0,$$

$$Dp_0+Ep_2=0,$$

$$Fp_0+Ep_1=0,$$

$$Dp_1+Fp_2=0.$$

Wir suchen nun die Durchschnittspunkte der Berührenden in

$$\overset{1}{A},\ \overset{2}{A} \quad \text{und} \quad \overset{4}{A},\ \overset{5}{A};$$

$$\overset{2}{A},\ \overset{3}{A} \quad \text{und} \quad \overset{5}{A},\ \overset{6}{A};$$

$$\overset{3}{A},\ \overset{4}{A} \quad \text{und} \quad \overset{6}{A},\ \overset{1}{A};$$

welche als Ecken des von den sechs Berührenden gebildeten um den Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks einander gegenüberstehen, mittelst der allgemeinen Formeln der Aufgabe in Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. §. 10.

Immer in den Bezeichnungen des vorher genannten Paragraphen ist für die beiden den Punkten

$$\overset{1}{A},\quad \overset{2}{A}$$

entsprechenden Berührenden:

$$L=D\overset{1}{p}_1+F\overset{1}{p}_2,\qquad M=D\overset{1}{p}_0+E\overset{1}{p}_2,\qquad N=F\overset{1}{p}_0+E\overset{1}{p}_1;$$

$$L'=D\overset{2}{p}_1+F\overset{2}{p}_2,\qquad M'=D\overset{2}{p}_0+E\overset{2}{p}_2,\qquad N'=F\overset{2}{p}_0+E\overset{2}{p}_1;$$

folglich, wie man leicht findet:

$$LM'-ML'$$
$$=-D\{D(\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1-\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0)-E(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2-\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)-F(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_0-\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_2)\},$$

$$MN'-NM'$$
$$=-E\{-D(\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1-\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0)+E(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2-\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)-F(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_0-\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_2)\},$$

$$NL'-LN'$$
$$=-F\{-D(\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_1-\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_0)-E(\overset{1}{p}_1\overset{2}{p}_2-\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_1)+F(\overset{1}{p}_2\overset{2}{p}_0-\overset{1}{p}_0\overset{2}{p}_2)\}$$

oder, wenn der Kürze wegen:

$$\overset{12}{P}_{01} = \overset{1\,2}{p}_0 \overset{1\,2}{p}_1 - \overset{1\,2}{p}_1 \overset{1\,2}{p}_0, \quad \overset{12}{P}_{12} = \overset{1\,2}{p}_1 \overset{1\,2}{p}_2 - \overset{1\,2}{p}_2 \overset{1\,2}{p}_1, \quad \overset{12}{P}_{20} = \overset{1\,2}{p}_2 \overset{1\,2}{p}_0 - \overset{1\,2}{p}_0 \overset{1\,2}{p}_2$$

gesetzt wird:

$$LM' - ML' = -D\{\ \overset{12}{D}P_{01} - \overset{12}{E}P_{12} - \overset{12}{F}P_{20}\},$$

$$MN' - NM' = -E\{-\overset{12}{D}P_{01} + \overset{12}{E}P_{12} - \overset{12}{F}P_{20}\},$$

$$NL' - LN' = -F\{-\overset{12}{D}P_{01} - \overset{12}{E}P_{12} + \overset{12}{F}P_{20}\};$$

also:

$$\begin{aligned}(LM' - ML')\sin w_{01} + (MN' - NM')\sin w_{12} + (NL' - LN')\sin w_{20}\\ = \overset{01}{D}P_{01}(-D\sin w_{01} + E\sin w_{12} + F\sin w_{20})\\ + \overset{12}{E}P_{12}(\ D\sin w_{01} - E\sin w_{12} + F\sin w_{20})\\ + \overset{12}{F}P_{20}(\ D\sin w_{01} + E\sin w_{12} - F\sin w_{20}).\end{aligned}$$

Für die beiden den Punkten

$$\overset{4}{A}, \quad \overset{5}{A}$$

entsprechenden Berührenden ist:

$$L = D, \quad M = 0, \quad N = E;$$

$$L' = F, \quad M' = E, \quad N' = 0;$$

also:

$$\begin{aligned}LM' - ML' &= ED,\\ MN' - NM' &= -EE,\\ NL' - LN' &= EF;\end{aligned}$$

folglich:

$$\begin{aligned}(LM' - ML')\sin w_{01} + (MN' - NM')\sin w_{12} + (NL' - LN')\sin w_{20}\\ = E(D\sin w_{01} - E\sin w_{12} + F\sin w_{20}).\end{aligned}$$

Für die beiden den Punkten

$$\overset{2}{A}, \quad \overset{3}{A}$$

entsprechenden Berührenden ist:

$$L = D\overset{2}{p}_1 + F\overset{2}{p}_2, \quad M = D\overset{2}{p}_0 + E\overset{2}{p}_2, \quad N = F\overset{2}{p}_0 + E\overset{2}{p}_1;$$

$$L' = D\overset{3}{p}_1 + F\overset{3}{p}_2, \quad M' = D\overset{3}{p}_0 + E\overset{3}{p}_2, \quad N' = F\overset{3}{p}_0 + E\overset{3}{p}_1;$$

also nach dem Obigen durch blosse Erhöhung der oberen Indices oder Accente um eine Einheit, wenn man der Kürze wegen

$$\overset{23}{P}_{01} = \overset{2}{p}_0\overset{3}{p}_1 - \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_0, \quad \overset{23}{P}_{12} = \overset{2}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_1, \quad \overset{23}{P}_{20} = \overset{2}{p}_2\overset{3}{p}_0 - \overset{2}{p}_0\overset{3}{p}_2$$

setzt:

$$LM' - ML' = -D\{\quad D\overset{23}{P}_{01} - E\overset{23}{P}_{12} - F\overset{23}{P}_{20}\},$$

$$MN' - NM' = -E\{-D\overset{23}{P}_{01} + E\overset{23}{P}_{12} - F\overset{23}{P}_{20}\},$$

$$NL' - LN' = -F\{-D\overset{23}{P}_{01} - E\overset{23}{P}_{12} + F\overset{23}{P}_{20}\};$$

folglich:

$$(LM' - ML')\sin w_{01} + (MN' - NM'\sin w_{12} + (NL' - LN')\sin w_{20}$$

$$= \quad D\overset{23}{P}_{01}(-D\sin w_{01} + E\sin w_{12} + F\sin w_{20})$$

$$+ E\overset{23}{P}_{12}(\quad D\sin w_{01} - E\sin w_{12} + F\sin w_{20})$$

$$+ F\overset{23}{P}_{20}(\quad D\sin w_{01} + E\sin w_{12} - F\sin w_{20}).$$

Für die beiden den Punkten

$$\overset{5}{A}, \qquad \overset{6}{A}$$

entsprechenden Berührenden ist:

$$L = F, \qquad M = E, \qquad N = 0;$$

$$L' = 0, \qquad M' = D, \qquad N' = F;$$

also:

$$LM' - ML' = \quad FD,$$

$$MN' - NM' = \quad FE,$$

$$NL' - LN' = -FF;$$

folglich:

$$(LM' - ML')\sin w_{01} + (MN' - NM')\sin w_{12} + (NL' - LN')$$

$$= F(D\sin w_{01} + E\sin w_{12} - F\sin w_{20}).$$

Für die beiden den Punkten

$$\overset{3}{A}, \quad \overset{4}{A}$$

entsprechenden Berührenden ist:

$$L = D\overset{3}{p}_1 + F\overset{3}{p}_2, \quad M = D\overset{3}{p}_0 + E\overset{3}{p}_2, \quad N = F\overset{3}{p}_0 + E\overset{3}{p}_1;$$

$$L' = D, \quad M' = 0, \quad N' = E;$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$LM' - ML' = -D(D\overset{3}{p}_0 + E\overset{3}{p}_2),$$

$$MN' - NM' = \quad E(D\overset{3}{p}_0 + E\overset{3}{p}_2),$$

$$NL' - LN' = \quad F(D\overset{3}{p}_0 - E\overset{3}{p}_2);$$

folglich:

$$(LM' - ML')\sin w_{01} + (MN' - NM')\sin w_{12} + (NL' - LN')\sin$$
$$= -D\overset{3}{p}_0(D\sin w_{01} - E\sin w_{12} - F\sin w_{20})$$
$$- E\overset{3}{p}_2(D\sin w_{01} - E\sin w_{12} + F\sin w_{20}).$$

Für die beiden den Punkten

$$\overset{6}{A}, \quad \overset{1}{A}$$

entsprechenden Berührenden ist:

$$L = 0, \quad M = D, \quad N = F;$$

$$L' = D\overset{1}{p}_1 + F\overset{1}{p}_2, \quad M' = D\overset{1}{p}_0 + E\overset{1}{p}_2, \quad N' = F\overset{1}{p}_0 + E\overset{1}{p}_1;$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$LM' - ML' = -D(D\overset{1}{p}_1 + F\overset{1}{p}_2),$$

$$MN' - NM' = \quad E(D\overset{1}{p}_1 - F\overset{1}{p}_2),$$

$$NL' - LN' = \quad F(D\overset{1}{p}_1 + F\overset{1}{p}_2);$$

folglich:

$$(LM' - ML')\sin w_{01} + (MN' - NM')\sin w_{12} + (NL' - LN')\sin$$
$$= -D\overset{1}{p}_1(D\sin w_{01} - E\sin w_{12} - F\sin w_{20})$$
$$- F\overset{1}{p}_2(D\sin w_{01} + E\sin w_{12} - F\sin w_{20}).$$

Nach den Formeln der Aufgabe in Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. 6. suchen wir nun die Gleichungen der Geraden, welche die gegenüberstehenden Ecken des von den sechs Berührenden gebildeten, um den Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks mit einander verbinden, indem wir bei dieser Rechnung, was nach den genannten Formeln offenbar verstattet ist, die Nenner in den Coordinaten der vorher betrachteten sechs Durchschnittspunkte der Berührenden ganz unberücksichtigt lassen und auch von dem gemeinschaftlichen Factor J absehen, unter Beachtung welcher Bemerkung die nachstehende Rechnung auch ohne weitere Erläuterung gewiss völlig verständlich sein wird.

) . . . . . $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}$ und $\overset{4}{A}, \overset{5}{A}$.

Weil, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned} &-F\{-\overset{12}{DP}_{01}-\overset{12}{EP}_{12}+\overset{12}{FP}_{20}\}.ED \\ &+D\{\ \overset{12}{DP}_{01}-\overset{12}{EP}_{12}-\overset{12}{FP}_{20}\}.EF \end{aligned}\right\} = 2DEF.(\overset{12}{DP}_{01}-\overset{12}{FP}_{20}),$$

$$\left.\begin{aligned} &-D\{\ \overset{12}{DP}_{01}-\overset{12}{EP}_{12}-\overset{12}{FP}_{20}\}.-EE \\ &+E\{-\overset{12}{DP}_{01}+\overset{12}{EP}_{12}-\overset{12}{FP}_{20}\}.\ \ ED \end{aligned}\right\} = -2DEF.\overset{12}{EP}_{20},$$

$$\left.\begin{aligned} &-E\{-\overset{12}{DP}_{01}+\overset{12}{EP}_{12}-\overset{12}{FP}_{20}\}.EF \\ &-F\{-\overset{12}{DP}_{01}-\overset{12}{EP}_{12}+\overset{12}{FP}_{20}\}.EE \end{aligned}\right\} = 2DEF.\overset{12}{EP}_{01}$$

; so ist die Gleichung der entsprechenden Verbindungslinie:

$$(\overset{12}{DP}_{01}-\overset{12}{FP}_{20})p_0-\overset{12}{EP}_{20}.p_1+\overset{12}{EP}_{01}.p_2=0.$$

) . . . . . $\overset{2\,3}{A}\overset{}{A}$ und $\overset{5\,6}{A}\overset{}{A}$.

Weil, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{aligned} &-F\{-\overset{23}{DP}_{01}-\overset{23}{EP}_{12}+\overset{23}{FP}_{20}\}.FD \\ &-D\{\ \overset{23}{DP}_{01}-\overset{23}{EP}_{12}-\overset{23}{FP}_{20}\}.FF \end{aligned}\right\} = 2DEF.\overset{23}{FP}_{12},$$

$$\left.\begin{aligned} &-D\{\ \overset{23}{DP}_{01}-\overset{23}{EP}_{12}-\overset{23}{FP}_{20}\}.FE \\ &+E\{-\overset{23}{DP}_{01}+\overset{23}{EP}_{12}-\overset{23}{FP}_{20}\}.FD \end{aligned}\right\} = -2DEF.(\overset{23}{DP}_{01}-\overset{23}{EP}_{12}),$$

$$\left.\begin{aligned} &E\{-\overset{23}{DP}_{01}+\overset{23}{EP}_{12}-\overset{23}{FP}_{20}\}.FF \\ &+F\{-\overset{23}{DP}_{01}-\overset{23}{EP}_{12}+\overset{23}{FP}_{20}\}.EF \end{aligned}\right\} = -2DEF.\overset{23}{FP}_{01}$$

ist; so ist die Gleichung der entsprechenden Verbindungslinie:

$$\overset{23}{FP}_{12}.p_0-(\overset{23}{DP}_{01}-\overset{23}{EP}_{12})p_1-\overset{23}{FP}_{01}.p_2=0.$$

C) . . . . . $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$ und $\overset{6}{A}$, $\overset{1}{A}$.

Weil, wie man leicht findet:

$$\left.\begin{matrix} F(\overset{3}{Dp}_0-\overset{3}{Ep}_2).-D(\overset{1}{Dp}_1+\overset{1}{Fp}_2) \\ +D(\overset{3}{Dp}_0+\overset{3}{Ep}_2). \quad F(\overset{1}{Dp}_1+\overset{1}{Fp}_2) \end{matrix}\right\}=2DEF.(\overset{1}{Dp}_1+\overset{1}{Fp}_2)\overset{3}{p}_2,$$

$$\left.\begin{matrix} -D(\overset{3}{Dp}_0+\overset{3}{Ep}_2). \quad E(\overset{1}{Dp}_1-\overset{1}{Fp}_2) \\ -E(\overset{3}{Dp}_0+\overset{3}{Ep}_2).-D(\overset{1}{Dp}_1+\overset{1}{Fp}_2) \end{matrix}\right\}=2DEF.(\overset{3}{Dp}_0+\overset{3}{Ep}_2)\overset{1}{p}_2,$$

$$\left.\begin{matrix} E(\overset{3}{Dp}_0+\overset{3}{Ep}_2).F(\overset{1}{Dp}_1+\overset{1}{Fp}_2) \\ -F(\overset{3}{Dp}_0-\overset{3}{Ep}_2).E(\overset{1}{Dp}_1-\overset{1}{Fp}_2) \end{matrix}\right\}=2DEF.(\overset{3}{Ep}_2\overset{1}{p}_1+\overset{3}{Fp}_0\overset{1}{p}_2)$$

ist, so ist die Gleichung der entsprechenden Verbindungslinie:

$$(\overset{1}{Dp}_1+\overset{1}{Fp}_2)\overset{3}{p}_2p_0+(\overset{3}{Dp}_0+\overset{3}{Ep}_2)\overset{1}{p}_2p_1+(\overset{3}{Ep}_2\overset{1}{p}_1+\overset{3}{Fp}_0\overset{1}{p}_2)p_2=0.$$

Um nun mittelst der in Thl. XXXVIII. Nr. XXXVI. §. 10. entwickelten Formeln die Coordinaten des Durchschnittspunkts der zwei ersten der drei vorhergehenden Verbindungslinien zu finden, setzen wir:

$$L=\overset{12}{DP}_{01}-\overset{12}{FP}_{20}, \qquad M=-\overset{12}{EP}_{20}, \qquad N=\overset{12}{EP}_{01};$$

$$L'=\overset{23}{FP}_{12}, \qquad M'=-(\overset{23}{DP}_{01}-\overset{23}{EP}_{12}), \qquad N'=-\overset{23}{FP}_{01};$$

dann ist, wie man leicht findet:

$$LM'-ML'=D(-\overset{12}{DP}_{01}\overset{23}{P}_{01}+\overset{12}{EP}_{01}\overset{23}{P}_{12}+\overset{12}{FP}_{20}\overset{23}{P}_{01}),$$

$$MN'-NM'=E(\quad \overset{12}{DP}_{01}\overset{23}{P}_{01}-\overset{12}{EP}_{01}\overset{23}{P}_{12}+\overset{12}{FP}_{20}\overset{23}{P}_{01}),$$

$$NL'-LN'=F(\quad \overset{12}{DP}_{01}\overset{23}{P}_{01}+\overset{12}{EP}_{01}\overset{23}{P}_{12}-\overset{12}{FP}_{20}\overset{23}{P}_{01})$$

und hieraus:

$$
\begin{aligned}
&(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}\\
&= D(-\overset{12}{D}\overset{23}{P}_{01}\overset{23}{P}_{01}+\overset{12}{E}\overset{23}{P}_{01}\overset{23}{P}_{12}+\overset{12}{F}\overset{23}{P}_{20}\overset{23}{P}_{01})\sin w_{01}\\
&\quad +E(\ \overset{12}{D}\overset{23}{P}_{01}\overset{23}{P}_{01}-\overset{12}{E}\overset{23}{P}_{01}\overset{23}{P}_{12}+\overset{12}{F}\overset{23}{P}_{20}\overset{23}{P}_{01})\sin w_{12}\\
&\quad +F(\ \overset{12}{D}\overset{23}{P}_{01}\overset{23}{P}_{01}+\overset{12}{E}\overset{23}{P}_{01}\overset{23}{P}_{12}-\overset{12}{F}\overset{23}{P}_{20}\overset{23}{P}_{01})\sin w_{20}\\
&= \overset{12}{D}\overset{23}{P}_{01}\overset{23}{P}_{01}(-D\sin w_{01}+E\sin w_{12}+F\sin w_{20})\\
&\quad +\overset{12}{E}\overset{23}{P}_{01}\overset{23}{P}_{12}(\ D\sin w_{01}-E\sin w_{12}+F\sin w_{20})\\
&\quad +\overset{12}{F}\overset{23}{P}_{20}\overset{23}{P}_{01}(\ D\sin w_{01}+E\sin w_{12}-F\sin w_{20}).
\end{aligned}
$$

Die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden ersten Verbindungslinien sind:

$$\frac{(MN'-NM')J}{(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}},$$

$$\frac{(NL'-LN')J}{(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}},$$

$$\frac{LM'-ML')J}{(LM'-ML')\sin w_{01}+(MN'-NM')\sin w_{12}+(NL'-LN')\sin w_{20}}.$$

Um nun zu untersuchen, ob die drei obigen Verbindungslinien sich in einem Punkte schneiden, müssen wir untersuchen, ob diese Coordinaten des Durchschnittspunkts der zwei ersten Verbindungslinien, für p_0, p_1, p_2 gesetzt, die Gleichung

$$(\overset{1}{D}p_1+\overset{1}{F}p_2)\overset{3}{p}_2p_0+(\overset{3}{D}p_0+\overset{3}{E}p_2)\overset{1}{p}_2p_1+(\overset{3}{E}\overset{1}{p}_2p_1+\overset{3}{F}\overset{1}{p}_0p_2)p_2=0$$

der dritten Verbindungslinie erfüllen, d. h. wir müssen untersuchen, ob die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&(MN'-NM')(\overset{1}{D}p_1+\overset{1}{F}p_2)\overset{3}{p}_2\\
&+(NL'-LN')(\overset{3}{D}p_0+\overset{3}{E}p_2)\overset{1}{p}_2\\
&+(LM'-ML')(\overset{3}{E}\overset{1}{p}_2p_1+\overset{3}{F}\overset{1}{p}_0p_2)
\end{aligned}\right\}=0,$$

also nach dem Obigen, ob die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} E(\ & DP_{01}^{12}{}^{23}P_{01} - EP_{01}^{12}{}^{23}P_{12} + FP_{20}^{12}{}^{23}P_{01})(Dp_1^{1} + Fp_2^{1})p_2^{3} \\ +F(\ & DP_{01}^{12}{}^{23}P_{01} + EP_{01}^{12}{}^{23}P_{12} - FP_{20}^{12}{}^{23}P_{01})(Dp_0^{3} + Ep_2^{3})p_2^{1} \\ +D(- & DP_{01}^{12}{}^{23}P_{01} + EP_{01}^{12}{}^{23}P_{12} + FP_{20}^{12}{}^{23}P_{01})(Ep_2^{3}p_1^{1} + Fp_0^{3}p_2^{1}) \end{aligned}\right\} = 0$$

erfüllt ist.

Diese Gleichung bringt man aber mittelst einer sehr leich Rechnung sogleich auf die Form:

$$DEF.(p_2^{1}p_2^{3}P_{01}^{12}{}^{23}P_{01} + p_0^{3}p_2^{1}P_{01}^{12}{}^{23}P_{12} + p_1^{1}p_2^{3}P_{20}^{12}{}^{23}P_{01}) = 0,$$

und diese Gleichung ist jederzeit erfüllt, wenn die Gleichung:

$$p_2^{1}p_2^{3}P_{01}^{12}{}^{23}P_{01} + p_0^{3}p_2^{1}P_{01}^{12}{}^{23}P_{12} + p_1^{1}p_2^{3}P_{20}^{12}{}^{23}P_{01} = 0,$$

also nach dem Obigen, wenn die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} & p_2^{1}p_2^{3}(p_0^{1}p_1^{2} - p_1^{1}p_0^{2})(p_0^{2}p_1^{3} - p_1^{2}p_0^{3}) \\ +& p_0^{3}p_2^{1}(p_0^{1}p_1^{2} - p_1^{1}p_0^{2})(p_1^{2}p_2^{3} - p_2^{2}p_1^{3}) \\ +& p_1^{1}p_2^{3}(p_2^{1}p_0^{2} - p_0^{1}p_2^{2})(p_0^{2}p_1^{3} - p_1^{2}p_0^{3}) \end{aligned}\right\} = 0,$$

oder wenn die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} & p_0^{3}p_2^{1}(p_0^{1}p_1^{2} - p_1^{1}p_0^{2})(p_1^{2}p_2^{3} - p_2^{2}p_1^{3}) \\ +& p_2^{3}p_1^{1}(p_0^{1}p_1^{2} - p_1^{1}p_0^{2})(p_2^{1}p_0^{2} - p_0^{1}p_2^{2}) \\ +& p_2^{3}p_2^{1}(p_0^{1}p_1^{2} - p_1^{1}p_0^{2})(p_0^{2}p_1^{3} - p_1^{2}p_0^{3}) \end{aligned}\right\} = 0$$

erfüllt ist.

Diese letztere Gleichung ist aber erfüllt, weil nach der Vo setzung die Punkte

$$A^{1},\ A^{2},\ A^{3},\ A^{4},\ A^{5},\ A^{6}$$

in einem Kegelschnitte liegen, wie in der vorhergehenden Abhan Nr. XXXIII. §. 3. bei dem Satze von Pascal gezeigt worde und die drei obigen Verbindungslinien schneiden sich also wi in einem Punkte, was unmittelbar zu dem folgenden Satze füh

Die drei Verbindungslinien der gegenüberstehenden Ecken eines um einen Kegelschnitt beschriebenen Sechsecks schneiden sich in einem Punkte.

Dies ist der Satz von Brianchon. Die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunkts der drei Verbindungslinien sind oben angegeben. Chasles nennt diesen Satz: Théorème corrélatif de celui de Pascal.

V.

Das Theorem von Chasles von den Berührenden der Kegelschnitte.

§. 6.

Vier Punkte eines Kegelschnitts seien

$$\overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

und ein fünfter Punkt desselben sei $\overset{0}{A}$; das Fundamentaldreieck sei $\overset{4}{A}\overset{5}{A}\overset{6}{A}$; dann sind nach dem vorhergehenden Paragraphen die Gleichungen der Berührenden des Kegelschnitts in den Punkten

$$\overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

beziehungsweise:

$$(D\overset{3}{p}_1 + F\overset{3}{p}_2)p_0 + (D\overset{3}{p}_0 + E\overset{3}{p}_2)p_1 + (F\overset{3}{p}_0 + E\overset{3}{p}_1)p_2 = 0,$$

$$Dp_0 + Ep_2 = 0,$$

$$Fp_0 + Ep_1 = 0,$$

$$Dp_1 + Fp_2 = 0;$$

und die Gleichung der Berührenden in dem Punkte $\overset{0}{A}$ ist:

$$(D\overset{0}{p}_1 + F\overset{0}{p}_2)p_0 + (D\overset{0}{p}_0 + E\overset{0}{p}_2)p_1 + (F\overset{0}{p}_0 + E\overset{0}{p}_1)p_2 = 0,$$

wo natürlich $\overset{0}{p}_0, \overset{0}{p}_1, \overset{0}{p}_2$ die Coordinaten des Punktes $\overset{0}{A}$ sind.

Wir wollen nun die Coordinaten der Durchschnittspunkte der

Für die Coordinaten

$$\overset{6}{P}_0, \quad \overset{6}{P}_1, \quad \overset{6}{P}_2$$

hat man zu setzen:

$$L = D\overset{0}{p}_1 + F\overset{0}{p}_2, \qquad M = D\overset{0}{p}_0 + E\overset{0}{p}_2, \qquad N = F\overset{0}{p}_0 + E\overset{0}{p}_1;$$

$$L' = 0, \qquad M' = D, \qquad N' = F;$$

und erhält leicht:

$$LM' - ML' = D(D\overset{0}{p}_1 + F\overset{0}{p}_2),$$

$$MN' - NM' = E(F\overset{0}{p}_2 - D\overset{0}{p}_1),$$

$$NL' - LN' = -F(D\overset{0}{p}_1 + F\overset{0}{p}_2);$$

also:

$$(LM' - ML')\sin w_{01} + (MN' - NM')\sin w_{12} + (NL' - LN')\sin$$

$$= D\overset{0}{p}_1(D\sin w_{01} - E\sin w_{12} - F\sin w_{20})$$

$$+ F\overset{0}{p}_2(D\sin w_{01} + E\sin w_{12} - F\sin w_{20}).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$G = D\sin w_{01} - E\sin w_{12} - F\sin w_{20},$$

$$G' = D\sin w_{01} - E\sin w_{12} + F\sin w_{20},$$

$$G'' = D\sin w_{01} + E\sin w_{12} - F\sin w_{20};$$

so ist:

$$\overset{3}{P}_0 = \frac{E\{D(\overset{0}{p}_0\overset{3}{p}_1 - \overset{0}{p}_1\overset{3}{p}_0) + E(\overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_1 - \overset{0}{p}_1\overset{3}{p}_2) + F(\overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_0 - \overset{0}{p}_0\overset{3}{p}_2}{GD(\overset{0}{p}_1\overset{3}{p}_0 - \overset{0}{p}_0\overset{3}{p}_1) + G'E(\overset{0}{p}_1\overset{3}{p}_2 - \overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_1) + G''F(\overset{0}{p}_2\overset{3}{p}_0 -$$

$$\overset{4}{P}_0 = -\frac{E(D\overset{0}{p}_0 + E\overset{0}{p}_2)J}{GD\overset{0}{p}_0 + G'E\overset{0}{p}_2},$$

$$\overset{5}{P}_0 = -\frac{E(F\overset{0}{p}_0 + E\overset{0}{p}_1)J}{G'E\overset{0}{p}_1 - G''F\overset{0}{p}_0},$$

$$\overset{6}{P}_0 = \frac{E(F\overset{0}{p}_2 - D\overset{0}{p}_1)J}{GD\overset{0}{p}_1 + G''F\overset{0}{p}_2}.$$

Weil es sich aber, wie wir sehen werden, im Folgenden bloss Verhältnisse dieser Grössen handelt, so ist es offenbar verstattet, zer zu setzen:

$$= \frac{D(\overset{0}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_0}) + E(\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_2}) + F(\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_0} - \overset{0}{p_0}\overset{3}{p_2})}{GD(\overset{0}{p_1}\overset{3}{p_0} - \overset{0}{p_0}\overset{3}{p_1}) + G'E(\overset{0}{p_1}\overset{3}{p_2} - \overset{0}{p_2}\overset{3}{p_1}) + G''F(\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_0} - \overset{0}{p_0}\overset{3}{p_2})},$$

$$\overset{}{}_0 = -\frac{D\overset{0}{p_0} + E\overset{0}{p_2}}{GD\overset{0}{p_0} + G'E\overset{0}{p_2}},$$

$$\overset{5}{P}_0 = -\frac{F\overset{0}{p_0} + E\overset{0}{p_1}}{G'E\overset{0}{p_1} - G''F\overset{0}{p_0}},$$

$$\overset{6}{P}_0 = \frac{F\overset{0}{p_2} - D\overset{0}{p_1}}{G''F\overset{0}{p_2} + GD\overset{0}{p_1}}.$$

Wir betrachten nun das Verhältniss:

$$\frac{\overset{5}{P}_0 - \overset{3}{P}_0}{\overset{6}{P}_0 - \overset{3}{P}_0} : \frac{\overset{5}{P}_0 - \overset{4}{P}_0}{\overset{6}{P}_0 - \overset{4}{P}_0}$$

ler, was dasselbe ist, das Verhältniss:

$$\frac{\frac{1}{\overset{3}{P}_0} - \frac{1}{\overset{5}{P}_0}}{\frac{1}{\overset{3}{P}_0} - \frac{1}{\overset{6}{P}_0}} : \frac{\frac{1}{\overset{4}{P}_0} - \frac{1}{\overset{5}{P}_0}}{\frac{1}{\overset{4}{P}_0} - \frac{1}{\overset{6}{P}_0}},$$

ıd finden mittelst der vorhergehenden Formeln ohne alle Schwiegkeit:

$$\frac{1}{\overset{3}{P}_0} - \frac{1}{\overset{5}{P}_0} = -\frac{\left\{\begin{array}{l} DF(G''+G)\overset{0}{p_0} \\ +DE(G-G')\overset{0}{p_1} \\ +EF(G'+G'')\overset{0}{p_2} \end{array}\right\}}{(F\overset{0}{p_0} + E\overset{0}{p_1})\left\{\begin{array}{l} D(\overset{0}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_0}) \\ +E(\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_2}) \\ +F(\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_0} - \overset{0}{p_0}\overset{3}{p_2}) \end{array}\right\}} (\overset{0}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_0})$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{P_0} - \frac{\frac{1}{6}}{P_0} = -\frac{\left\{\begin{array}{c} DF(G''+G)\overset{0}{p_0} \\ +DE(G-G')\overset{0}{p_1} \\ +EF(G'+G'')\overset{0}{p_2} \end{array}\right\}}{(F\overset{0}{p_2} - D\overset{0}{p_1})\left\{\begin{array}{c} D(\overset{0}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_0}) \\ +E(\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_2}) \\ +F(\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_0} - \overset{0}{p_0}\overset{3}{p_2}) \end{array}\right\}} (\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_2});$$

also:

$$\frac{\frac{1}{5}}{\frac{P_0}{1}} - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{P_0}{1}} = \frac{F\overset{0}{p_2} - D\overset{0}{p_1}}{F\overset{0}{p_0} + E\overset{0}{p_1}} \cdot \frac{\overset{0}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_0}}{\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_2}};$$

ferner:

$$\frac{\frac{1}{4}}{P_0} - \frac{\frac{1}{5}}{P_0}$$

$$= -\frac{DF(G''+G)\overset{0}{p_0} + DE(G-G')\overset{0}{p_1} + EF(G'+G'')\overset{0}{p_2}}{(D\overset{0}{p_0} + E\overset{0}{p_2})(F\overset{0}{p_0} + E\overset{0}{p_1})}\overset{0}{p_0},$$

$$\frac{\frac{1}{4}}{P_0} - \frac{\frac{1}{6}}{P_0}$$

$$= -\frac{DF(G''+G)\overset{0}{p_0} + DE(G-G')\overset{0}{p_1} + EF(G'+G'')\overset{0}{p_2}}{(D\overset{0}{p_0} + E\overset{0}{p_2})(F\overset{0}{p_2} - D\overset{0}{p_1})}\overset{0}{p_2};$$

also:

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{P_0}{1}} - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{P_0}{1}} = \frac{\overset{0}{p_0}}{\overset{0}{p_2}} \cdot \frac{F\overset{0}{p_2} - D\overset{0}{p_1}}{F\overset{0}{p_0} + E\overset{0}{p_1}}.$$

Hieraus ergiebt sich auf der Stelle:

$$\frac{\frac{1}{3}}{P_0} - \frac{\frac{1}{5}}{P_0} : \frac{\frac{1}{4}}{P_0} - \frac{\frac{1}{5}}{P_0} = \frac{\overset{0}{p_2}(\overset{0}{p_0}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_0})}{\overset{0}{p_0}(\overset{0}{p_2}\overset{3}{p_1} - \overset{0}{p_1}\overset{3}{p_2})}.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$K = \frac{p_2^{0\,0\,3}(p_0^{0\,0\,3}p_1^{0\,3} - p_1^{0\,3}p_0^{0\,3})}{p_0^{0\,0\,3}(p_2^{0\,0\,3}p_1^{0\,3} - p_1^{0\,3}p_2^{0\,3})},$$

ist, wie man sogleich übersieht:

$$1 - K = \frac{p_1^{0\,3\,0}(p_0^{0\,3\,0}p_2^{0\,3} - p_0^{0\,3}p_2^{0\,3})}{p_0^{0\,3\,0}(p_2^{0\,3\,0}p_1^{0\,3} - p_1^{0\,3}p_2^{0\,3})}.$$

Aus der vorhergehenden Abhandlung §. 8. bei dem Theorem von appus wissen wir, dass die Gleichung des Kegelschnitts

$$\frac{p_2^{0\,3\,0}p_2^{0\,3}(p_0^{0\,3\,0}p_1^{0\,3} - p_1^{0\,3}p_0^{0\,3})}{p_1^{0\,3\,0}(p_2^{0\,3\,0}p_0^{0\,3} - p_0^{0\,3}p_2^{0\,3})} \cdot p_0p_1 + \frac{p_0^{0\,3\,0}p_0^{0\,3}(p_1^{0\,3\,0}p_2^{0\,3} - p_2^{0\,3}p_1^{0\,3})}{p_1^{0\,3\,0}(p_2^{0\,3\,0}p_0^{0\,3} - p_0^{0\,3}p_2^{0\,3})} \cdot p_1p_2 + p_1^{3} \cdot p_2p_0 = 0,$$

ler:

$$\frac{p_2^{0\,3\,0}p_2^{0\,3}(p_0^{0\,3\,0}p_1^{0\,3} - p_1^{0\,3}p_0^{0\,3})}{p_0^{0\,3\,0}p_0^{0\,3}(p_1^{0\,3\,0}p_2^{0\,3} - p_2^{0\,3}p_1^{0\,3})} \cdot p_0p_1 + p_1p_2 + \frac{p_1^{0\,3\,0}p_1^{0\,3}(p_2^{0\,3\,0}p_0^{0\,3} - p_0^{0\,3}p_2^{0\,3})}{p_0^{0\,3\,0}p_0^{0\,3}(p_1^{0\,3\,0}p_2^{0\,3} - p_2^{0\,3}p_1^{0\,3})} \cdot p_2p_0 = 0,$$

ler:

$$-p_2^{3} \cdot \frac{p_2^{0\,0\,3}(p_0^{0\,0\,3}p_1^{0\,3} - p_1^{0\,3}p_0^{0\,3})}{p_0^{0\,0\,3}(p_2^{0\,0\,3}p_1^{0\,3} - p_1^{0\,3}p_2^{0\,3})} \cdot p_0p_1 + p_0^{3} \cdot p_1p_2 - p_1^{3} \cdot \frac{p_1^{0\,3\,0}(p_0^{0\,3\,0}p_2^{0\,3} - p_0^{0\,3}p_2^{0\,3})}{p_0^{0\,3\,0}(p_2^{0\,3\,0}p_1^{0\,3} - p_1^{0\,3}p_2^{0\,3})} \cdot p_2p_0 = 0,$$

ılglich nach dem Obigen:

$$-Kp_2^{3} \cdot p_0p_1 + p_0^{3} \cdot p_1p_2 - (1-K)p_1^{3} \cdot p_2p_0 = 0$$

der

$$Kp_2^{3} \cdot p_0p_1 - p_0^{3} \cdot p_1p_2 + (1-K)p_1^{3} \cdot p_2p_0 = 0$$

t.

Nehmen wir nun in dem Kegelschnitte einen beliebigen durch ie Coordinaten $\bar{\omega}_0$, $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ bestimmten Punkt an, so ist nach dieser leichung des Kegelschnitts:

$$Kp_2^{3} \cdot \bar{\omega}_0\bar{\omega}_1 - p_0^{3} \cdot \bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 + (1-K)p_1^{3} \cdot \bar{\omega}_2\bar{\omega}_0 = 0,$$

oraus sich

$$K = \frac{\bar{\omega}_2(\bar{\omega}_0^{3}p_1 - \bar{\omega}_1^{3}p_0)}{\bar{\omega}_0(\bar{\omega}_2^{3}p_1 - \bar{\omega}_1^{3}p_2)}$$

giebt.

Vergleicht man dies mit dem Obigen, so erhellet auf der S
dass die Grösse K, folglich das Verhältniss

$$\frac{\overset{5}{P}_0-\overset{3}{P}_0}{\overset{6}{P}_0-\overset{3}{P}_0} : \frac{\overset{5}{P}_0-\overset{4}{P}_0}{\overset{6}{P}_0-\overset{4}{P}_0}$$

constant, nämlich von der Lage des Punktes $\overset{0}{A}$ in dem Kegels
ganz unabhängig ist.

Bezeichnen wir die Durchschnittspunkte der durch die Pu

$$\overset{3}{A},\ \overset{4}{A},\ \overset{5}{A},\ \overset{6}{A}$$

gelegten Berührenden des Kegelschnitts mit der durch den P
gelegten Berührenden desselben mit

$$a,\ b,\ c,\ d;$$

so wird sogleich erhellen, dass das Verhältniss

$$\frac{\overset{5}{P}_0-\overset{3}{P}_0}{\overset{6}{P}_0-\overset{3}{P}_0} : \frac{\overset{5}{P}_0-\overset{4}{P}_0}{\overset{6}{P}_0-\overset{4}{P}_0}$$

mit dem Verhältnisse

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd},$$

welchem Chasles in dem Traité de Géométrie supé
Chapitre II. 7. p. 7. den Namen rapport anharmoniq
quatres points beigelegt hat, einerlei ist*).

Das Obige führt nun unmittelbar zu dem folgenden Satze

Vier feste Berührende eines Kegelschnitts schn
jede beliebige fünfte Berührende desselben in
Punkten, deren anharmonisches Verhältniss co
ist**).

Dieser Satz und der Satz VII. in der vorhergehenden Abh
sind es vorzüglich, auf welche Chasles seine ganze b
Theorie der Kegelschnitte gegründet hat; er nennt den vo

---

*) Wir bedienen uns hier der von Chasles eingeführten Ben
absichtlich; andere Benennungen sind bekannt genug.

**) M. s. Traité des sections coniques par Chasles.
p. 3. N°. 5.

weiter Stelle genannten Satz oder eigentlich die in demselben aus-
sprochene Eigenschaft der Kegelschnitte: Propriété fonda-
entale relative aux points d'une conique, und den vorher
erster Stelle genannten Satz oder eigentlich die in demselben aus-
sprochene Eigenschaft der Kegelschnitte: Propriété fondamen-
le relative aux tangentes d'une conique; und sagt von
esen beiden Eigenschaften der Kegelschnitte:

„L'une et l'autre ont une égale importance dans toute la théorie;
les y jouent des rôles semblables. Elles donnent lieu naturellement
deux genres différents de propositions qui se correspondent dans
sens de la dualité ou de la corrélation, comme nous l'avons
posé dans notre premier volume — (Traité de Géométrie
périeure, p. XVII.) — Ainsi nous n'avons jamais besoin de faire
age, dans le Traité des Sections coniques que nous entreprenons,
principe de dualité ou de corrélation, parce que les démonstrations
correspondront toujours deux à deux et pourront être calquées
ne sur l'autre, comme les propositions mêmes."

Hat man einmal diese beiden Sätze und die übrigen in dieser
d der vorhergehenden Abhandlung bewiesenen allgemeinen Sätze
seiner Gewalt, so lässt sich der ganze übrige reiche Inhalt des
ichtigen Werkes von Chasles mit merkwürdiger Einfachheit,
leganz und Präcision daraus ableiten.

Möge das Vorhergehende dazu Einiges beitragen, dass dem
efflichen Werke des trefflichen Chasles über die Kegelschnitte auch
Deutschland immer grössere Beachtung zu Theil werde, was uns
is jetzt wenigstens nicht in dem Maasse, welches das Werk für sich
beanspruchen vollkommen berechtigt ist, leider noch nicht der Fall
sein scheint. Ausserdem werden diese und die vorhergehende Ab-
andlung hoffentlich geeignet sein, die sehr vortheilhafte und wich-
ige Anwendung des Systems der Dreilinien-Coordinaten auf einen sehr
nteressanten und wichtigen Gegenstand in das deutlichste Licht zu
tzen und dieses System zu immer allgemeinerer Anwendung zu
mpfehlen.

XXXV.

Ueber einen Ausdruck für die Oberfläche eines Polye von beliebiger Seitenflächenzahl.

Von

dem Herausgeber.

Die Seitenflächen eines Polyeders seien:

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots;$$

die Seiten der Seitenflächen

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots$$

seien beziehungsweise:

$$\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5, \ldots; \\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5, \ldots; \\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5, \ldots; \\ d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4,\ d_5, \ldots; \end{array}$$

u. s. w.

welche sämmtlich Kanten des Polyeders sind. Die an diesen Ka des Polyeders liegenden Flächenwinkel desselben seien beziehungsw

$$\begin{array}{l} \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\ \alpha_5, \ldots; \\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4,\ \beta_5, \ldots; \\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3,\ \gamma_4,\ \gamma_5, \ldots; \\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4,\ \delta_5, \ldots \end{array}$$

u. s. w.

Von einem Punkte O innerhalb des Polyeders denke man sich die Seitenflächen

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \ldots.$$

hungsweise die Perpendikel

$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \ldots.$$

lt.

Betrachten wir nun überhaupt zwei an einer beliebigen Kante a de Seitenflächen des Polyeders, die wir durch F_a und F_a' be- nen wollen; der an der Kante a liegende Flächenwinkel des ders sei α, und von dem Punkte O seien auf die Seitenflächen d F_a' beziehungsweise die Perpendikel p_a und p_a' gefällt. Das ck welches den Punkt O zur Spitze und die Kante a zur Grund- hat, sei Δ_a, und die Projectionen dieses Dreiecks, dessen Höhe durch H_a bezeichnen wollen, auf den Seitenflächen F_a und F_a' beziehungsweise D_a und D_a'; die Winkel, unter denen das ck Δ_a gegen die Seitenflächen F_a und F_a' geneigt ist, wollen beziehungsweise durch w_a und w_a' bezeichnen; dann ist nach bekannten Satze von den Projectionen:

$$\ldots\ldots D_a = \Delta_a \cos w_a, \qquad D_a' = \Delta_a \cos w_a'.$$

n aber

$$\Delta_a = \tfrac{1}{2} a H_a$$

ffenbar

$$p_a = H_a \sin w_a, \qquad p_a' = H_a \sin w_a'$$

ist:

$$\Delta_a = \frac{a p_a}{2 \sin w_a}, \qquad \Delta_a = \frac{a p_a'}{2 \sin w_a'};$$

ch nach 1):

$$\ldots\ldots D_a = \frac{a p_a}{2} \cot w_a, \qquad D_a' = \frac{a p_a'}{2} \cot w_a';$$

daher:

$$\ldots\ldots D_a + D_a' = \tfrac{1}{2} a (p_a \cot w_a + p_a' \cot w_a').$$

ist aber offenbar

$$w_a + w_a' = \alpha$$

ach dem Obigen:

$$\frac{p_a}{\sin w_a} = \frac{p_a'}{\sin w_a'} \quad \text{oder} \quad p_a \sin w_a' = p_a' \sin w_a;$$

also:

$$p_a \sin(\alpha - w_a) = p_a' \sin w_a,$$

$$p_a' \sin(\alpha - w_a') = p_a \sin w_a';$$

folglich:

$$p_a \sin\alpha\cos w_a - p_a \cos\alpha \sin w_a = p_a' \sin w_a,$$

$$p_a' \sin\alpha\cos w_a' - p_a' \cos\alpha \sin w_a' = p_a \sin w_a';$$

woraus sogleich:

$$p_a \sin\alpha \cot w_a = p_a' + p_a \cos\alpha,$$

$$p_a' \sin\alpha \cot w_a' = p_a + p_a' \cos\alpha;$$

also:

$$(p_a \cot w_a + p_a' \cot w_a') \sin\alpha = (p_a + p_a')(1 + \cos\alpha),$$

daher, wenn man

$$\sin\alpha = 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \qquad 1+\cos\alpha = 2\cos\tfrac{1}{2}\alpha^2$$

setzt:

$$p_a \cot w_a + p_a' \cot w_a' = (p_a + p_a') \cot\tfrac{1}{2}\alpha$$

folgt.

Also ist nach 3):

4) . . . . . $2(D_a + D_a') = a(p_a + p_a') \cot\tfrac{1}{2}\alpha.$

Die an den Seiten

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \ldots.$$

der beliebigen Seitenfläche A des Polyeders liegenden Seiten desselben wollen wir beziehungsweise durch

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_5, \ldots.$$

bezeichnen; die, indem man immer eine ähnliche Construct vorher macht, an den Kanten

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \quad a_5, \ldots.$$

iegenden Projectionen auf der Seitenfläche A seien beziehun

$$D_1, \quad D_2, \quad D_3, \quad D_4, \quad D_5, \ldots.$$

und die an denselben Kanten liegenden Projectionen auf den flächen

$$A_1, \quad A_2, \quad A_3, \quad A_4, \quad A_5, \ldots.$$

en beziehungsweise:

$$D_1', \quad D_2', \quad D_3', \quad D_4', \quad D_5', \ldots;$$

dlich seien die auf diese Seitenflächen von dem Punkte O gefällten rpendikel beziehungsweise

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad p_4, \quad p_5, \ldots;$$

an hat man nach 4) die Gleichungen:

$$2(D_1+D_1') = a_1(p+p_1)\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1,$$
$$2(D_2+D_2') = a_2(p+p_2)\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2,$$
$$2(D_3+D_3') = a_3(p+p_3)\cot\tfrac{1}{2}\alpha_3,$$
$$2(D_4+D_4') = a_4(p+p_4)\cot\tfrac{1}{2}\alpha_4,$$

u. s. w.

lich durch Addition die Gleichung:

$$\begin{aligned} &2(D_1+D_2+D_3+D_4+D_5+\ldots.) \\ &+2(D_1'+D_2'+D_3'+D_4'+D_5'+\ldots.) \\ &= p(a_1\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1+a_2\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2+a_3\cot\tfrac{1}{2}\alpha_3+a_4\cot\tfrac{1}{2}\alpha_4+\ldots.) \\ &+a_1p_1\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1+a_2p_2\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2+a_3p_3\cot\tfrac{1}{2}\alpha_3+a_4p_4\cot\tfrac{1}{2}\alpha_4+\ldots., \end{aligned}$$

, weil offenbar

$$D_1+D_2+D_3+D_4+D_5+\ldots. = A$$

*), in bekannter Bezeichnungsweise:

5)

$$\begin{aligned} &2A+2(D_1'+D_2'+D_3'+D_4'+D_5'+\ldots.) \\ &= p\Sigma a\cot\tfrac{1}{2}\alpha \\ &+a_1p_1\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1+a_2p_2\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2+a_3p_3\cot\tfrac{1}{2}\alpha_3+a_4p_4\cot\tfrac{1}{2}\alpha_4+\ldots.; \end{aligned}$$

d bezeichnen wir nun durch S_a die Summe aller an die Seiten von anstossenden Projectionen auf den an dieselben Seiten anstossenden rigen Seitenflächen des Polyeders, für die Seitenfläche A aber die mme

$$a_1p_1\cot\tfrac{1}{2}\alpha_1+a_2p_2\cot\tfrac{1}{2}\alpha_2+a_3p_3\cot\tfrac{1}{2}\alpha_3+a_4p_4\cot\tfrac{1}{2}\alpha_4+\ldots.$$

rch S_a; so haben wir die Gleichung:

$$\ldots\ldots\ldots 2A+2S_a = p\Sigma a\cot\tfrac{1}{2}\alpha+S_a.$$

*) Ueber positiv und negativ zu betrachtende Projectionen sage ich der ze wegen hier weiter nichts.

Ganz auf ähnliche Art haben wir nun überhaupt für alle Seitenflächen

$$A,\quad B,\quad C,\quad D,\ldots.$$

des Polyeders die folgenden Gleichungen:

$$2A+2S_a=p\Sigma a\cot\tfrac{1}{2}\alpha+S_a,$$
$$2B+2S_b=q\Sigma b\cot\tfrac{1}{2}\beta+S_b,$$
$$2C+2S_c=r\Sigma c\cot\tfrac{1}{2}\gamma+S_c,$$
$$2D+2S_d=s\Sigma d\cot\tfrac{1}{2}\delta+S_d,$$

u. s. w.

aus denen sich durch Addition die Gleichung:

$$\begin{aligned}&2(A+B+C+D+\ldots.)\\&+2(S_a+S_b+S_c+S_d+\ldots.)\\=\;&p\Sigma a\cot\tfrac{1}{2}\alpha+q\Sigma b\cot\tfrac{1}{2}\beta+r\Sigma c\cot\tfrac{1}{2}\gamma+s\Sigma d\cot\tfrac{1}{2}\delta+\ldots.\\&+S_a+S_b+S_c+S_d+\ldots.,\end{aligned}$$

folglich, wenn wir die ganze Oberfläche des Polyeders durch U bezeichnen, wo also

$$U=A+B+C+D+\ldots.$$

ist, die Gleichung

6)

$$\begin{aligned}&2U+2(S_a+S_b+S_c+S_d+\ldots.)\\=\;&p\Sigma a\cot\tfrac{1}{2}\alpha+q\Sigma b\cot\tfrac{1}{2}\beta+r\Sigma c\cot\tfrac{1}{2}\gamma+s\Sigma d\cot\tfrac{1}{2}\delta+\ldots.\\&+S_a+S_b+S_c+S_d+\ldots.\end{aligned}$$

ergiebt.

Seien nun überhaupt A und B zwei in den Kanten $a=b$ – eine zu diesen beiden Seitenflächen gehörende Kante betrachtet – zusammenstossende Seitenflächen des Polyeders; der von A und B eingeschlossene Winkel sei $\alpha=\beta$; die an $a=b$ liegenden Projectionen auf A und B seien A' und B'; die von O auf A und B gefällten Perpendikel seien p und q; so ist nach 4):

$$\begin{aligned}&2(A'+B')=a(p+q)\cot\tfrac{1}{2}\alpha=b(p+q)\cot\tfrac{1}{2}\beta\\&=ap\cot\tfrac{1}{2}\alpha+aq\cot\tfrac{1}{2}\alpha=bp\cot\tfrac{1}{2}\beta+bq\cot\tfrac{1}{2}\beta.\end{aligned}$$

Denkt man sich jetzt in der Summe

$$S_a+S_b+S_c+S_d+\ldots.$$

die einzelnen Projectionen so angeordnet, dass immer zwei an derselben Kante liegende Projectionen zusammengenommen werden, und auch in der Summe

$$S_a + S_b + S_c + S_d + \ldots.$$

immer zwei derselben Kante entsprechende Bestandtheile dieser Summe zusammengenommen; so wird aus der verstehenden Gleichung auf der Stelle erhellen, dass

$$2(S_a + S_b + S_c + S_d + \ldots) = S_a + S_b + S_c + S_d + \ldots.$$

ist; und es ist folglich nach 6):

7)

$$2U = p\Sigma a \cot\tfrac{1}{2}\alpha + q\Sigma b \cot\tfrac{1}{2}\beta + r\Sigma c \cot\tfrac{1}{2}\gamma + s\Sigma d \cot\tfrac{1}{2}\delta + \ldots..$$

Diesen nach meiner Meinung sehr bemerkenswerthen Ausdruck für die Oberfläche eines Polyeders hat Herr Professor Lindelöf in Helsingfors in der in jeder Beziehung sehr zur Beachtung zu empfehlenden Abhandlung: Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume (m. s. Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Tome IV. 3./15. Juin 1869.) gegeben und mittelst der höheren Analysis angehörender Betrachtungen erwiesen. Bezeichnen wir das Volumen des Polyeders durch V, so ist, wie man sogleich übersieht:

8) . . . . . $3V = Ap + Bq + Cr + Ds + \ldots..$

Die Formeln 8) und 7) dienen der schönen Untersuchung zur Grundlage, welche Herr Lindelöf in der obigen Abhandlung über den auf ihrem Titel genannten Gegenstand mit Rücksicht auf gewisse frühere Untersuchungen Steiner's (m. s. Crelle's Journal. Thl. XXIV. 1842) mitgetheilt hat, indem er über die Formeln 8) und 7) sagt: „La première est bien connue, tandis que la seconde renferme une expression nouvelle de l'aire totale d'un polyèdre." Indem ich hoffe auf den übrigen Inhalt der schönen Abhandlung des Herrn Lindelöf später zurückzukommen, habe ich für jetzt den obigen elementaren Beweis der Gleichung 7) gegeben, weil ich glaube, dass dieselbe allgemeine Beachtung — auch für den stereometrischen Unterricht — recht sehr verdient, und manche weitere Anwendungen zulässt, welche zu machen ich dem Leser überlasse.

XXXVI.

Graphische Darstellung der scheinbaren Bahn der Sonne am Himmel.

Von

Herrn Professor *F. Hoza*,
Lehrer an der Oberrealschule in Königgrätz.

(Figuren s. Taf. VIII. und Taf. IX.)

Unter der scheinbaren Bahn der Sonne am Himmel versteht man eine Linie, welche entsteht, wenn sämmtliche von einem bestimmten Punkte der Erde während einer Rotation derselben um ihre eigene Axe zum Sonnencentrum gezogenen Strahlen durch eine solche Kugelfläche geschnitten werden, deren Mittelpunkt identisch ist mit dem betrachteten Punkte der Erde.

Eine solche Kugelfläche kann nämlich als Centralprojection des idealen Himmelsgewölbes betrachtet werden, und jede am letzteren gedachte Linie kann auf die erstere central aus ihrem gemeinsamen Mittelpunkte projicirt werden. Um die Natur jener scheinbaren Sonnenbahn näher zu beleuchten, betrachten wir einen bestimmten Parallelkreis der Erde an einem bestimmten Tage und setzen der Einfachheit halber voraus, dass sich die Richtung der Sonnenstrahlen während einer Rotation der Erde um ihre eigene Axe nicht ändere, d. h. nehmen wir an, die Erde stehe in ihrem Laufe um die Sonne durch 24 Stunden still und vollziehe bloss während dieser Zeit eine Rotation um ihre eigene Axe.

Nehmen wir als erste Projectionsebene die Ebene der Erdbahn und als zweite eine durch die Erdaxe senkrecht zur vorigen gelegte Meridianebene der Erde an, und bezeichnen die Bilder von

Gebilden der ersten Ebene mit $_1$ und der zweiten mit $_2$. In Fig. 1. stellt dann X die Schnittlinie der Projectionsebenen oder die Projectionsaxe dar; 0 heisst der Erdmittelpunkt; A_1A_2 stellen die Erdaxe und K_1K_2 die kugelförmige Erdoberfläche dar; n, s sollen die beiden Pole der Erde heissen.

Sei ferner S_1S_2 die Richtung der Sonnenstrahlen, welche mit der Richtung S_1' der Frühlingsstrahlen den Winkel α einschliesst. G_1 stellt sodann die erste Projection der kreisförmigen Schattengrenze dar, welche die beleuchtete Hälfte der Erdoberfläche von der unbeleuchteten trennt. Bekanntlich dreht sich diese Schattengrenze während des Laufes der Erde um die Sonne um den nämlichen Winkel α im nämlichen Sinne von der Frühlings-Schattengrenze, für welche Tag- und Nachtgleiche eintritt, und deren erste Projection in X abgebildet ist. B_1B_2 stellt eine zur Ebene der Erdbahn senkrechte Gerade als Axe dieser Drehung dar; λ ist der constante Winkel der Geraden A und B, der etwa den Wert $23^0\ 27'$ hat.

Denken wir uns einen beliebigen Parallelkreis P, dessen zweite Projection P_2 darstellt, und heissen seinen Mittelpunkt p.

Eine Ebene, welche die Erdoberfläche berührt, wird die Horizontebene ihres Berührungspunktes genannt.

Sämmtliche in Punkten des Parallelkreises P errichteten Horizontebenen bilden eine die Kugelfläche K berührende Rotationskegelfläche, deren Scheitel a in der Erdaxe A liegt. Für den Punkt b des betrachteten Parallelkreises ist die Horizontebene senkrecht zur zweiten Projectionsebene und enthält eine Lage C der Erzeugenden der Berührungskegelfläche. Die Gerade C schliesst mit der Ebene des Parallelkreises P einen für alle Lagen der Erzeugenden constanten Winkel μ ein, welcher die Poldistanz des Parallelkreises genannt werden kann, weil er gleich ist jenem Winkel, welchen der Radius ob der Erde mit der Erdaxe A bildet.

M ist die Schnittlinie der Ebene des Parallelkreises P mit der Ebene der Erdbahn.

Ein durch den Mittelpunkt p geführter Sonnenstrahl T wird stets in T_2 seine zweite Projection haben, welche mit P_2 den constanten Winkel λ einschliessen muss. Ein gleiches gilt für jeden Sonnenstrahl, wenn er auf eine zur Ebene der Axen A und B parallele Projectionsebene orthogonal projicirt wird.

Nehmen wir bei unveränderter Lage der zweiten Projectionsebene die Ebene des Parallelkreises P zur ersten Projectionsebene an, so gibt uns Fig. 2. das Bild dieser beiden Projectionen der erörterten Gebilde, wobei Y als neue Projectionsaxe erscheint.

Nach meinem in diesem Theile des „Archivs" Nr. II. S. 10. enthaltenen Aufsatze „Graphische Bestimmung der Tages- und Nachtlänge" kann die Schnittlinie der Ebenen von G und P durch folgende Construction ermittelt werden:

Man trägt den Abschnitt $0M_2$ der Fig. I. nach M_2d in Fig. 2. auf, construirt in d als Mittelpunkt den Winkel α, welchen der Sonnenstrahl beschrieb, während die Erde aus dem Frühlingspunkte in die betrachtete Lage gelangte; sodann verbindet man den erhaltenen Schnittpunkt e_2 mit c durch eine Gerade, welche die verlangte Schnittlinie abgibt, so zwar, dass f_2 den Punkt des Sonnenaufgangs und g_2 den des Untergangs für diesen Parallelkreis darstellen. Der der Sonne zugekehrte Bogen gibt die Taglänge und der übrige die Nachtlänge an.

Zieht man durch b eine senkrechte S_2 zu e_2f_2, so ist sie die erste Projection des diesseitigen Sonnenstrahls, welcher dem Punkte b angehört und schliesst mit der Schnittlinie D der Horizont — und Parallelebene von b denselben Winkel β ein, den e_2f_2 mit Y bildet. Offenbar entspricht jedem bestimmten α ein einziger bestimmter Winkel β. Die zweite Projection S_3 muss mit der Projectionsaxe Y_3 wie oben erörtert wurde, den constanten Winkel λ einschliessen.

Nehmen wir an, es gelange der Punkt b bei seiner West-Ost-Bewegung im Parallelkreis nach b', wodurch die Meridianebene AC nach AC' um einen Winkel γ fortgeschritten ist. Der Sonnenstrahl dieses Punktes b' ist in S_1' parallel zu S_1 dargestellt, und zieht man Y_1' parallel zu Y_1 so ist

$$\angle C_1' b_1' Y_1' = \gamma,$$

und

$$\angle Y_1' b_1' S_1' = \delta = \angle S_1 b Y.$$

Ein in b stehender Beobachter wird die Sonne im Strahle S erblicken; kommt er aber vermöge der Rotation der Erde, die er genöthigt ist mitzumachen, nach b', dann erscheint ihm die nämliche Sonne im Strahle S', welcher das Himmelsgewölbe in einem ganz andern Punkte zu treffen scheint, als S. Dadurch wird der Sonne eine scheinbare Bewegung am Himmelsgewölbe ertheilt, und diese wollen wir weiter untersuchen.

Denken wir uns durch b eine Gerade E parallel zur Erdaxe A geführt. Diese in der Meridianebene AC mit enthaltene Gerade E behält ihre Richtung stets bei, wohin auch b während der Rotation gelangt.

Die Geraden A, C, E bleiben stets in constanter gegenseitiger

Lage. Da es sich um die jeweilige relative Lage des Sonnenstrahls zu diesen drei Geraden handelt, so drehen wir den Meridian AC' sammt dem Strahle S' um den Winkel γ zurück, bis C' mit C sich vereinigt. Dadurch kommt S' nach S'', und es ist

$$\angle S_1'' b S_1 = \gamma.$$

Dieser Strahl S'' bildet mit E den nämlichen Winkel, wie S, daher kann man S'' auch erhalten durch Rotation von S um die Axe E in der Ost-West-Richtung.

Hiemit ist ersichtlich, dass der Sonnenstrahl S relativ zu seiner Meridianebene ACE eine Rotationskegelfläche beschreibt, deren Axe E parallel zur Erdaxe A geht.

Der Sinn dieser Drehung ist dem der wirklichen Erdrotation um A entgegengesetzt. Die so erzeugte Kugelfläche soll Strahlenfläche des Parallelkreises P zur Zeit α heissen. Sie ist für jeden Punkt des Parallelkreises die nämliche und ihre Erzeugenden S, S''.... sind Sehstrahlen eines in b stehenden Beobachters zur Sonne.

Die Schnittlinie der Strahlenfläche mit dem idealen Himmelsgewölbe ist nun die scheinbare tägliche Bahn, welche die Sonne von Ost gegen West zurücklegt.

Ein Punkt h des Strahles S beschreibt dabei den Kreis F, dessen einer Schnittpunkt mit der Meridianebene mit h' bezeichnet wurde. S''' ist der Mittagsstrahl, welcher mit der Parallelebene P einen Neigungswinkel γ einschllesst, der bloss von β unmittelbar und von α mittelbar abhängt. Jedem Winkel α entspricht ein besttmmter Winkel γ, welcher zwisshen $+\lambda$ und $-\lambda$ oscillirt. S^{IV}, S^{V}, S^{VI} sind der Mitternachts-Auf- und Untergangs-Strahl von b.

Um die scheinbare Sonnenbahn bildlich darzustellen, beschreiben wir aus b als Centrum mit beliebigem Radius eine Kugelfläche, die von der Strahlenfläche in einer Kreislinie geschnitten wird, welche man als centrale Projection der scheinbaren Sonnenbahn auf diese Kugelfläche ansehen kann.

Fig. 3. gibt uns ein zweifaches Bild dieser Kugelfläche; es stellt nämlich die beiden orthogonalen Projectionen derselben auf zwei Ebenen dar, die zu den früheren Projectionsebenen parallel in beliebiger Entfernung von ihnen gedacht werden.

b_1 b_2 sind Bilder des Ortes b der Erdoberfläche;

G_1G_2 ist der Aequatorkreis des idealen Himmelsgewölbes;

H_1H_2 der Meridiankreis desselben Ortes;

E_1E_2 die Welt- oder Himmelsaxe, um welche sich die Sonne sowie alle Fixsterne zu drehen scheinen;

k_2 l_2 die Himmelspole, ersterer Nord-, letzterer Südpol;

J_1J_2 die Vertikale oder Verbindungslinie des Ortes b mit dem Mittelpunkte 0 der Erde;

m, p ihre Schnittpunkte mit dem Himmelsgewölbe, ersterer Zenith, letzterer Nadir genannt;

L_1L_2 der Horizontkreis oder Schnittlinie der Horizontebene des Ortes mit der Himmelskugel.

Der Aequator G theilt die Himmelskugel in eine nördliche Halbkugel mit dem Nordpole k und eine südliche mit dem Südpole l. Der Horizontkreis L theilt den Himmel ebenfalls in eine obere Hälfte mit dem Zenith m und eine untere mit dem Nadir p.

Unter dem constanten Winkel λ zur Aequatorebene G geneigt und ebenfalls zur Meridianebene AC senkrecht geht eine Ebene, welche die Himmelskugel in der Ekliptik N schneidet. Betrachtet man nämlich einen Punkt des Parallelkreises P (Fig. 2.) in jenen Augenblicken, wo er in b durch den Meridian AC geht, was in je 24 Stunden einmal geschieht, so bilden sämmtliche Sonnenstrahlen solcher Durchgangsmomente eine Ebene, was in Fig. 2. daraus ersichtlich ist, dass vermöge der jährlichen Bewegung der Erde sich bloss die Winkel α, β entsprechend ändern, der Sonnenstrahl von b aber stets in S_2 abgebildet erscheint. Solche Strahlen schneiden die Himmelskugel in Punkten des Kreises N und es scheint uns vermöge der West-Ost-Drehung von S_1, als ob die Sonne am Himmel eine jährliche Bahn N, Ekliptik genannt, von West gegen Ost beschriebe.

Jedem bestimmten Winkel β entspricht ein bestimmter Neigungswinkel γ des Strahls zum Aequator; $\mu+\gamma$ nennt man die Mittagshöhe der Sonne für den bestimmten Tag, welche von $\mu+\lambda$ bis $\mu-\lambda$ variirt.

Die Strahlenfläche, welche den bestimmten Werthen α, β, γ entsprechend S erzeugt, schneidet die Himmelskugel in einem Kreise, der durch Q_1Q_2 abgebildet erscheint, und dieser stellt die tägliche scheinbare Bahn der Sonne am Himmel dar.

Wächst α um 180°, wächst β um ebensoviel, d. h. nach Verlauf eines halben Jahres erscheint die tägliche Sonnenbahn in Q', wobei sie mit Q zu G symmetrisch liegt.

Besonders hervorzuheben sind die Bahnen für $\alpha = 0$, 90^0, 180^0, 270^0, die dem Frühlings-, Sommer-, Herbst- und Winterpunkte der wirklichen Erdbahn entsprechen. Die zugehörigen Werte von β sind gleichfalls 0, 90^0, 180^0, 270^0 und γ nimmt die Werte $0, +\lambda, 0, -\lambda$ an. Daher sind G, R, G, R' die entsprechenden täglichen Sonnenbahnen und zeigen in ihrem Durchschnitt mit dem Horizontkreise L nicht nur die Auf- und Untergänge der Sonne, sondern auch die Längen von Tag und Nacht.

Da die Rotation der Erde um ihre Axe vollkommen gleichförmig vor sich geht, ist auch die des Strahles S um die Axe E vollkommen gleichförmig. Theilt man den Kreis G vom Meridian H angefangen in 24 gleiche Theile und legt durch jeden Theilpunkt und E eine Ebene, so erhält man als Schnittlinien mit der Himmelskugel 12 Meridiane, die man Stundenkreise nennen könnte, weil sie die Stunden anzeigen, zu welchen die Sonne am Himmel durch sie hindurchgeht. Ihre Bilder tragen die Stundenzahlen 0, 1, 2, .. bis 12.

Wir sehen somit aus Fig. 3 auch zwischen welchen Werten die Zeit des Auf- und Untergangs variirt. Im Frühlings- und Herbstpunkte erfolgt der Aufgang in r, der Untergang in r', welche Punkte Aequinoctien heissen. Wenn wir den Winkel β betrachten, so zeigt er uns ebenfalls den Weg, welchen die Sonne s im Strahle S liegend jährlich am Himmel zurücklegt, dessen Bilder N_1 N_2 sind und welcher Ekliptik des Himmels genannt wurde. Ekliptik und Aequator schneiden einander in den Aequinoctien.

Uebergehen wir von einem Parallelkreise P der Erde zum andern, so ändert sich in Fig. 3. bloss μ, die Polhöhe des Parallelkreises und Neigung des Horizonts zum Aequator. Dadurch wird entsprechend der Horizontkreis L um D als Axe gedreht. Wenn μ sämmtliche Werte von 0 bis 180^0 durchläuft, kommt der Horizontkreis der Reihe nach in Lagen G, U, L, V, N, G, wovon G für die beiden Erdpole, U, N für den nördlichen und südlichen Polarkreis, V für den Aequator der Erde entsprechend gelten.

Dadurch wird es möglich alle Umstände, welche den Sonnen-Auf- und Untergang, die Länge von Tag und Nacht, die Mittagshöhe der Sonne u. s. w. für einen bestimmten Punkt der Erde betreffen, darzustellen und mit einander zu vergleichen, was ein aufmerksamer Blick auf Fig. 3 augenblicklich lehrt.

Schliesslich wäre noch zu erwähnen, dass vermöge der stetigen Aeederung der Winkel α, β, γ die Strahlenfläche sich stetig ändert und keine vollkommene Rotationskegelfläche ist, sondern eine Spiralkegelfläche, die die Himmelskugel in einer Spirale schneidet,

welche von r ausgehend nach etwa 91facher Windung in t anlangt, von hier aus sich wieder erweiternd 91 Windungen bis r erzeugt, sodann das nämliche auf der südlichen Hemisphäre für t' wiederholt, bis sie nach Verlauf eines ganzen Jahres wieder in den Aequinoctialpunkt r zurückkehrt.

XXXVII.

Ueber eine Methode zur Füllung der Barometer-Röhren.

Von

Herrn *Hr. Wild*,

Director des physikalischen Central-Observatoriums zu St. Petersburg *).

Für alle diejenigen — namentlich auch für Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten — welche sich neben dem theoretischen Unterrichte zugleich gern mit praktischen physikalischen Arbeiten beschäftigen, scheint mir die in dem folgenden Aufsatze beschriebene Methode zur Füllung der Barometerröhren, da die gewöhnliche Methode bekanntlich mit mannigfaltigen Schwierigkeiten verknüpft ist, sehr empfehlenswerth zu sein. Deshalb habe ich — zu der zu wünschenden weiteren Bekanntwerdung der Methode — denselben aus der trefflichen Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, VI. Band, Nr. 18, hier abdrucken lassen, indem ich zugleich bemerke, dass ursprünglich der Aufsatz aus den Schriften der kais. russisch. geographischen Gesellschaft entlehnt ist. G.

Im Jahre 1857 hat Taupenot eine neue Methode zur leichteren Füllung von Barometer-Röhren angegeben. Durch Herstellung nämlich eines Vacuums über dem Quecksilber in der Barometer-Röhre erleichterte er das Sieden desselben beim Auskochen des Rohres der Art, dass die ganze Röhre bis zu ihrem oberen Ende ausgekocht werden konnte und die Gefahr des Springens des Rohres bedeutend vermindert wurde. Es ist mir nicht bekannt, in wiefern diese Methode in der Praxis Eingang gefunden und ob sie sich dabei bewährt hat;

*) Aus den Schriften der k. russischen geographischen Gesellschaft.

laube aber, dass die nachfolgende, auf dasselbe Princip sich
nde Methode sich hiezu besser eignen dürfte. Seit 10 Jahren
h habe ich mich derselben zur Füllung einer grossen Zahl von
ieter-Röhren der verschiedensten Gestalt und Dimensionen be-
ohne dass mir dabei auch nur einmal eine Röhre gesprungen
überhaupt die ganze Operation missglückt wäre. Da die Baro-
-Röhre überdies für diese Art der Füllung nicht besonderer
ze etc. bedarf, sondern unmittelbar in der Gestalt verwendet
n kann, in welcher sie schliesslich verbleiben soll, so hielt ich
nützlich, dieselbe hier gerade mit Bezug auf unsere Landes-
tnisse zu veröffentlichen.

ine kugelförmige, doppelt tubulirte Vorlage wird durch ein
Stück ungeschwefelten Kautschuk-Rohres mit der zu füllenden
ieter-Röhre, anderseits durch Kautschuk-Röhren mit einer Trocken-
und weiterhin mit einer Luftpumpe verbunden. Die letztern
chuk-Röhren sind durch eingelegte Drahtspiralen gegen das
mendrücken durch den äussern Luftdruck zu schützen. Darauf
ler ganze Apparat: Trockenröhre, Vorlage und Barometer-Rohr,
rt.

ässt man hierauf von der Luftpumpe her wieder Luft einströ-
so muss diese dabei die Trockenröhre passiren, so dass zur
ge und zum Barometer-Rohr nur trockene Luft gelangt. Wieder-
nan dies einige Male, so werden die letzten Spuren von Feuch-
t entfernt. In die so getrocknete Vorlage bringt man die
ge Menge chemisch reinen Quecksilbers zur Füllung der Baro-
-Röhre, verschliesst wieder und evacuirt nochmals nach einander,
ie dabei allenfalls mit eingedrungene Feuchtigkeit wieder zu
nen. Die Vorlage wird nun auf einem Dreifuss mit Drahtnetz
mt, bis das Quecksilber eben in's Kochen geräth, was im leeren
, wie schon Taupenot gezeigt hat, schon bei ungefähr 300° C.
hne Stossen erfolgt. Nachdem man hierauf mit derselben oder
zweiten Lampe die Barometer-Röhre noch etwas erwärmt hat,
las heisse Quecksilber durch Neigen der Vorlage in die letztere
sen. Damit sich nicht Blasen verdünnter Luft an den Wänden
öhre fangen, ist es gut, das Quecksilber langsam und bei schwacher
ng der Barometer-Röhre einlaufen zu lassen. Sollte das Erstere
em geschehen, so kann die Blase leicht dadurch entfernt werden,
nan das Quecksilber bis zur betreffenden Stelle gegen die Vor-
urücklaufen lässt und dann die Röhre wieder langsam aufrichtet.
ser Weise wird die Barometer-Röhre bis über ihr Ende hinaus
uecksilber gefüllt und darauf mit der Kautschukröhre von der
dungsröhre mit der Vorlage abgezogen. Man lässt in der
chukröhre Quecksilber, damit beim Erkalten die Barometer-Röhre

gefüllt bleibt und entfernt die erstere mit dem überflüssigen Quecksilber erst, wenn man die Röhre in ihr Gefäss einsetzen will oder bei Heber-Barometern die Röhre bereits aufgerichtet hat.

Die Figur Taf. IX. Fig. I. stellt den bezüglichen Apparat dar, wie ich ihn für die Anwendung auf Reisen zusammengestellt habe. *A* repräsentirt eine auf dem Tisch festzuschraubende Handluftpumpe. *B* die mit Chlorcalcium gefüllte Trockenröhre, *C* den Quecksilberbehälter, der auf dem Dreifusse *D* vermittelst der Spirituslampe *E* erhitzt wird und durch die Kautschukröhre *H* mit dem zu füllenden Barometer-Rohr *K* verbunden ist.

In Betreff der einzelnen Theile ist noch Folgendes zu bemerken. Die Trockenröhre habe ich stets mit etwa haselnussgrossen Stücken geschmolzenen Chlorcalciums angefüllt, was bei langsamem Hindurchströmen der Luft zur Austrocknung desselben genügend erschien. Baumwollenbäusche zu Anfang und zu Ende des Rohres verhindern das Mitreissen von Staub beim Durchströmen der Luft. Um ebenso eine Verunreinigung des Quecksilbers in der Vorlage und weiterhin in der Röhre durch Schwefelstaub zu verhindern, ist es räthlich, wenigstens zwischen Trockenröhre und Vorlage unvulcanisirte Kautschuk-Röhren zu verwenden; auf alle Fälle darf das Stück *H* nur aus solchen bestehen.

Die Reinigung der Vorlage und der Barometer-Röhre geschieht am besten in folgender Weise. Man giesst in das eine dieser Gefässe einige Cubik-Centimeter concentrirte Schwefelsäure, lässt dieselbe unter schwachem Erwärmen über einer Gas- oder Spirituslampe alle Wandtheile berühren und spült sodann mit destillirtem Wasser (oder filtrirtem Regenwasser) gut aus, worauf man den Rest des Wassers durch eine kleine Menge eingebrachten Alkohols aufnehmen lässt.

Die letzten Spuren des Letzteren nach erfolgtem Ausgiessen werden erst nach der Zusammensetzung des Apparates beim Austrocknen der Vorlage und Barometer-Röhre vermittelst der Luftpumpe entfernt.

Der in der Zeichnung dargestellte Reise-Apparat ist zur Füllung der Barometer unserer meteorologischen Stationen an Ort und Stelle bestimmt. Ein entsprechender Apparat ist Herrn Carl v. Struve schon im Jahre 1869 für die Einrichtung meteorologischer Stationen in Turkestan mitgegeben worden; einen andern habe ich Herrn Dr. Fritsche, Director des meteorologisch-magnetischen Observatoriums in Peking, geschickt.

Herr Wild theilt (Oesterreichische Zeitschrift für Meteorologie, VI. Band, Nr. 19, S. 334) noch mit, dass in seinem Observatorium das Quecksilber nach folgender Methode gereinigt wird.

Man nehme etwa 1000 Gramm des zu reinigenden Quecksilbers und giesse es in eine circa 2000 Gramm Wasser fassende Flasche; dann wiege man 30 Gramm Eisenchlorid ab, giesse selbige zum Quecksilber hinzu und schüttle die mit einem Kork verschlossene Flasche kräftig, bis das Quecksilber so fein zertheilt erscheint, dass man mit blossem Auge keine Kügelchen mehr erkennen kann. Nun wasche man die im Wasser löslichen Unreinigkeiten und überschüssige Chloridlösung durch Schütteln mit gewöhnlichem Wasser in derselben Flasche aus, lasse abstehen, giesse die abgestandene Flüssigkeit vorsichtig ab, wiederhole diese Manipulation noch zweimal und schütte dann, nachdem das abgestandene Wasser wieder fortgegossen, den dünnen grauen Brei in eine Porzellanschale. Durch vorsichtiges Erwärmen der Porzellanschale in einem Wasserbade wird die Quecksilbermasse allmählich trocken, worauf man aus derselben durch Zerreiben in einem Porzellanmörser den grössten Theil des Quecksilbers in seinem gewöhnlichen Aggregatzustand wieder erhält.

Dieses so erhaltene reine Quecksilber wird auf ein mit einer Nadel durchstochenes Schreibpapierfilter gebracht und so von den ihm anhängenden Pulvertheilen getrennt, dann in einer reinen geräumigen Flasche mit seinem doppelten Volumen destillirten Wassers geschüttelt und nach Entfernung des Wassers durch vorsichtiges Abgiessen dieselbe Manipulation noch zweimal oder so lange wiederholt, bis das Wasser ganz klar und rein bleibt. Sodann entfernt man die noch dem Quecksilber anhängenden Wassertheilchen durch Abtrocknen mit nicht faserndem Fliesspapier und durch nochmaliges Filtriren durch durchstochenes Schreibpapier.

Behufs vollständigen Austrocknens bringt man das Quecksilber noch über concentrirte Schwefelsäure oder frisch geglühtes Chlorcalcium unter die Glocke einer Luftpumpe, wo es nach dem Evacuiren nach Verlauf einiger Stunden vollständig trocken wird, wenn die Quecksilberschicht in dem Glasgefässe über der Schwefelsäure höchstens 1 Centimeter dick ist. Schliesslich wird das Quecksilber, wenn nöthig, noch einmal durch glattes durchstochenes Schreibpapier unter einer Glasglocke über Chlorcalcium oder concentrirter Schwefelsäure, und zwar gleich in das zur Aufbewahrung bestimmte, gut gereinigte und getrocknete Gefäss filtrirt.

XXXVIII.

Verschiedene Bemerkungen zur Reduction der Monddistanzen.

Von

Herrn Professor Dr. ***Ligowski***,
an der Königlichen Marineschule in Kiel.

Nachträge zur Abhandlung in diesem Theile Nr. XIII.

In diesem Theile Nr. XIII. hatte ich gefunden:

$$\operatorname{tg}\frac{d_1}{2} = \sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\Sigma_1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)}.$$

Zuweilen kann es vortheilhaft sein, direct die ganze Distanz zu berechnen. Um eine Formel für $\operatorname{tg} d_1$ zu erhalten, setze man:

$$\operatorname{tg} d_1 = \frac{2\operatorname{tg}\frac{d_1}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{d_1}{2}^2},$$

und wenn für $\operatorname{tg}\frac{d_1}{2}$ der obige Werth eingesetzt wird:

$$\operatorname{tg} d_1 = \frac{2\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{\Sigma_1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)}}{1-\operatorname{cotg}\frac{\Sigma_1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sin\frac{\Sigma_1}{2}\sin\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)$ und ringt den Factor 2 unter das Wurzelzeichen, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tg} d_1 = \pm\sec(\Sigma_1+x)\sqrt{\sin\Sigma_1\sin(\Sigma_1+2x)}.$$

Für das gegebene Beispiel war:

$$x = 38^0\,43'\,59{,}5''$$
$$\Sigma_1 = 19^0\,48'\,21''$$
also $$\Sigma_1 + x = 58^0\,32'\,20{,}5''$$
und $$\Sigma_1 + 2x = 97^0\,16'\,20''$$

$$\log\sin\Sigma_1 = 9{,}52999$$
$$\log\sin(\Sigma_1+2x) = 9{,}99649$$
$$19{,}52648$$
$$9{,}76324$$
$$\log\sec(\Sigma_1+x) = 0{,}28240$$
$$\log\operatorname{tg} d_1 = 0{,}04564\ (n)$$
$$d_1 = 131^0\,59'\,42''.$$

Aus der Formel

$$\operatorname{tg}\frac{d_1}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\Delta_1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta_1}{2}+x\right)}$$

giebt sich noch:

$$\operatorname{tg} d_1 = \pm\sec(\Delta_1+x)\sqrt{\sin\Delta_1\sin(\Delta_1+2x)}.$$

Einige andere Formeln erhält man in folgender Weise:

Da

$$\frac{1-\operatorname{tg}\alpha^2}{1+\operatorname{tg}\alpha^2} = \frac{\cos\alpha^2-\sin\alpha^2}{\cos\alpha^2+\sin\alpha^2} = \cos 2\alpha$$

, so hat man auch:

$$\cos d_1 = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{d_1^2}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{d_1^2}{2}}$$

$$= \frac{1-\operatorname{cotg}\frac{\Sigma_1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)}{1+\operatorname{cotg}\frac{\Sigma_1}{2}\operatorname{cotg}\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{\Sigma_1}{2}\sin\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)-\cos\frac{\Sigma_1}{2}\cos\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)}{\sin\frac{\Sigma_1}{2}\sin\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)+\cos\frac{\Sigma_1}{2}\cos\left(\frac{\Sigma_1}{2}+x\right)}$$

$$= -\frac{\cos(\Sigma_1+x)}{\cos x}$$

oder:

$$\cos d_1 = -\cos(\Sigma_1+x)\sec x.$$

Aus

$$\operatorname{tg}\frac{d_1}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{\Delta_1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\Delta_1}{2}+x\right)}$$

ergiebt sich noch:

$$\cos d_1 = \cos(\Delta_1+x)\sec x.$$

Eine andere Reihe von Formeln, welche bei Benutzung Tabellen von $\log\sin\frac{t^2}{2}$ brauchbar sind, ergeben sich in folgender We

Aus

$$\cos d_1 = -\frac{\cos(\Sigma_1+x)}{\cos x}$$

folgt:

$$1-\cos d_1 = \frac{\cos(\Sigma_1+x)+\cos x}{\cos x},$$

und hieraus:

$$\sin\frac{d_1^2}{2} = \cos\frac{\Sigma_1}{2}\cos\left(x+\frac{\Sigma_1}{2}\right)\sec x.$$

Ferner:

$$1+\cos d_1 = \frac{\cos x-\cos(\Sigma_1+x)}{\cos x}$$

und

$$\cos\frac{d_1^2}{2} = \sin\frac{\Sigma_1}{2}\sin\left(x+\frac{\Sigma_1}{2}\right)\sec x.$$

Aus

$$\cos d_1 = \frac{\cos(\Delta_1 + x)}{\cos x}$$

ergiebt sich in ähnlicher Weise:

$$\sin\frac{d_1^2}{2} = \sin\frac{\Delta_1}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta_1}{2}\right)\sec x,$$

$$\cos\frac{d_1^2}{2} = \cos\frac{\Delta_1}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta_1}{2}\right)\sec x.$$

Aus den Werthen von $\sin\frac{d_1^2}{2}$ und $\cos\frac{d_1^2}{2}$ erhält man mit Hülfe der Formel

$$\sin d_1 = 2\sin\frac{d_1}{2}\cos\frac{d_1}{2}$$

noch:

$$\sin d_1 = \sec x\sqrt{\sin\Sigma_1\sin(2x+\Sigma_1)}$$

und

$$\sin d_1 = \sec x\sqrt{\sin\Delta_1\sin(2x+\Delta_1)}.$$

Nachträge zur Abhandlung Bd. LI. Nr. XXXII.

Wenn

m und m_1 die scheinbare und wahre Mondshöhe,
s „ s_1 „ „ „ „ „ Sonnen- resp. Sternhöhe,
d „ d_1 „ „ „ „ „ Distanz

bezeichnen, und

$$m_1 - m = a, \quad s - s_1 = b, \quad a+b = 2r, \quad a-b = 2\varrho,$$
$$m+s = \Sigma, \quad m_1+s_1 = \Sigma_1, \quad m-s = \Delta, \quad m_1-s_1 = \Delta_1,$$
$$\tfrac{1}{2}(d-d_1) = x, \text{ also } \tfrac{1}{2}(d+d_1) = d-x \text{ und } d_1 = d-2x$$

gesetzt werden, so ist nach Band 51. Seite 377:

1) . . . $x\sin(d-x) = \varrho\sin(\Sigma+\varrho)\sin\frac{\gamma^2}{2} - r\sin(\Delta+r)\cos\frac{\gamma^2}{2}$.

Für $s-m = \Delta$ wird

2) . . . $x\sin(d-x) = \varrho\sin(\Sigma+\varrho)\sin\frac{\gamma^2}{2} + r\sin(\Delta-r)\cos\frac{\gamma^2}{2}$.

Um eine Formel ohne Δ zu erhalten, setze man in Nr. 1) ft $\sin\frac{\gamma^2}{2}$ seinen Werth $1-\cos\frac{\gamma^2}{2}$, wodurch sich ergiebt:

$$3)\ldots x\sin(d-x)=\varrho\sin(\Sigma+\varrho)-(\varrho\sin(\Sigma+\varrho)+r\sin(\Delta+r))\cos\tfrac{\gamma}{2}$$

Es ist aber:

$$\begin{aligned}&\varrho\sin(\Sigma+\varrho)+r\sin(\Delta+r)\\&=\frac{a-b}{2}\sin(\Sigma+\varrho)+\frac{a+b}{2}\sin(\Delta+r)\\&=\frac{a}{2}(\sin(\Sigma+\varrho)+\sin(\Delta+r))-\frac{b}{2}(\sin(\Sigma+\varrho)-\sin(\Delta+r))\\&=a\sin\left(m+\frac{a}{2}\right)\cos\left(s-\frac{b}{2}\right)-b\cos\left(m+\frac{a}{2}\right)\sin\left(s-\frac{b}{2}\right)\\&=\left(a\operatorname{tg}\left(m+\frac{a}{2}\right)-b\operatorname{tg}\left(s-\frac{b}{2}\right)\right)\cos\left(m+\frac{a}{2}\right)\cos\left(s-\frac{b}{2}\right).\end{aligned}$$

Hiernach wird aus Nr. 3):

$$4)\ldots\ldots\ldots\ldots x\sin(d-x)$$
$$=\varrho\sin(\Sigma+\varrho)+\left(b\operatorname{tg}\left(s-\frac{b}{2}\right)-a\operatorname{tg}\left(m+\frac{a}{2}\right)\right)\cos\left(m+\frac{a}{2}\right)\cos\left(s-\frac{b}{2}\right)\cos\frac{\gamma}{2}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned}&\cos\left(m+\frac{a}{2}\right)\cos\left(s-\frac{b}{2}\right)\cos\frac{\gamma^2}{2}\\&=\frac{\cos\left(m+\frac{a}{2}\right)\cos\left(s-\frac{b}{2}\right)}{\cos m\cos s}\cos\tfrac{1}{2}(d+\Sigma)\cos\tfrac{1}{2}(d-\Sigma)=\mu,\end{aligned}$$

so wird:

$$5)\ldots x\sin(d-x)=\varrho\sin(\Sigma+\varrho)+b\mu\operatorname{tg}\left(s-\frac{b}{2}\right)-a\mu\operatorname{tg}\left(m+\frac{a}{2}\right).$$

Wenn nun

$$A=\varrho\sin(\Sigma+\varrho)\operatorname{cosec}d,$$

$$B=b\mu\operatorname{tg}\left(s-\frac{b}{2}\right)\operatorname{cosec}d,$$

$$C=a\mu\operatorname{tg}\left(m+\frac{a}{2}\right)\operatorname{cosec}d$$

und

$$x_1=A+B-C$$

gesetzt wird, so ist:

$$\log x = \log x_1 + (\log \operatorname{cosec}(d - x_1) - \log \operatorname{cosec} d).$$

In Band 51. war als Beispiel gegeben:

$$m = 15^0\,44', \quad s = 3^0\,27', \quad d = 132^0\,11'\,19''$$
$$a = 51'\,38'', \quad b = 14'\,17''$$
$$r = 32'\,57'',5, \quad \varrho = 18'\,40'',5.$$

Hieraus folgt:

$$\tfrac{1}{2}(d + \Sigma) = 75^0\,41',2 \qquad m + \frac{a}{2} = 16^0\;9',8$$
$$\tfrac{1}{2}(d - \Sigma) = 56^0\,30',2 \qquad s - \frac{b}{2} = 3^0\,19',9$$
$$\Sigma + \varrho = 19^0\,29',7.$$

Ferner:

$$\log\cos\tfrac{1}{2}(d+\Sigma) = 9{,}3931$$
$$\log\cos\tfrac{1}{2}(d-\Sigma) = 9{,}7419$$
$$\log\cos\left(m+\frac{a}{2}\right) = 9{,}9825$$
$$\log\sec m = 0{,}0166$$
$$\log\cos\left(s-\frac{b}{2}\right) = 9{,}9993$$
$$\log\sec s = 0{,}0008$$

	$\log\mu = 9{,}1342$	$\log\mu = 9{,}1342$
$\log\varrho = 3{,}0494$	$\log b = 2{,}9330$	$\log a = 3{,}4911$
$\log\sin(\Sigma+\varrho) = 9{,}5234$	$\lg\operatorname{tg}\left(s-\frac{b}{2}\right) = 8{,}7650$	$\log\operatorname{tg}\left(m+\frac{a}{2}\right) = 9{,}4617$
$\log\operatorname{cosec} d = 0{,}1302$	$\log\operatorname{cosec} d = 0{,}1302$	$\log\operatorname{cosec} d = 0{,}1302$
$\log A = 2{,}7030$	$\log B = 0{,}9624$	$\log C = 2{,}2172$
$A = 8'\,24'',7$		
$B = 9{,}2$		
$8\;33{,}9$		
$C = 2\;44{,}9$		
$x_1 = 5\;49{,}0$	$\log x_1 = 2{,}5428$	
$\log\operatorname{cosec}(d - x_1)$	$-\log\operatorname{cosec} d = -7$	
	$\log x = 2{,}5421$	$d = 132^0\,11'\,19''$
	$x = 5'\,48'',4$	$2x = 11\;36{,}8$
		$d_1 = 131^0\,59'\,42'',2.$

In den meisten nautischen Tabellen befindet sich eine Tabe der Logarithmen des Ausdrucks $\frac{\cos m_1 \cos s_1}{\cos m \cos s}$ unter der Benenn logarithmische Differenz. Diese Tabelle kann mit Vortheil benu werden, um durch Rechnung mit vierstelligen Logarithmen den Unt schied zwischen der scheinbaren und wahren Distanz zu finden.

Setzt man:

$$\frac{\cos m_1 \cos s_1}{\cos m \cos s} = U,$$

so hat man, da

6) . . . . . $\cos d_1 = 2 \cos m_1 \cos s_1 \cos \frac{\gamma^2}{2} - \cos \Sigma_1$

ist, auch

7) . . . . . $\cos d_1 = 2U \cos m \cos s \cos \frac{\gamma^2}{2} - \cos \Sigma_1.$

Es ist aber auch

8) . . . . . $\cos d = 2 \cos m \cos s \cos \frac{\gamma^2}{2} - \cos \Sigma.$

Durch Subtraction von Nr. 6) und Nr. 7) ergiebt sich:

9) . $\cos d_1 - \cos d = -(\cos \Sigma_1 - \cos \Sigma) - 2(1 - U) \cos m \cos s \cos \frac{\gamma^2}{2}$

und mit Hülfe von Nr. 8:

10) . . $\cos d_1 - \cos d = -(\cos \Sigma_1 - \cos \Sigma) - (1 - U)(\cos d + \cos \Sigma)$.

oder auch

11) . . . . . $\sin \frac{1}{2}(d - d_1) \sin \frac{1}{2}(d + d_1)$
$= \sin \frac{1}{2}(\Sigma_1 - \Sigma) \sin \frac{1}{2}(\Sigma_1 + \Sigma) - (1 - U) \cos \frac{1}{2}(d + \Sigma) \cos \frac{1}{2}(d - \Sigma$

Wird $\operatorname{cotg}\left(45 + \frac{y}{2}\right)^2 = U$ gesetzt, so ist:

$$1 - U = 1 - \operatorname{cotg}\left(45 + \frac{y}{2}\right)^2 = \frac{\sin\left(45 + \frac{y}{2}\right)^2 - \cos\left(45 + \frac{y}{2}\right)^2}{\sin\left(45 + \frac{y}{2}\right)^2}$$

$$= -\cos(90 + y) \operatorname{cosec}\left(45 + \frac{y}{2}\right)^2 = \sin y \operatorname{cosec}\left(45 + \frac{y}{2}\right)^2,$$

und daher:

12) . . . . . $\sin\frac{1}{2}(d-d_1)\sin\frac{1}{2}(d+d_1)$

$= \sin\frac{1}{2}(\Sigma_1-\Sigma)\sin\frac{1}{2}(\Sigma_1+\Sigma)$

$-\sin y\,\mathrm{cosec}\left(45+\frac{y}{2}\right)^2\cos\frac{1}{2}(d+\Sigma)\cos\frac{1}{2}(d-\Sigma).$

Da $\frac{1}{2}(d-d_1)$, $\frac{1}{2}(\Sigma_1-\Sigma)$ und y immer sehr klein sind, so ergiebt sich nach den eingeführten Bezeichnungen:

13) . . . . . $x\sin(d-x)$

$= \varrho\sin(\Sigma+\varrho) - y\,\mathrm{cosec}\left(45+\frac{y}{2}\right)^2\cos\frac{1}{2}(d+\Sigma)\cos\frac{1}{2}(d-\Sigma).$

y kann mit der nöthigen Genauigkeit nicht aus fünfstelligen Logarithmentabellen entnommen werden.

Es war

$$\mathrm{cotg}\left(45+\frac{y}{2}\right)^2 = U,$$

also ist auch:

$$\mathrm{tg}\left(45+\frac{y}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{U}},$$

mithin

$$\frac{1+\mathrm{tg}\frac{y}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{y}{2}} = \sqrt{\frac{1}{U}},$$

und da

$$\log\frac{1+\mathrm{tg}\frac{y}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{y}{2}} = 2\log e\left(\mathrm{tg}\frac{y}{2}+\frac{1}{3}\left(\mathrm{tg}\frac{y}{2}\right)^3\ldots.\right)$$

ist und y sehr klein ist, so wird

$$2\log e\,\mathrm{tg}\frac{y}{2} = \log\sqrt{\frac{1}{U}} = \frac{1}{2}\log\frac{1}{U},$$

Da $\log\frac{1}{U}$ gleich der dekadischen Ergänzung (dE) von $\log U$ ist, so hat man:

$$\log y + \log\log e + \log\mathrm{tg}\,1'' = \log \mathrm{d}E \log U - \log 2$$

und

$$\log y = \log \mathrm{d}E \log U - \log\log e - \log\mathrm{tg}\,1'' - \log 2$$

oder:

$$\log y = \log \mathrm{d}E \log U + 5{,}375\,6. \quad (5{,}375\,6 = n).$$

Ist

$$P = \varrho \sin(\Sigma + \varrho) \operatorname{cosec} d,$$

$$Q = y \operatorname{cosec}\left(45 + \frac{y}{2}\right)^2 \cos\tfrac{1}{2}(d+\Sigma) \cos\tfrac{1}{2}(d-\Sigma) \operatorname{cosec} d$$

und

$$x_1 = P - Q,$$

so ist:

$$\log x = \log x_1 + (\log \operatorname{cosec}(d - x_1) - \log \operatorname{cosec} d).$$

Zur Berechnung von $\log \operatorname{cosec}\left(45 + \frac{y}{2}\right)$ hat man y nicht nöthig. Für das obige Beispiel ist:

$\log U = 9{,}998215-10$
$dE \log U = 0{,}001785$
$\log \operatorname{tg}\left(45 + \frac{y}{2}\right) = 0{,}00089$
$\log \varrho = 3{,}0494$
$\log \sin(\Sigma + \varrho) = 9{,}5234-10$
$\log \operatorname{cosec} d = 0{,}1302$

$\log P = 2{,}7030$
$P = 8'\ 24'',7$
$Q = 2\ \ 35{,}8$

$x_1 = 5\ \ 48{,}9$
$\log \operatorname{cosec}(d - x_1) = 2{,}5427$
$-\log \operatorname{cosec} d = -7$

$\log x = 2{,}5420$
$x = 5'\ 48'',3$

$n = 5{,}3756$
$\log dE \log U = 7{,}2516-10$
$2 \log \operatorname{cosec}\left(45 + \frac{y}{2}\right) = 0{,}3001$
$\log \cos\frac{1}{2}(d+\Sigma) = 9{,}3931-10$
$\log \cos\frac{1}{2}(d-\Sigma) = 9{,}7419-10$
$\log \operatorname{cosec} d = 0{,}1302$

$\log Q = 2{,}1925$

$d = 132^0\ 11'\ 19''$
$2x = \ \ \ \ \ 11\ \ 36{,}6$

$d_1 = 131^0\ 59'\ 42'',4$

XXXIX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Einige Uebungsaufgaben aus der algebraischen Geometrie für Schüler.

Von

Herrn Dr. *Adolf Hochheim*,

Lehrer an der höheren Gewerbeschule zu Magdeburg.

1. In einen Kreis vom Radius r soll ein anderer Kreis gezeichnet werden, der den ersteren von innen berührt, so dass eine Tangente des kleineren Kreises, welche dem gemeinschaftlichen Durchmesser parallel läuft, im Berührungspunkte im Verhältniss wie 1:2 getheilt wird.

2. Ein rechtwinkliges Dreieck ist zu construiren aus der Hypotenuse und der Differenz zwischen der grösseren Kathete und dem kleineren Hypotenusenabschnitte.

3. Zur Construction eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben: die Differenz der beiden Hypotenusenabschnitte und die Summe der Höhe und des grösseren Hypotenusenabschnittes.

4. Zwei gerade Linien a und c seien gegeben ($a > c$). Die Linie c soll so in die Linie a hineingelegt werden, dass ihre Endpunkte den zweiten und dritten, die Endpunkte von a den ersten und vierten harmonischen Punkt bilden.

In welcher Beziehung müssen die beiden Linien a und c stehen, damit die Lösung der Aufgabe möglich ist?

Wie gross muss c sein, wenn die äusseren Abschnitte von a einander gleich sein sollen?

5. In dem Halbirungspunkte der Sehne eines Segmentes sei ein Loth errichtet und die Sehne nach einer Seite hin verlängert. Zwischen der Verlängerung und dem Lothe ist eine Tangente an den Bogen zu ziehen, die im Berührungspunkte im Verhältniss $m:n$ getheilt wird.

Schüleraufgabe.

Von

Herrn ***Emil Hain***,

Lehrer am Communalrealgymnasium in der Leopoldstadt, Wien.

Im Innern eines Kreises (Taf. IX. Fig. II.) befindet sich ein Dreieck ABC, dessen Seiten über beide Endpunkte verlängert werden, bis die Peripherie getroffen wird. Die Verlängerungen über A hinaus seien AA_1, AA_2; die über B hinaus BB_1, BB_2; die über C hinaus CC_1, CC_2.

Es ist dann:

$$AA_1 . AB_2 = AA_2 . AC_1,$$
$$BB_1 . BC_2 = BB_2 . BA_1,$$
$$CC_1 . CA_2 = CC_2 . CB_1;$$

oder:

$$AA_1 (AB + BB_2) = AA_2 (AC + CC_1),$$
$$BB_1 (BC + CC_2) = BB_2 (BA + AA_1),$$
$$CC_1 (CA + AA_2) = CC_2 (CB + BB_1);$$

und durch Addition dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$AA_1 . AB + BB_1 . BC + CC_1 . CA$$
$$= AA_2 . AC + BB_2 . BA + CC_2 . CB.$$

Setzen wir:

$$AB = BC = CA,$$

so erhalten wir:

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = AA_2 + BB_2 + CC_2,$$

d. i.:

Wenn die Seiten eines gleichseitigen Dreieckes, das in einem Kreise gelegen ist, über die Eckpunkte hinaus bis zur Peripherie verlängert werden: so sind die Summen je dreier abwechselnder Verlängerungen einander gleich.

Lehrsatz.

In Taf. IX. Fig. III. sei O der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises des Dreiecks $A_0\,A_1\,A_2$, und O_0 sei der Mittelpunkt des die Seite $A_1\,A_2$ berührenden äusseren Berührungskreises dieses Dreiecks; so ist

$$A_0\,A_1 \,.\, A_2\,A_0 = A_0 O \,.\, A_0 O_0.$$

Rev. G. H. Hopkins, M. A.

Dieser Satz soll bewiesen und weitere Folgerungen in Bezug auf den inneren Berührungskreis und die drei äusseren Berührungskreise sollen aus demselben gezogen werden. In leicht von selbst verständlicher Bezeichnung hat man nämlich z. B. die drei Gleichungen:

$$A_0 A_1 \,.\, A_2 A_0 = A_0\,O \,.\, A_0\,O_0,$$

$$A_1 A_2 \,.\, A_0 A_1 = A_1\,O \,.\, A_1\,O_1,$$

$$A_2 A_0 \,.\, A_1 A_2 = A_2\,O \,.\, A_2\,O_2;$$

also:

$$\overline{A_0 A_1}^2 \,.\, \overline{A_1 A_2}^2 \,.\, \overline{A_2 A_0}^2 = A_0\,O \,.\, A_1\,O \,.\, A_2\,O \times A_0\,O_0 \,.\, A_1\,O_1 \,.\, A_2\,O_2,$$

$$\frac{A_0 A_1 \,.\, A_1 A_2 \,.\, A_2 A_0}{A_0 O \,.\, A_1 O \,.\, A_2 O} = \frac{A_0 O_0 \,.\, A_1 O_1 \,.\, A_2 O_2}{A_0 A_1 \,.\, A_1 A_2 \,.\, A_2 A_0};$$

ferner:

$$\frac{A_0 A_1}{A_2 A_0} = \frac{A_1 O}{A_2 O} \,.\, \frac{A_1 O_1}{A_2 O_2},$$

u. s. w. u. s. w.

Für Schüler scheinen sich hieraus zweckmässige, im Ganzen nur leichte Uebungen zu ergeben.

XI.

Miscellen.

Ueber die Gränze, welcher x^x sich nähert, wenn x von der Seite des Positiven her sich der Null nähert.

Von

dem Herausgeber.

Die Gränze, welcher x^x sich nähert, wenn x von der Seite des Positiven her sich der Null nähert, bestimmt in der Tidskrift für Matematik och Fysik. Tredje Årgången. Häft. 2. 3. Mars—Mai 1870. p. 128. Herr J. Åkerlund (elev vid Gefle elementarläroverk*) auf folgende Art, die ich hier mittheile, weil sie mir weniger bekannt zu sein scheint. G.

Es ist $x^x = e^{x\lg x}$. Setzen wir nun $x = 1 - y$, wo wir y positiv und kleiner als die Einheit annehmen, so ist:

$$\begin{aligned} x\lg x &= (1-y)\lg(1-y) \\ &= -\frac{1}{1}y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}y^5 - \ldots\ldots \\ &\quad + \frac{1}{1}y^2 + \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + \frac{1}{4}y^5 + \ldots\ldots \\ &= -\frac{1}{1}y + \frac{1}{1.2}y^2 + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1}{3.4}y^4 + \frac{1}{4.5}y^5 + \ldots\ldots \end{aligned}$$

was für jedes positive y, welches kleiner als die Einheit ist, gilt.

*) „Högre Elementar-Läroverk“ oder „Högre Elementar-Läroverket“ ist das, was wir Gymnasium oder höhere Realschule nennen würden. Es giebt noch „Lägre Elementarläroverket“, wobei ich bemerke, dass „läg“ niedrig, [illegible] heisst. Ob „Läroverk“, ohne Beisatz, noch eine besondere Art von [illegible] bezeichnet, kann ich nicht sagen, glaube es aber nicht.

Nähert sich nun y der Einheit, also x der Null, so ist, wie sich hieraus unmittelbar ergiebt, unter dieser Voraussetzung:

$$\text{Lim.}\, x l x = -\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots\ldots$$

Aus der Relation

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{n}{n+1}$$

folgt aber:

$$\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1};$$

also durch Addition:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots.+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

oder:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots.+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

und folglich für ein in's Unendliche wachsendes n:

$$\text{Lim}\left\{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots.+\frac{1}{n(n+1)}\right\}=1,$$

also:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots.=1,$$

folglich:

$$-1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots=0.$$

Daher ist nach dem Obigen für ein der Null sich näherndes x

$$\text{Lim.}\, x l x = 0,$$

und weil nun nach dem Obigen

$$x^x = e^{xlx}$$

war, so ist, wenn x sich der Null nähert:

$$\text{Lim.}\, x^x = e^{\text{Lim.}\, xlx} = e^0,$$

also:

$$\text{Lim.}\, x^x = 1.$$

Wie schon bemerkt, kann ich jetzt nicht mit Bestimmtheit sagen, ob diese oder eine ähnliche Entwickelung schon früher gegeben worden ist, glaube aber, dass dieselbe weniger als sie verdient bekannt ist, und habe sie deshalb hier mitgetheilt.

Literarischer Bericht
CCIX.

Am 22. April 1871 starb nach Zeitungsnachrichten im 80sten ebensjahre

Dr. Friedr. Magn. Schwerd,

Professor am Lyceum zu Speier,
itglied der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften.

Einen etwas ausführlicheren Necrolog dieses so vielfach ver-enten Mathematikers und Physikers aus kundiger Feder zum bdruck in unserer Zeitschrift würden wir mit besonderem Danke tgegen nehmen, und bitten recht sehr um baldige Zusendung nes solchen. G.

Auch den kürzlich in London erfolgten Tod des berühmten tronomen und Mathematikers John Herschel zeigen wir hier rläufig an. G.

Berichtigung. Nach einer von Herrn Doctor C. F. Lind-an in Strengnäs mir gütigst gemachten Mittheilung heisst r leider kürzlich verstorbene treffliche Mathematiker und Astro-m Selander nicht, wie im Literar. Ber. Nr. CCV. Seite 1 eht, „R. G. Selander", sondern „Nicolaus Haquinus Se-nder". Die Notiz in der genannten Nummer des Literar. Ber-ar, wie auch dort bemerkt ist, aus einer Zeitung entlehnt, welche n gerügten Fehler verschuldet hat. Ich bitte bei dieser Gele-nheit wiederholt recht dringend, mir so bald als möglich eine ebensskizze dieses trefflichen Verstorbenen zum Abdruck im Archiv zusenden. G.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Jahrbuch über die gesammten Fortschritte der Mathematik im Verein mit anderen Mathematikern herausgegeben von Dr. Carl Ohrtmann und Dr. Felix Müller. Erster Band. Jahrgang 1868. (In 3 Heften.) Heft I. Berlin. Druck und Verlag von Georg Reimer. 1871. 8°.

Das vorliegende Unternehmen darf wohl mit Recht von jedem Mathematiker mit Freuden begrüsst werden, der sich um das Fortschreiten seiner Wissenschaft kümmert; noch mehr von dem, welcher selbst auf dem weiter fortbauen will, was schon auf dem Gebiete derselben gefunden. Das vorliegende erste Heft, das sich das Jahrbuch zum Muster genommen hat, welches die berliner physikalische Gesellschaft über die Fortschritte der Physik herausgibt, enthält die auf dem Gebiete der Geschichte und Philosophie der Mathematik, sowie der Arithmetik im Jahre 1868 erschienenen Schriften und Abhandlungen; das zweite Heft soll ebenso die Geometrie, das dritte die angewendete Mathematik behandeln. Die Jahrgänge 1869 u. 1870 werden in einem Bande unmittelbar nach Ausgabe des dritten Heftes erscheinen. Ein bei einiger Aufmerksamkeit leicht durch die Herausgeber zu beseitigender Uebelstand sind die in übergrosser Zahl auftretenden Druckfehler. Wir wollen hier nur diejenigen aufführen, die auf dem ersten Bogen uns aufgestossen, machen aber darauf aufmerksam, dass sie eben so zahlreich in den übrigen Bogen sich finden: S. V, Z. 13 u. 23 lies Università; ebendas. Z. 15 à (letzterer Fehler á für à ist sehr häufig); Seite 2, Z. 12 lies Hoche; S. 5, Z. 22 füge hinzu Boncomp. Bull. I, 51—53; S. 6, Z. 10 lies Peckkami; ebendas. Z. 14 lies Hameti; S. 7, Z. 2 lies Handschrift; ibid., Z. 9 lies χείρ; ibid., Z. 36 lies R fol. 23; S. 8, Z. 1 lies Zodiakus; ibid., Z. 6 lies 1724; ibid., Z. 10 füge hinter Thorn hinzu herausgegeben; ibid., Z. 13 lies Chems-Eddin el Massouli; S. 9, Z. 15 hinter spécieuse füge hinzu par François Viète; S. 12 Z. 12 lies Schlömilch Z. Literaturz. XIII, 22—25 (im 14. Bd. würde man wohl vergeblich gesucht haben); S. 13, Z. 24 lies VII, 304; ibid., Z. 31 lies formola und Leibniz; S. 15, Z. 14 lies Luigi; ibid., Z. 17 lies gravità; ibid., lies Notizie. — 22 Druckfehler auf 16 Seiten!! Wegen eines zweiten Mangels entschuldigen sich die Herren Herausgeber in der Vorrede, dass es ihnen nämlich unmöglich gewesen, alle Erscheinungen des betreffenden Jahres zu berücksichtigen; die Beschaffung namentlich der ausländischen

Litteratur sei sehr schwierig gewesen. Jedenfalls hätten dann aber die Titel der betreffenden Schriften aufgeführt werden können; ja selbst die deutsche Litteratur ist keineswegs vollständig berücksichtigt, auch nicht sämmtliche Abhandlungen der benutzten Zeitschriften. An fehlenden Werken aus 1868 lieferte uns ein einziger Antiquarkatalog einer berliner Handlung bei ganz flüchtiger Durchsicht folgende Ergänzungen: Broch, Traité élémentaire des fonctions elliptiques. Christiania 1868; — Dienger, Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. 2 Bände. Stuttgart 1868; — Heime, Untersuchungen besonders über relative Primzahlen, primäre und secundäre Wurzeln, quadratische Reste und Nichtreste etc. Berlin 1868; — Harting, Christian Huygens. Groningen 1868; Harting & Kaiser, Christian Huygens, Galilée et Pascal. Amsterdam 1868; — Hipler, Nikolaus Kopernikus u. Martin Luther. Nach Ermländischen Archivalien. Braunsberg 1868; — Richelot, die Landensche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen. Königsberg 1868; — Idem, Ueber die Integration eines merkwürdigen Systems von Differentialgleichungen, ibid. eod.; — Idem, Eine neue Integralgleichung des Jacobi'schen Systems von Differentialgleichungen, ibid. eod.; — Ronget, Théorie des emprunts par annuités, Paris 1868; — Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, et des applications du calcul différentiel à la Géométrie. 2 vols. Paris 1867 – 68; — Todhunter, Treatise on the integral calculus and its applications 3^{d}. ed. London 1868; — Durège, Theorie der elliptischen Functionen. 2. Aufl. Leipzig 1868; — Martin, Galilée, les droits de la science et la méthode des sciences physiques. Paris 1868. — Aus Zeitschriften sind z. B. nicht berücksichtigt: Die in Grunerts Archiv sich findenden vielfach interessanten Nekrologe von Mathematikern (Martin Lauber, Josef Georg Böhm, Mathias Schaar, Bernhard Riemann), auch die Bemerkung von Booth, Ueber Theilbarkeit der Zahlen durch 7 (Thl. XLVIII, 117). Aus den Comptes Rendus Thl. LXVI fehlen z. B.: Le Cordier, Sur un intégrale double de Gauss (707); — Morin, Sur les paramètres différentiels simples ou sumultanés des fonctions (601); — Catalan, Sur les nombres d'Euler (418); — Aus Crelle LXVIII: Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Conficienten (354). — Eine noch grössere Auslese würde man jedenfalls erhal-

ten, wenn man die werthvollen Uebersichten von Cantor (Zeitschrift für Mathematik) und von Boncompagni (Bullettino) vergleichen wollte, oder die Polytechnische Bibliothek, die Quandt und Händel in Leipzig herausgeben. — Ein anderer Uebelstand, den jedoch mehr der Verleger verschuldet, ist, dass das Buch nicht geheftet ist, sondern nur die Bogen hinten an den Umschlag geleimt; ein Uebelstand der sich freilich jetzt vielfach eingeschlichen, z. B. auch in die Schlömilch'sche Zeitschrift für Mathematik. Will man ein solches Buch benutzen, schneidet es deshalb auf, so fallen die Blätter nach allen Seiten. Hoffentlich stellen schon die nächsten Hefte die gerügten Uebelstände ab. Trotz unserer Ausstellungen aber, mögten wir doch das Unternehmen nochmals angelegentlichst der Beachtung empfehlen, und die Leser sowohl als die Herausgeber bitten, unsere Bemerkungen vielmehr als ein Zeichen des Eifers anzusehen, mit der wir für das Werk grössere Vollkommenheit zu erreichen wünschen, als für ein Zeichen von Lust am Tadeln. C.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma 1870. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVIII. S. 4.).

Tomo III. Settembre 1870. Quelques arpenteurs hollandais de la fin du XVIme et du commencement du XVIIme siècle et leurs instruments. Par G. A. Vorsterman van Oijen, Professeur de Mathématiques et Physique. p. 323.

Tomo III. Ottobre 1870. Fortsetzung der Abhandlung in dem Septemberhefte (bis zu Ende). p. 355. und Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 377.

Die in diesen beiden Heften enthaltene Abhandlung des Herrn Vorsterman van Oijen ist eine für die Geschichte der Feldmesskunst—auch der Mathematik überhaupt—wichtige, und liefert uns in sehr interessanter Weise Nachrichten über mehrere holländische Feldmesser des 16. u. 17. Jahrhunderts, über deren Schriften und Messungsmethoden und die von ihnen angewandten Instrumente, von welchen letzteren auch sehr deutliche in ziemlich grossem Maassstabe ausgeführte Abbildungen beigegeben sind, so dass wir glauben, alle unsere Leser, die sich für die Geschichte der Mathematik und ihrer Anwendungen interessiren, auf diese sehr werthvolle Abhandlung aufmerksam machen zu müssen. — Unter den Feldmessern (und Mathematikern), mit denen uns diese Abhandlung näher bekannt macht, nennen wir hier vor allen den berühmten Simon Stevin-

über welchen wir pag. 353 folgender Notiz begegnen: „Quelquefois on cite Stevin comme le precepteur du prince Maurice de Nassau*), je ne saurais décider ce qui en est. Le prince Maurice arriva à l'université de Leyde dans le mois de Juillet 1582. Je suppose, comme je viens de dire déjà, que le prince Maurice y fit sa connaissance et le nomma par la suite son ingénieur spécial. Des mémoires du prince Maurice insérés dans les Oeuvres de Stevin, on voit que cet homme illustre a eu beaucoup d'influence sur les progrès mathématiques du jeune prince." — Ueber den namentlich auch im Gebiete der sogenannten reinen Mathematik, nicht weniger berühmten, wahrhaft grossen Mathematiker Albert Girard sagt der Herr Verfasser pag. 359: „Albert Girard, probablement Français de naissance, a publié tous ses ecrits en Hollande, c'est pourquoi on le cite toujours comme mathématicien néerlandais**). J'ai dit ailleurs que je le crois français par trois raisons, c'est-à-dire: 1°. Qu'il se servait toujours de la langue française, soit qu'il écrivit un livre original, soit qu'il traduisit d'autres auteurs: 2°. Qu'il se fit connaitre dans les Pays-Bas vers le temps, que le cardinal de Richelieu avait ôté aux Huguenots les privilèges, que Henri IV leur avait donnés. 3°. Que dans ses écrits on rencontre des passages qui montrent sa haine contre un certain Cardinal qu'il ne nomme pas. Ausser diesen Gründen führt der Herr Vf. noch eine Note A. Girards zu dem 3. Buche der Statik S. Stevins an, von welcher er sagt: „Ce passage démontre à lui seul que ce grand mathématicien n'appartient pas aux Pays-Bas. Girard est mort en 1633; la date exacte m'est inconnue." — Unter den übrigen vielen Mathematikern, mit denen uns diese Abhandlung bekannt macht, nennen wir hier noch besonders F. van Schooten und sind sehr begierig auf die besondere Abhandlung, die der Herr Verf. über den berühmten Willebrordus Snellius van Royen (1591—1626) künftig zu publiciren verspricht. Auch Adrian Metius (Professor in Franeker) wird pag. 372 weiter besprochen. — Wir müssen uns hier mit diesen wenigen Auszügen über allgemeiner bekannte Mathematiker begnügen, verweisen aber nochmals auf den ganzen übrigen wichtigen Inhalt der trefflichen Abhandlung.

Tomo III. Novembre 1870. Sull' Aritmetica. Dissertazione storico-critica di Andrea Stiattesi, p. 389. — Notice

---

*) Bekanntlich eine vielfach verbreitete Meinung. G.

**) Bekanntlich auch allgemein in Deutschland. G.

biographique sur Bernard Riemann par M. Ernest Schering. (Traduit de l'allemand par le Dr. Paul Mansion). p. 409*). Catalogue des travaux de Bernard Riemann. Paul Mansion.

Arithmetik.

Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche für Schule und Praxis bearbeitet von F. G. Gauss. Stereotyp-Druck. Berlin. Ludwig Rauh. 1870. 8°. (Preis 20 Sgr.).

Logarithmische und trigonometrische — namentlich auch fünfstellige — Tafeln sind in neuester Zeit sehr viele, und zum Theil sehr vortreffliche erschienen. Die vorliegenden Tafeln sind auf sehr schönem Papier mit sehr deutlichen und scharfen Ziffern gedruckt. Dass denselben eine Einrichtung gegeben worden wäre, welche sie zur besonderen Empfehlung vor vielen anderen neueren Tafeln berechtigte, können wir nicht finden; jedoch glauben wir, dass namentlich die Proportionaltheile in solcher Vollständigkeit und Ausdehnung gegeben sind, dass die Genauigkeit wirklich erreicht wird, welche durch fünfstellige Tafeln überhaupt erreicht werden kann, was aber viele andere der neuerlich erschienenen Tafeln wenigstens in völlig gleicher Weise leisten. Tadeln müssen wir, dass in der Tafel der Logarithmen der Zahlen die jetzt gewöhnliche Einrichtung beibehalten und nicht auf die ältere Lalande'sche Einrichtung zurückgegangen worden ist, was bei nur fünfstelligen Tafeln sehr gut möglich, und z. B. in den trefflichen Tafeln von J. Hoüel, die überhaupt nicht genug empfohlen werden können, und in den (siebenstelligen) Tafeln von A. Forti (m. s. Literar. Ber. Nr. CCVIII. S. 9.) in zweckmässigster und sehr zu empfehlender Weise geschehen ist; dass diese Einrichtung namentlich bei'm antilogarithmischen Gebrauch der Tafeln sehr viele Vortheile darbietet, liegt auf der Hand.

Ausser den eigentlichen logarithmischen Tafeln enthalten diese Tafeln noch eine ziemliche Anzahl anderer nützlicher Tafeln und Täfelchen (auch auf Tafel V. Additions- und Subtractions-Logarithmen) die wir aber der Beschränktheit unseres Raumes wegen einzeln nicht namhaft machen und namhaft zu machen nicht für nöthig halten, da dieselben sich in ähnlicher Weise meistens auch in den übrigen neueren Tafeln finden.

---

*) M. vergl. Archiv Thl. XLVIII. Literar. Ber. Nr. CLXXXXI. S. 1.

Auf einem Bogen hat derselbe Herr Verf. in demselben Verlage auch herausgegeben:

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. (Preis 5 Sgr.).

Nautik.

Zweiter Bericht der ständigen Commission für die Adria an die Kaiserliche Akademie der Wissenschaften, betreffend die Jahre 1860—1870. Redigirt vom Sectionsrath Dr. J. R. Lorenz. Wien. Aus der Kaiserl. Königl. Hof- und Staatsdruckerei. In Commission bei Carl Gerold's Sohn. 1871. 4°.

In dem Literarischen Berichte Nr. CCIII. S. 6. haben wir unseren Lesern ausführlich Nachricht gegeben von dem Zweck und den Aufgaben der von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien ernannten Adria-Commission, und können den Zweck dieser Commission, wie schon dort geschehen, in der Kürze nicht anders und nicht besser bezeichnen, als die neue Aufnahme des adriatischen Golfs in allen Beziehungen, welche in maritimer Rücksicht für die Nautik irgendwie von Wichtigkeit sind, ein Zweck, dessen hohe Bedeutung wohl von Jedem, der für dergleichen Unternehmungen ein wahres Verständniss besitzt, sogleich erkannt werden muss, und der nur erreicht werden kann durch in dem grossartigsten Maassstabe ausgeführte Arbeiten, für deren Veranlassung und Förderung man der Kaiserlich österreichischen Regierung, insbesondere der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, zu dem grössten und lebhaftesten Danke verpflichtet ist.

Der in der oben genannten Nummer des Literarischen Berichts angezeigte Erste Bericht der Adria-Commission war gewissermassen nur ein vorläufiger, welcher den Zweck der betreffenden Arbeiten in's Licht zu setzen bestimmt war, und von den zu deren Ausführung in Anwendung gebrachten Mitteln und überhaupt getroffenen grossartigen Veranstaltungen in der interessantesten Weise Kenntniss gab. Der vorliegende in der elegantesten Weise äusserlich ausgestattete Zweite Bericht referirt nun über einen Theil der bereits ausgeführten Arbeiten selbst und lässt nur die Ausdauer, Sorgfalt, Consequenz u. s. w. bewundern, womit in der Ausführung dieser wichtigen Arbeiten vorgeschritten wird. Begreiflicher Weise müssen wir bei einem solchen Werke an diesem Orte von allen ausführlichen und in's Einzelne gehenden Darlegungen vollständig Abstand nehmen, und müssen uns begnügen,

einen Jeden, der an den Fortschritten und Verbesserungen der Nautik in einem so wichtigen Meere, wie der adriatische Golf ist, lebhaftes Interesse nimmt, dringend auf dasselbe aufmerksam zu machen und zu dessen sorgfältigster Beachtung aufzufordern.

Möge daher mit der Bemerkung, dass der vorliegende Bericht, mit Ausnahme des meteorologischen Theils, welchen Herr Jelinek übernommen hat, ganz von Herrn Lorenz bearbeitet und redigirt worden ist, hier nur noch die folgende allgemeine Inhaltsangabe Platz finden:

I. Uebersicht der Wirksamkeit der Adria-Commission. Stationen und deren Ausrüstung. Beziehungen zur k. k. Kriegsmarine. Beziehungen zur österreichischen Handelsmarine. — II. Resultate der Stationsbeobachtungen. A. Meteorologische Beobachtungen. B. Maritime Beobachtungen (Temperatur und Salzgehalt). Discussion der maritimen Beobachtungen. 1. Meeres-Temperatur. 2. Dichte und Salzgehalt. — Anhang. Inventarium der adriatischen Beobachtungs-Stationen nach dem Stande zu Ende April 1870. — Beschreibung der 1869 bis 1870 angeschafften neuen Apparate. Mit 4 Tafeln. (eine Beschreibung von Instrumenten mit höchst sorgfältig und deutlich ausgeführten Zeichnungen, welche ein sehr grosses Interesse darbietet). — Inspections-Bericht des Herrn Directors F. Ritters von Schaub über den Stand der adriatischen Stationen.

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona. (Presso il R. Istituto tecnico superiore di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal Prof. Tortolini*). Milano. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVIII. S. 14.).

Serie II^a. Tomo IV^a. Fascicolo 3e (Aprile 1871). Dini: Sopra alcune formole generali della teoria delle superficie e loro applicazioni (continuazione e fine). p. 177. — W. Roberts: Sur les courbes équidistantes sphériques. p. 207. — Ed. Weyr: Note sur les fonctions dont les dérivés successives forment des séries arithmétiques. p. 212. — Painvin: Etude de la courbure en un point multiple d'une courbe plane. p. 215. — Lipschitz: Sopra la teoria della inversione di un sistema di funzioni. p. 239. — Bardelli: Alcuni teoremi di statica. p. 260.

*) Thl. LII. Literrr. Ber. Nr. CCVIII., S. 15, Z. 16. steht durch einen Druckfehler „Tartolini“ statt „Tortolini“.

Literarischer Bericht
CCX.

Am 28. April 1871 starb leider in Triest der um Mathematik und Naturwissenschaft, insbesondere um Astronomie, Nautik, Hydrographie, Meteorologie u. s. w., in den vielfachsten Beziehungen und im weitesten Umfange hochverdiente Professor und Director

Dr. Franz Ritter von Schaub,

seit langen Jahren eng befreundet dem Herausgeber des Archivs, welcher die vielfachste Gelegenheit und Veranlassung gehabt hat, die über sehr viele Theile der Wissenschaft verbreiteten gediegenen Kenntnisse des leider so früh Verstorbenen, seinen grossen Scharfsinn in der Anwendung derselben, seine ungemein grosse Arbeitskraft, seine grosse Liebe für Deutschland und sein engeres Vaterland Oesterreich, und seinen grossen Eifer für immer grössere Hebung und Verbreitung des wissenschaftlichen Lebens in letzterem, kennen zu lernen und zu bewundern. In je intimeren freundschaftlichen Verhältnissen der Herausgeber zu Schaub seit einer langen Reihe von Jahren gestanden zu haben sich rühmen darf, je mehr er sich Demselben in verschiedenen Rücksichten zu dem wärmsten und innigsten Danke, der nie aus seinem Herzen verschwinden wird, lebhaft verpflichtet fühlt: desto tiefer wurde er durch die ihm ganz unvorbereitet zugehende Nachricht von dem frühen Tode des trefflichen Mannes in seinem Innersten erschüttert; möge demselben die Erde leicht sein, und seine trauernde Familie einige Beruhigung finden in dem rühmlichsten Nachrufe, welcher dem theuren Dahingeschiedenen allgemein gezollt wird! aus des Herausgebers Herzen wird das dankbarste Andenken an denselben niemals entschwinden.

Der folgende Necrolog, mit welchem der Herausgeber gewiss viele seine Leser erfreuen wird, ist aus der trefflichen „Zeit-

schrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von C. Jelinek und J. Hann. VI. Band. Nr. 13. S. 230 – S. 232" entlehnt. G.

Necrolog.

Die folgenden Zeilen seien dem Andenken eines Mannes gewidmet, der unserem Vereine seit seinem Entstehen angehörte und dem die Meteorologie manchen wesentlichen Dienst verdankt.

Dr. Franz Ritter von Schaub wurde am 23. April 1817 zu Gross-Schweinbart in Niederösterreich geboren, erhielt die erste Bildung in der ländlichen Schule seiner Heimath und betrat im Jahre 1828 das Josefstädter Gymnasium zu Wien. Da Schaub die Vorbereitung für das Latein, welche der Lehrer bei seinen Schülern in der Regel annehmen durfte, nicht erhalten hatte, blieb er zurück, so dass seinen Eltern der Rath ertheilt wurde, ihm eine andere Berufsrichtung zu geben, da er zum Studium nicht tauge. Der Pfarrer seines Geburtsortes aber, der die Fähigkeiten des Knaben kennen gelernt hatte, wollte das nicht gelten lassen, unterrichtete ihn nun selbst privatim und hatte die Freude, seinen Schützling am Ende des ersten Semesters glänzend bestehen zu sehen. Von nun an setzte Schaub seine Studien öffentlich und mit sehr gutem Erfolge fort. Nachdem er das Gymnasium schon zwei Jahre frequentirt hatte, trat noch einmal ein Zweifel über seinen Beruf an ihn heran, hauptsächlich durch seinen Vater hervorgerufen, der den talentvollen Sohn gerne an der Seite behalten hätte; seine Mutter jedoch im Vereine mit dem Pfarrer bestärkte ihn, an der einmal ergriffenen Berufswahl festzuhalten. Im Jahre 1833 vollendete er das damals in Oesterreich sechsjährige Gymnasium und bezog die Universität Wien, wo er zunächst die zwei sogenannten philosophischen Jahrgänge, eine etwa den beiden letzten Classen der jetzigen lateinischen Mittelschule gleich zu achtende Propädeutik absolvirte und nun durch fünf Jahre theils medicinischen, theils, und zwar hauptsächlich, mathematischen und astronomischen Studien an der Universität und am Polytechnikum oblag, bis er im Jahre 1840 zum Assistenten der Wiener Sternwarte bestellt wurde. Im Jahre 1843 erhielt Schaub als Adjunct der Sternwarte seine erste bleibende Anstellung; mit derselben war damals die Supplirung der Vorlesungen über populäre Astronomie an der Universität verbunden. Nebenbei unterrichtete er zu dieser Zeit die jungen Fürsten Schönburg und Pálffy, so wie den Grafen Károly, der bald darauf in die Kriegsmarine trat, in Mathematik und Astronomie. Zufällige Ver-

hältnisse hatten einen mehrjährigen Rückstand in der Publication der Annalen der Wiener Sternwarte erzeugt, so dass es einer besonderen Anstrengung von Seite der Anstalt bedurfte, um innerhalb fünf Jahren neun Bände erscheinen zu lassen. Schaub betheiligte sich bei dieser Aufgabe mit solchem Eifer, dass der Director der Sternwarte sich veranlasst fand, ihn als Mitherausgeber auf den Titeln der betreffenden Bände dieses Jahrbuches zu nennen, das Schaub überdies mit verschiedenen gediegenen Aufsätzen bereicherte. Nachdem Schaub im Jahre 1842 die totale Finsterniss in Wien beobachtet und so als einer der ersten gewirkt hatte, das bis damals sehr wenig bekannte Phänomen näher kennen zu lernen, begab er sich im Jahre 1847 nach Cilli in Steiermark, um die dort ringförmige Sonnenfinsterniss zu beobachten. Im Jahre 1849 erhielt er den Auftrag, die k. k. Akademie für Handel und Nautik in Triest zu inspiciren und darüber zu berichten. Ein ähnlicher Auftrag führte ihn im Jahre 1850, das ihm unter anderem das Doctordiplom der Universität München brachte, wieder nach Triest behufs Inspection des kurz vorher von Venedig dahin verlegten Kriegsmarine-Collegiums und zur Errichtung einer Sternwarte für dasselbe. Noch in demselben Jahre wurde er zum Astronomen und Professor der nautischen Astronomie an beiden eben genannten Instituten ernannt. Im Jahre 1857 wurde ihm die Leitung der Marine-Sternwarte mit dem Titel Director übertragen. Zu dieser Zeit besuchte er den Orient, den er schon einige Jahre früher in Begleitung des Fürsten Pálffy bereist hatte, und benützte diesen Ausflug zu magnetischen Beobachtungen. Bald darauf ging er nach Frankreich, England und Belgien, um die hydrographischen Anstalten dieser Staaten kennen zu lernen, und erhielt nach seiner Rückkunft den Auftrag, einen Plan für ein solches in Oesterreich zu gründendes Institut auszuarbeiten. Dasselbe trat im Jahre 1860 in's Leben und Schaub wurde zum Director desselben berufen. Als Erzherzog Maximilian, den Schaub zuerst in nautischer Astronomie unterrichtet, der ihm später als gnädiger Gönner ungewöhnliches Vertrauen geschenkt hatte und ihn zuletzt durch Ernennung zum Commandeur des Guadelupe-Ordens auszeichnete, die österreichischen Staaten verliess, um den mexikanischen Kaiserthron zu besteigen, wurde Schaub die Direction der Akademie für Handel und Nautik übertragen, eine Stellung, die er bis zu seinem Ende bekleidete und gewissenhaft zur Hebung des Institutes, namentlich durch Errichtung eines Cursus über Schiffbau, so wie eines meteorologisch-astronomischen Observatoriums benützte, welchem letzteren Triest das die Stadt-Uhren und die Chronometer der im Hafen ankernden Schiffe regulirende

Mittagszeichen verdankt. Im Jahre 1867 wurde er zum Schulrathe für die nautischen Schulen, die kurz vorher nach von ihm vorgelegten Statuten reorganisirt worden waren, ernannt. In den letzten Jahren war er der von der k. Akademie der Wissenschaften eingesetzten ständigen Commission für physikalische Erforschung der Adria in höchst anerkennenswerther Weise behülflich, namentlich organisirte und reducirte er die Fluthbeobachtungen, für welche von ihm an österreichischen Küsten der erste zweckmässige Pegel schon mehrere Jahre vorher eingerichtet war. Wenige Monate vor seinem nach langem, schmerzhaftem Leiden am 28. April d. J. erfolgten Tode wurde ihm die Decoration der eisernen Krone und damit ihm und seinen Kindern der Ritterstand zu Theil. Die letzte ihm gewordene ehrenvolle Mission eines Referenten über die maritime Ausstellung in Neapel sollte er nicht mehr antreten, denn nahezu gleichzeitig mit dem ersten Auftrage zeigten sich die Keime der bald darauf als unheilbar erkannten Krankheit.

Von seinen Publicationen seien als die wesentlichsten hier folgende erwähnt:

„Zusammenstellung der Beobachtungen der totalen Sonnenfinsterniss vom 7. Juli 1842 in Oesterreich und Turin" (Annalen der Wiener Sternwarte, neue Folge, II. Band), eine sehr schätzenswerthe Uebersicht. — „Compendium der ebenen und sphärischen Trigonometrie, Wien 1849" (wurde in's Italienische übersetzt). — „Länge von Palermo" (Ann. d. Wien. Sternw. N. F. XIV. Bd.) — „Leitfaden der nautischen Astronomie, Triest 1853" (in's Italienische und Holländische übertragen), wohl das erste Handbuch dieser Art von wissenschaftlicher und nicht mehr schematischer Form, wie alle seine Vorgänger. — „Nautische Tafeln, Triest 1853" (auf Geheiss und Kosten Sr. k. Hoheit Erzherzog Maximilian veröffentlicht). — „Magnetische Beobachtungen im Mittelmeere, Triest 1858." — „Ueber die Deviation des Compasses durch das Eisen eines Schiffes, deutsch nach F. J. Evans und Archibald Smith, Wien 1864." — „Almanach der österreichischen Kriegsmarine, Wien 1862—65, Triest 1866—67", mit Aufsätzen von Schaub: Ueber die Bestimmung der Entfernungen auf der See, über Fitzroy's Witterungsanzeigen, über Aenderungen der Deviation des Compasses, etc.

(Die vorher genannten grösseren Schriften Schaub's, auch der Almanach der österr. Kriegsmarine, sind alle im Archiv ausführlich angezeigt. G.)

Geschichte der Mathematik und Physik.

Das im Literar. Ber. Nr. CCVIII. S. 4. nur im Auszuge und nicht ganz fehlerfrei mitgetheilte, die angebliche Erfindung

des Galvanismus durch die Frau Galvani's betreffende Sonnett will ich hier seines Interesses wegen vollständig mittheilen. Es lautet folgendermassen:

Quella donna gentil, cui d'aureo strale
Piagata il seno teco Amor congiunse,
Poi morte con quel suo colpo fatale
Per farne bello il Ciel da te disgiunse;

Quella non fu, che novo ardor vitale
In rana ignuda a disvelar pur giunse,
Quand' una, ed altra man con vanto eguale
Il conduttor metallo, e i nervi punse?

Nè a te, Signor, questa fedel consorte
Tacque l' ignoto arcan, per cui tuo nome,
Oltre l' Italo suolo altero vassi.

Oh se vedessi di sì bella sorte
Com' ella esulta dolcemente, e come
Di te ragiona, e de' tuoi chiari passi!

Ich entlehne dasselbe aus der folgenden, mir von Herrn Professor Comm. Silvestro Gherardi in Florenz gütigst mitgetheilten, freilich schon älteren, aber für die Geschichte der Erfindung des Galvanismus mir sehr wichtig scheinenden, 153 Seiten starken Schrift, auf die ich hier zugleich — mit besonderem Danke für deren gütige Mittheilung durch Herrn Commendatore S. Gherardi — aufmerksam machen möchte:

Elogio storico di Luigi Galvani composto da G. L. Alibert. Traduzione dal Francese. In Bologna. As. Tommaso d'Aquino. MDCCCII. 8°. (pag. 137.).

A. a. O. des Literarischen Ber. S. 3. letzte Zeile muss es „Tognetti" statt „Tongetti", wie dort steht, heissen.

G.

Vermischte Schriften.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CCVIII. S. 15.).

Anno IX. Marzo e Aprile 1871. Alcuni teoremi di Geometria; per V. Mollame. p. 65. — Quistioni; per V. Eugenio. p. 67. — Osservazioni geometriche; per O. Tognoli. p. 68. — Sulle forme binarie di grado qualunque; per G. Battaglini. p. 76. — Sur les fonctions de Jacques Bernoulli, et sur l'expression de la différence entre une somme et une intégrale de

mêmes limites; par V. Imchenetsky. Traduzione dal russo di J. Hoüel. p. 87. — Soluzione di due quistioni proposte dal sig. Bitonti, e di due quistioni proposte nei Nouvelles Annales de Mathématiques; per V. Cerruti. p. 104. — Soluzione di una quistione proposta nell' Educational Times; per P. Cassani; p. 108. — Soluzione di una quistione proposta nell' Educational Times; per V. Mollame. p. 109. — Dimostrazione di due teoremi proposti dal sig. Dostor nei Nouvelles Annales de Mathématiques; per V. Eugenio. p. 112. — Soluzione di un problema di Geometria, proposto nell' Educational Times; per F. Fuortes. p. 115. — Soluzione di una quistione proposta nell' Educational Times; per V. Mollame. p. 117. — Nota sul Libro XII. di Euclide, e sul Trattato di Archimede relativo alla misura del circolo e dei corpi rotondi; per E. d'Ovidio. p. 122. — Sulla divisibilità dei numeri periodici e sulla determinazione dei periodi decimali; per G. Barillari. p. 125.

Anno IX. Maggio e Giugno. 1871. Sulla divisibilità dei numeri periodici e sulla determinazione dei periodi decimali; per G. Barillari. p. 129. — Nota sui determinanti; per G. Battaglini. p. 136. — Sulle curve piane razionali del terz'ordine; per Em. Weyr. p. 145. — Della generazione delle superficie mediante reti proiettive; per E. Padova. p. 148. — Un teorema di Geometria; per F. Tano. p. 151. — Sulle forme ternarie di grado qualunque; per G. Battaglini. p. 152. — Studio sopra una quistione proposta nell' „Educational Times"; per P. Cassani. p. 170. — Soluzione di alcune quistioni proposte nei „Nouvelles Annales"; per V. Cerruti. p. 173. — Quistioni p. 179. — Un discorso del Dott. Hirst sopra Euclide come libro di testo. p. 180. — Nota sul numero delle superficie di una rete, che hanno un contatto tripunto con la curva d'intersezione di due superficie algebriche; per O. Tognoli. p. 188.

Die päpstliche Akademie der Wissenschaften in Rom, welche sich in ihrer Sessione I^a des Jahres 1871 (5 Marzo) neu constituirt hat, hat in dieser ersten diesjährigen Sitzung beschlossen, ihren alten Namen:

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei

auch fernerhin unverändert beizubehalten. Die weitere Herausgabe der „Atti" ist dadurch möglich gemacht worden, dass Herr Principe D. Baldassarre Boncompagni in Rom dieselben auf seine Kosten drucken lässt. Bis jetzt sind die drei ersten Hefte des Anno XXIV (5 Marzo, 16 Aprile, 7 Maggio 1871) erschienen, deren Inhalt wir — natürlich nur so weit derselbe

in den Kreis des Archivs gehört — im Folgenden anzeigen, und zugleich bemerken, dass Veranstaltungen getroffen worden sind, welche uns die regelmässige und ununterbrochene Anzeige der verschiedenen Hefte dieser verdienstlichen „Atti", sogleich nach ihrem Erscheinen, in unseren „Literarischen Berichten" möglich machen werden, was mit uns die Leser des Archivs gewiss mit besonderem Danke erkennen werden.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, compilati dal Segretario. Anno XXIV. Roma 1871. 4°.

Sessione I^a del 5 Marzo. — Diese erste Sitzung fand unter dem Vorsitze des Protectors der Akademie, des Cardinals Filippo de Angelis Statt, und das betreffende Heft enthält die folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Abhandlungen, ausser anderen nicht hierher gehörenden beachtenswerthen naturwissenschaftlichen Mittheilungen: **Secchi, P. Angelo:** Progresso delle cognizioni solari ottenuto in occasione dell' Ecclisse Solare del 22 Dicembre 1870. p. 1—p. 15, welche wir der Beachtung der Astronomen empfehlen. — **Nardi, Monsig. Francesco:** Sulla gravità specifica dell' acque dell' Atlantico meridionale. Ricerche del Sig. Samuel White Hodding. p. 31—p. 32.

Sessione II^a del 16 Aprile. — Secchi, P. Angelo: Sopra un nuovo metodo spettroscopico. p. 53 — p. 55. — Secchi, P. Angelo: Ricerche solari. p. 56—p. 62. Auch diese mit einer schönen Abbildung der Protuberanze Solari osservate al Collegio Romano begleiteten (m. s. jedoch über diese Abbildungen nachher Sessione III^a) Aufsätze sind der Beachtung der Astronomen zu empfehlen. In dem Eingange zu dem ersten Aufsatze sagt Herr Secchi: „Gli astronomi sono da molto tempo in cerca di un mezzo per poter vedere il sole diretto e le sue protuberanze colla stessa facilità con cui si osservano le macchie nel suo disco per mezzo di sostanze o vetri colorati. Le spettroscopio ordinario se fa vedere le protuberanze non lascia vedere il sole, o almeno solo imperfettamente e in minima area: questo, non può negarsi, se soddisfa alla scienza, la chiude però in una cerchia di osservazione difficile oltremodo. La soluzione del problema si è cercata nelle sostanze assorbenti che lasciassero passare i raggi componenti le protuberanze di una determinata refrangibilità, ma finora questo è un desiderio, e nessun risultato serio è stato ottenuto. Solo coi vetri colorati si può coadiuvare l'azione delle spettroscopio". — Tortolini, Monsig. D. Barnaba: Sulla teorica di alcune Curve pedali. p. 63—p. 82. Wir empfehlen diesen sehr schönen Aufsatz über Fusspunktcurven ver-

schiedener Art recht sehr zur Beachtung. Eigentlich sind die hier sehr eingehend betrachteten Curven die Curven, welche Herr W. Roberts in Dublin mit den Namen positive und negative **derivirte** Curven belegt hat. Den geometrischen Ort der Fusspunkte aller von einem festen Punkte in der Ebene einer Curve auf deren Berührende gefällten Perpendikel nennt nämlich der genannte Mathematiker positive derivirte Curven, welches die eigentlichen, gewöhnlich Fusspunktcurven genannten Curven sind. Wenn dagegen von einem festen Punkte in der Ebene einer Curve an deren verschiedene Punkte Radii vectores gezogen und in den Endpunkten dieser Vectoren auf dieselben Perpendikel errichtet werden, so nennt derselbe Mathematiker die diese Perpendikel einhüllende Curve eine negative derivirte Curve. Die Abhandlung des Herrn Tortolini ist in mehreren Beziehungen sehr lehrreich, und muss wiederholt zur Beachtung recht sehr empfohlen werden. — Azzarelli, prof. Mattia: Risoluzione delle equazioni di 3° e 4° grado per mezzo della sostituzione lineare. p. 83 — p. 90. Wir hoffen auf diese beachtenswerthe Abhandlung über die Auflösung der Gleichungen des 3. und 4. Grades später im Archiv selbst zurückzukommen.

Sessione III^a del 7 Maggio 1871. — Secchi, P. Angelo: Sulle protuberanze solari e le facole. Ossia illustrazione della Tavola I. presentata nella Sessione del 16 Aprile 1871. p. 93 — p. 104 (m. s. vorher Sessione II^a.). — Secchi, P. Angelo: Osservazioni della Cometa I^a. — 1871 fatte all' equat. di Merz al Collegio Romano dal P. Rosa. p. 105. — Azzarelli, Cav. Mattia: Trattato elementare delle funzioni iperboliche. p. 112 — p. 137. Diese auf eine elementare Quadratur der Hyperbel *) zwischen ihren Asymptoten gegründete sehr verdienstliche elementare Theorie der hyperbolischen Functionen, welche auf Herrn A. Forti's in Pisa treffliche Tafeln dieser und anderer Functionen **) besonderen Bezug nimmt, wird gewiss dazu beitragen, die wichtige Theorie der hyperbolischen Functionen immer mehr in den mathematischen Unterricht einzuführen, und verdient daher namentlich auch Lehrern der Mathematik an höheren Unterrichtsanstalten zu näherer Kenntnissnahme recht sehr empfohlen zu werden.

*) Man vergl. meine elementare Quadratur der Hyperbel und meine elementare Theorie der hyperbolischen Logarithmen in Thl. XXV. S. 82. (1855) und die Bemerkungen dazu von Nizze in Thl. XXVI. S. 111. (1856). G.

**) Die wir im Literarischen Berichte Nr. CCVIII. S. 9 ausführlich angezeigt haben. G.

Literarischer Bericht

CCXI.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 1870. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCIX. S. 4.).

Tomo III. Dicembre 1870. Cenni necrologici del P. Nazareno Mancini. D. C. D. G. Ein kurzer Necrolog des Genannten von F. Marchetti. D. C. D. G. mit einem vollständigen Verzeichniss seiner Schriften. Mancini war geboren von armen Eltern in Orvieto am 1. December 1822 und starb — seit 1866 beschäftigt am Observatorium des Collegio Romano — am 7. November 1870. Er ist Verfasser einer grösseren Anzahl mathematischer Werke über Arithmetik, Elementarmathematik überhaupt, Mechanik, analytische Geometrie und höhere Algebra, namentlich aber einer grossen Anzahl astronomischer und meteorologischer Abhandlungen. — Ausserdem enthält das vorliegende Heft noch „Annunzi di recenti Pubblicazioni" und das sehr vollständige und genaue Inhaltsverzeichniss zu Tomo III.

Tomo IV. Gennaio 1871. Intorno ad una traduzione italiana fatta nel secolo decimoquarto del Trattato d'Ottica d'Alhazen, Matematico del secolo undecimo, e ad altri lavori di questo scienziato. Nota di Enrico Narducci. Diese sehr gründliche und vollständige, 48 Seiten umfassende, Abhandlung über den berühmten arabischen Mathematiker Alhazen beschränkt sich keineswegs bloss auf die auf ihrem Titel genannte italienische Uebersetzung der Optik des berühmten Arabers, sondern giebt überhaupt über denselben alle in jeder Beziehung wünschenswerthen Nachrichten, was um so dankenswerther ist, je mehr solche ausführliche Nachrichten über denselben bis jetzt

fehlten. Auch das optische oder vielmehr geometrische Problem, welches unter dem Namen Alhazen's Aufgabe bekannt ist (M. s. z. B. Elemente der analytischen Geometrie von J. A. Grunert. Thl. II. Alhazen's Aufgabe.)*) hat hier besondere Beachtung gefunden, so dass wir diese Abhandlung überhaupt für eine für die Geschichte der Mathematik sehr wichtige und besonders dankenswerthe Arbeit halten.

Geometrie.

Lehrbuch der ebenen Geometrie für die mittleren Classen höherer Lehranstalten von Dr. Joh. Aug. Grunert. Mit zehn Figurentafeln. Sechste vielfach vermehrte und verbesserte Ausgabe. Brandenburg a. d. H. J. Wiesike. 1870. 8°. (Zweiter Theil des Lehrbuchs der Mathematik für die mittleren Classen höherer Lehranstalten).

Nicht im Entferntesten kann es in meiner Absicht liegen, über dieses viel gebrauchte in vielen Tausenden von Exemplaren verbreitete, und deshalb allgemein bekannte Lehrbuch hier mich ausführlicher auszusprechen. Gewissermassen ist es aber Pflicht für mich, das Erscheinen der vorliegenden Sechsten Ausgabe desselben hier anzuzeigen, indem ich hoffe, dass Alle, die diesem Buche einige Beachtung schenken, diese neueste Ausgabe wirklich als eine vielfach vermehrte und verbesserte — wie der Titel dieselbe bezeichnet — anerkennen werden. Die Zusätze bestehen hauptsächlich aus einer weiteren Berücksichtigung der sogenannten neueren Geometrie, und die neuesten Ansichten über die Theorie der Parallelen haben in einem Anhange in einer solchen Weise eingehende Berücksichtigung gefunden, wie ich es in einem für den geometrischen Unterricht auf Schulen bestimmten Lehrbuche allein für zweckmässig halten kann, indem nach meiner vollkommensten Ueberzeugung, welcher sehr viele der besten Lehrer der Mathematik vollkommen beigestimmt haben, jede andere Exposition — wie dieselbe in einigen für den Elementarunterricht bestimmten Schriften, theilweise in einer strengen Kritik nur wenig genügender Weise, zu geben versucht worden ist — nur zu sehr schädlicher Verwirrung der Schüler Veranlassung und Gelegenheit geben muss, wie auch die Erfahrung bereits gelehrt hat.

---

*) Die Abhandlung in Thl. LII. Nr. XXXII. Ein Problem aus der Optik. Von Herrn Dr. Ad. Hochheim. behandelt die Alhazen'sche Aufgabe in erweiterter Gestalt für Flächen im Allgemeinen.

Verzeihen wird man mir gewiss, wenn ich hier meine innigste Freude ausspreche, dass dieses ganz im strengen Geiste der griechischen Geometer verfasste, dabei aber den neueren Fortschritten der Geometrie und — was ich hieneben für sehr wesentlich und wichtig halte — der praktischen Anwendung gebührend Rechnung tragende Lehrbuch nach einem so langen Zeitraume von fast 40 Jahren seit seinem ersten Erscheinen immer noch fortfährt, zu der mir so sehr am Herzen liegenden Förderung eines wahrhaft strengen — wie er nur aus einem sorgfältigen langjährigen Studium der von den Griechen uns hinterlassenen unübertroffenen und unübertreffbaren Muster kennen gelernt werden kann — und zur Selbstthätigkeit in jeder Beziehung anregenden geometrischen Unterrichts beizutragen, wodurch diesem letzteren nur allein sein so wichtiger Einfluss auf die allgemeine geistige Bildung der Jugend dauernd gesichert und erhalten werden kann. G.

Mechanik.

Lehrbuch der physikalischen Mechanik von Dr. Heinrich Buff, Professor der Physik an der Universität Giessen. In zwei Theilen. Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzstichen. Erster Theil. Braunschweig. F. Vieweg und Sohn. 1871. 8°.

In der Vorrede sagt der Herr Verfasser, „dass er bei der Bearbeitung dieses Buchs“ — dessen etwa die sogenannte Mechanik fester Körper, um diese kurze Bezeichnung hier zu gebrauchen, enthaltender erster Theil uns bis jetzt nur vorliegt — „von dem in den meisten Lehrbüchern der Mechanik adoptirten rein mathematischen Entwickelungsgange darin abgewichen sei, dass er auf die ausführliche Erörterung mechanischer Grundbegriffe, wie die von Ruhe und Bewegung, von Masse und Kraft, von Druck und Gegendruck, von Trägheit, Arbeit u. a. m., welche nicht mathematisch ableitbar, sondern der Physik, also der Erfahrung entlehnt sind, einen grössern Nachdruck gelegt habe, als dieses sonst wohl zu geschehen pflege.“ Indem wir gern bereit sind, dies anzuerkennen, sind wir zugleich der Meinung, dass das Buch als Lehrbuch einer **physikalischen** Mechanik seinem dadurch ausgesprochenen Zwecke im Ganzen genügen möchte, also bei dem physikalischen Unterrichte und bei dem Unterrichte in der Mechanik, wie er auf Oberrealschulen, Gewerbeschulen, auf landwirthschaftlichen und forstlichen Akademieen u. s. w. wohl ertheilt zu werden pflegt, mit Nutzen gebraucht werden kann, und in dieser Rücksicht manches Lehrreiche enthält. Aber höhere Ansprüche, namentlich auch höhere Ansprüche in rein wissenschaftlicher Rück-

Untersuchungen über die Diffusion der Gase ohne poröse Scheidewand. II. S. 468.

Band LXII. Heft III. König: Beiträge zur Theorie der elektrischen Nervenreizung. S. 537. — Wretschko: Experimental-Untersuchungen über die Diffusion von Gasgemengen. S. 575. — Wittek: Ueber die tägliche und jährliche Periode der relativen Feuchtigkeit in Wien. (Mit 2 Tafeln). S. 592.

Erschienen ist auch das sehr vollständige und genaue Register zu den Bänden 51 bis 60 der Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse. Wien, in Commission bei Karl Gerold's Sohn. 1870. 8°.

Druckfehler.

Im Literarischen Bericht Nr. CCIX. (Thl. 53. Heft 1.) S. 3. Z. 2. v. u. statt „Conficienten" s. m. „Coefficienten."

Literarischer Bericht

CCXII.

Vorfeier zu der am 27. December 1871 Statt findenden 300jährigen Geburtstagsfeier Johann Kepler's in Mühleck (Graz) am 15. October 1871.

Am nächsten 27. December werden 300 Jahre verflossen sein seit dem Tage, an welchem

Johann Kepler

zu Magstatt, einem Dörfchen nahe bei Weil in Würtemberg geboren wurde. Möge Deutschland aller Orten an diesem denkwürdigen Tage sich erinnern, ein wie grosser Theil seiner Grösse und seines Ruhmes in dem Namen Kepler vereinigt ist!

In Graz, wo Kepler bekanntlich eine Zeit lang Professor war, hat schon am 15. October d. J. eine würdige und erhebende Vorfeier des genannten denkwürdigen Tages unter allgemeinster Theilnahme der Bevölkerung in dem Schlösschen Mühleck Statt gefunden; selbst die höchst gestellten Personen, von denen wir nur den Statthalter von Steiermark Baron Kübek, den Landeshauptmann Dr. v. Kaiserfeld, den Bürgermeister von Graz Dr. v. Schreiner, nennen wollen, betheiligten sich lebhaft bei diesem schönen, Deutschland zu grosser Ehre gereichenden Feste. Herr Professor Rogner von Graz hielt eine würdige Festrede, und an dem einstigen Wohnhause Keplers in Mühleck wurde ein Gedenkstein angebracht, welcher das Wappen des grossen Mannes und seiner Gattin trägt mit der folgenden Inschrift:

„Hier an der Heimstätte seiner geliebten
Hausfrau **Barbara Müller v. Mühleck,**
geb. 1573, verheiratet seit 1597, lebte
und forschte **Johannes Kepler** in
den Jahren 1597—1599."

Ueber die eigentliche Festfeier am nächsten 27. December, zu welcher grossartige Vorbereitungen gemacht werden, hoffen wir späterhin ausführlich berichten zu können.

Ueber die Vorfeier am 15. October liefern die in Graz erscheinenden Zeitungen: Grazer Zeitung, Nr. 237, Deutsche Zeitung, Nr. 279, Tagespost, Nr. 277, interessante, theilweise ziemlich ausführliche Berichte. G.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Bulletino di Bibliografia e di Storia delle scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. Roma. 1871. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCXI. S. 1.).

Tomo IV. Febbraio 1871. Sur l'orthographe du nom et sur la patrie de Witelo (Vitellion). Note de M. Maximilien Curtze, Professeur au Gymnase de Thorn. p. 49. (Das Resultat dieser sehr gründlichen und gelehrten Arbeit ist folgendes: „1°. L'auteur de l'ouvrage connu sous le titre d'une „Perspectiva Vitellionis doit être nommé Witelo. — 2°. Ce nom est indubitablement un nom allemand et en particulier très-usité en Thuringe pendant le XIIIe siècle, c'est-à-dire pendant la durée de la vie de notre auteur. En se nommant „filius Thuringorum et Polonorum," il atteste lui-même cette origine, mais il veut montrer probablement qu'il est né dans une des villes de la Pologne entièrement allemande dans ces temps-là. — 3°. Il n'est pas possible qu'il soit de l'illustre famille des Ciolek, parce que la forme Vitellio du nom de Witelo, sur laquelle se fonde entièrement cette hypthèse, est une erreur et n'est autre chose qu'une défiguration de la forme originale due aux copistes ignorants. — Dieser Abhandlung hat der gelehrte und um die Förderung der Geschichte der Mathematik und Physik so hoch verdiente Herausgeber, Herr B. Boncompagni, eine sehr interessante Note unter der Ueberschrift: „Intorno ad un manoscritto dell' ottica di Vitellione citato da fra Luca Pacioli. p. 78." beigefügt. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 82.

Tomo IV. Marzo 1871. De Heronis quae feruntur definitionibus. Auctore Godofredo Friedlein. p. 93. Griechischer Text einer dem Hero zugeschriebenen Schrift mit lateinischer Uebersetzung unter der Ueberschrift: Autoris cuiusdam viae in geometriam praemunitio. Auf die bekannte Schrift von Hultsch: „Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae. Berolini MDCCCLXIV." ist besondere Rücksicht genommen. — Auch dieser Abhandlung hat Herr Boncompagni einen besonderen Aufsatz: „Intorno alle definizioni di Erone Alessandrino. pag. 122 — pag. 126. beigefügt, der sehr zu beachten ist.

Tomo IV. Aprile 1871. Diese Nummer enthält eine grössere Anzahl sehr interessanter Aufsätze, nämlich: Sur un article du Journal des Savants par Eugène Catalan. p. 127. (Bezieht sich auf verschiedene wenig überlegte Aeusserungen des Herrn Joseph Bertrand in Paris. — Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, arce e di punti. Memoria di Domenico Chelini delle Scuole Pie (letta nella Sessione 12 Maggio 1870). Bologna, tipi Gamberini e Parmeggiani, 1870. (Wir machen auf die hier angezeigte schöne Abhandlung des Herrn D. Chelini recht sehr aufmerksam.). — Giunte allo scritto intitolato „Intorno ad una traduzione italiana, fatta nel secolo decimoquarto, del trattato d'Ottica d'Alhazen. E. Narducci. p. 137. — Sopra alcuni scritti stampati finora non conosciuti, di Domenico Maria Novara da Ferrara. Notizie communicate alla Società Copernicana di scienze ed arti di Thorn nelle sedute del 27 Giugno e 15 Agosto 1870 da Massimiliano Curtze (Traduzione del Sig. Filippo Keller). p. 140. — Ulteriori notizie sopra alcuni scritti stampati, finora non conosciuti di Domenico Maria Novara da Ferrara, comunicate alla Società Copernicana di scienze ed arti nella seduta del 5 Dicembre 1870 da Massimiliano Curtze (Traduzione del Sig. Filippo Keller.). p. 149. — Annunzi di recenti pubblicazioni. p. 150.

Arithmetik.

Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Decimalen, bearbeitet von Dr. C. Bruhns, Director der Sternwarte und Professor der Astronomie in Leipzig. Stereotypausgabe. Verlag von Bernhard Tauchnitz. Leipzig 1870. gr. 8°.

In der auf dem Titel genannten berühmten Verlagshandlung ist bekanntlich das Logarithmisch-trigonometrische Handbuch von H. G. Köhler bereits in einer zehnten Stereotypausgabe erschienen, und hat sich viele Freunde erworben, weshalb es in seiner jetzigen Gestalt auch ferner erscheinen wird. Für viele, besondere Genauigkeit erfordernde Rechnungen genügt jedoch dieses — übrigens die Logarithmen auch auf sieben Decimalstellen gebende — Handbuch in demselben Grade wie z. B. — um hier in diesem Falle nur in Deutschland erschienene Tafeln zu nennen — die Tafeln von Bremiker und Schrön, schon deshalb nicht, weil es die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten nur für die ersten 8 Grade von 10 zu 10 Secunden, nachher bloss von Minute zu Minute giebt. Daher entschloss sich die Verlagshandlung zur Herausgabe einer ganz neuen, mindestens völlig dieselbe Genauigkeit wie die oben genannten Tafeln gewährenden Tafel — neben dem Köhler'schen Handbuche — und Herr Professor Bruhns in Leipzig unterzog sich der Bearbeitung dieser neuen Tafel, welche wahrscheinlich in Folge dieser ihrer Entstehung den Titel Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch u. s. w. erhalten hat. Wir haben durch eigenen Gebrauch uns mit diesem neuen Handbuche längere Zeit hindurch ziemlich genau bekannt zu machen gesucht, und haben dadurch die Ueberzeugung gewonnen, das Herr Bruhns bei seiner Bearbeitung nicht bloss alle in neuerer Zeit bei dem nicht genug zu lobenden Bestreben, die Genauigkeit und Bequemlichkeit der älteren Tafeln zu erhöhen und dieselben ihrem Zwecke immer näher zu führen, gemachten Erfahrungen in dem weitesten Umfange auf das Sorgfältigste benutzt, sondern auch manche eigene, mit besonderem Danke aufzunehmende neue Einrichtungen hinzugefügt hat. Unser Raum gestattet uns hier nicht, alle diese Einrichtungen einzeln namhaft zu machen, und können wir uns deshalb auf die sehr lehrreiche, Alles, was hierüber zu wünschen wissenswerth sein möchte, sorgfältiget berücksichtigende Vorrede beziehen. Um aber doch Einiges hervorzuheben bemerken wir, dass natürlich in einer solchen Tafel die Logarithmen der goniometrischen Functionen im Allgemeinen von 10 zu 10 Secunden gegeben sind, dass es aber mit besonderem Danke aufzunehmen ist, dass die Tafeln die Logarithmen dieser Functionen für die 6 ersten Grade von Secunde zu Secunde mit Hinzufügung der Differenzen und, wo es der Raum gestattete, auch mit Proportionaltheilen, enthalten, wodurch dem Rechner manche lästige Interpolation erspart wird, wenn die erforderliche Genauigkeit erreicht werden soll. — Da man häufig nur 6 Decimalen gebraucht und alsdann bei siebenstelligen Tafeln, wenn eine 5 in der siebenten Stelle am Ende steht, es zweifelhaft ist, ob man die sechste Stelle wegen der 5 in der siebenten Stelle erhöhen soll oder nicht, ist durch alle 3 hier

gegebenen Tafeln (s. nachher) die erhöhete 5 in der siebenten Decimale mit einem darüber stehenden Striche versehen. Bei Rechnungen mit 6 Stellen ist daher die gestrichene 5 ($\bar{5}$) fortzuwerfen und die sechste Stelle ungeändert zu lassen; für die ungestrichene, natürlich bei Rechnungen mit 6 Stellen auch wegzulassende 5 ist dagegen die letzte beibehaltene sechste Stelle um eine Einheit zu erhöhen. Wegen der übrigen Einrichtungen müssen wir, wie schon gesagt, auf die sehr lehrreiche Vorrede verweisen.

Der Hauptinhalt des Werkes ist ausser Vorrede und Einleitung nun der folgende:

I. Tafel der gemeinen oder Briggischen Logarithmen der natürlichen Zahlen von 1—100000 und der trigonometrischen Hülfsgrössen S und T*) zur Berechnung der Logarithmen der Sinus, Tangenten und Cotangenten der Winkel von 0—10000 Secunden etc. etc.

II. Logarithmen der trigonometrischen Functionen von 0^0 bis 6^0 und 84^0 bis 90^0 von Secunde zu Secunde.

III. Logarithmen der trigonometrischen Functionen vou $6^0\,0'$ bis $84^0\,0'$ von zehn zu zehn Secunden.

Angehängt sind noch: Länge der Kreisbogen für den Halbmesser 1. — Verwandlung der Bogentheile in Zeit; Stunden, Minuten, Secunden. — Constanten.

Ueber die äussere Ausstattung bei einem aus Tauchnitz'schem Verlage hervorgegangenen Werke noch etwas sagen zu wollen, würde ganz unnütz sein; dass in dieser Beziehung Alles geschehen ist, was die neueren Anforderungen irgend verlangen, versteht sich bei dieser Verlagshandlung ganz von selbst; dieselbe ist in allen Beziehungen vorzüglich und musterhaft zu nennen.

Hiermit möge das treffliche, der deutschen Literatur zur Ehre gereichende Werk, zur allgemeinsten Benutzung recht sehr empfohlen sein!

Geodäsie.

Ein Apparat zur mechanischen Lösung der nach Pothenot, Hansen u. A. benannten geodätischen Aufgaben

*) S. die Vorrede §. 9.

von Carl Max Bauernfeind. Mit einer Steindrucktafel. Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. XI. Bd. I. Abth. München 1871. Verlag der k. Akademie, in Commission bei G. Franz. 4°.

In dieser ausgezeichneten Schrift ist eine Beschreibung und Anleitung zum Gebrauche eines von Herrn Bauernfeind neuerlichst erfundenen Apparats zur mechanischen Lösung der auf dem Titel genannten geodätischen Aufgaben enthalten, den wir für ungemein zweckmässig und für eine wahre Bereicherung des geodätischen Apparats überhaupt halten. Wer weiss, wie viele künstliche geometrische Hülfsmittel zur graphischen Lösung der in Rede stehenden Aufgaben bereits vorgeschlagen worden sind, die doch keineswegs immer die nöthige Genauigkeit gewähren und in der praktischen Anwendung meistens öfters wiederholt werden müssen, wird gewiss dem Herrn Verfasser für seinen schönen, sehr leicht zu gebrauchenden, und nach einiger Uebung im Gebrauche und bei mässiger Geschicklichkeit in der Ausführung graphischer Constructionen doch eine grosse Genauigkeit gewährenden Apparat besonderen Dank wissen. Wir enthalten uns aber hier aller weiteren Bemerkungen, weil wir nach eingeholter Erlaubniss der Kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften und des Herrn Verfassers die vorliegende Schrift in dem nächsten Hefte unseres „Archivs" (Thl. LIV. Heft 1.) vollständig abdrucken lassen werden, um zu der sehr zu wünschenden möglichst weiten Verbreitung des Apparats das Unsrige nach Kräften beizutragen und denselben vorzüglich auch zur Kenntniss aller höheren Real- und Gewerbeschulen zu bringen und diesen Unterrichts-Anstalten dringend zu empfehlen, was auf anderem Wege schwerlich so schnell und in so weitem Umfange möglich zu machen sein dürfte, als durch unser „Archiv." Wir begnügen uns daher für jetzt auf diesen Abdruck im nächsten Hefte zu verweisen.

Astronomie.

Kalender für alle Stände. 1872. Herausgegeben von Carl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. XLII. Jahrg. Mit einer Sternkarte. Wien. Carl Gerold's Sohn. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVIII. S. 12.).

Die Einrichtung dieser Liebhabern astronomischer Himmelsbetrachtung sehr zu empfehlenden kleinen Ephemeride, die von allen Erscheinungen sorgfältigst Nachricht giebt, ist unseren Lesern aus

den Anzeigen der früheren Jahrgänge hinreichend bekannt. Es enthält aber dieser Jahrgang wieder einige sehr werthvolle und interessante populär gehaltene astronomische Aufsätze, von denen wir hier in der Kürze Nachricht geben: I. Beobachtungen der totalen Sonnenfinsterniss vom 18. August 1868 und Vergleichung derselben mit früheren Wahrnehmungen dieser Art. Eine ungemein interessante Zusammenstellung alles Dessen, was zur Erforschung der Natur des Sonnenkörpers, besonders seiner Lichthüllen, durch einzelne Beobachtungen, durch besonders ausgesandte Expeditionen u. s. w., namentlich auch auf dem Wege der Photographie und der Spectralanalyse, geleistet worden ist, und der daraus gezogenen Resultate; woraus man mit besonderer Freude entnehmen wird, dass wir jetzt der Kenntniss der wahren Natur unseres Sonnenkörpers um einen bedeutenden Schritt näher gekommen sind. Ueber die völlige Unzulässigkeit und die grösste Unwahrscheinlichkeit der sogenannten optischen Hypothese, ob nämlich die Erscheinungen der Protuberanzen, der Corona u. s. w. der Sonne oder dem Monde wesentlich angehören, haben wir uns in mehreren früheren Literarischen Berichten ausführlich, und natürlich ganz gegen diese Hypothese ausgesprochen. Wie sehr unsere damals ausgesprochenen Ansichten bestätigt worden sind, zeigt auch die vorliegende Abhandlung, in welcher wir zu unserer Freude S. 10. folgende Stelle finden: „Diesen Thatsachen gegenüber mussten alle Bedenken, die man gegen die solare Natur der Protuberanzen aus deren scheinbarer Variabilität geschöpft hatte, verschwinden, und es reducirte sich die Zahl jener, welche auch jetzt noch jene Erscheinungen optisch erklären wollten, auf eine kleine Gruppe von Beobachtern, die sich (zur Beobachtung der Finsterniss vom 18. Juli 1860) grösstentheils in der Nähe von Castellon de la Plana versammelt hatten. Allein auch diesen **musste noch der letzte Boden unter den Füssen weggezogen werden,** als es bei der österreichischen Expedition zur Beobachtung der ringförmigen Sonnenfinsterniss am 6. März 1867 dem Marineoffizier J. Řziha in der Nähe von Ragusa gelang, eine Protuberanz auf der Sonnensichel aufsitzend zu erblicken. (Das Nähere und Weitere s. m. a. a. O.). — II. Physische Zusammenkünfte der Planeten. Gleichfalls eine im höchsten Grade interessante überaus mühsame Zusammenstellung aller über diesen Gegenstand, um den sich der Herr Herausgeber unseres Kalenders ganz besonders verdient gemacht hat, und immer noch macht, bisher erhaltenen Resultate. Auch die detaillirte Beschreibung der mehr praktischen oder mechanischen, eigentlich graphischen Methode, mittelst welcher diese Resultate gewonnen worden sind,

wird und muss jeden unserer Leser besonders interessiren. — III. Neue Planeten und Kometen. — Der übrige Inhalt dieses trefflichen Jahrbüchleins, dem wir den ungestörtesten und ununterbrochensten Fortgang mit besonderem Danke gegen den Herrn Herausgeber wünschen, ist aus den früheren Jahrgängen unseren Lesern hinreichend bekannt.

Physik.

Die Physik für Unter-Realschulen. Von Dr. Franz Josef Pisko, ordentl. Professor der Physik an der k. k. technischen Militär-Akademie in Wien etc. Achte, sehr verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 515 Figuren. Brünn, 1871. Carl Winiker. 8°.

Alles, was wir im Literar. Ber. Nr. CLX. S. 6. bei Gelegenheit der 5. Auflage dieses Buches, welches wir unbedingt für eines der besten und am meisten zu empfehlenden Lehrbücher der Physik für die auf dem Titel genannten Unterrichtsanstalten halten, zu dessen Empfehlung gesagt haben, gilt auch von dieser uns vorliegenden achten Auflage, deren Erscheinen das beste Zeugniss für die Richtigkeit unseres damals ausgesprochenen Urtheils liefert. Die jetzt bei den wichtigeren physikalischen Gegenständen überall beigefügten historischen Notizen sichern dieser achten Ausgabe noch einen besonderen Werth vor den früheren Ausgaben. Ueberall ist auf Anwendung bei den Geschäften des praktischen Lebens Rücksicht genommen, und die vielen Paragraphen beigefügten Fragen und Andeutungen von anzustellenden Uebungen haben wir überall recht instructiv gefunden.

Die Naturkräfte. Eine naturwissenschaftliche Volksbibliothek, herausgegeben von einer Anzahl von Gelehrten. München. Rudolph Oldenbourg. 8. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCVIII. S. 12.).

Von diesem auch Lehrern recht sehr zur Beachtung zu empfehlenden populären Werke liegen zu unserer Freude uns wieder zwei neue Theile (VI. und VII.) vor.

Der eine dieser beiden Theile (VI) enthält: Die elektrischen Naturkräfte, der Magnetismus, die Electricität und der galvanische Strom mit ihren hauptsächlichsten Anwen-

dungen gemeinfasslich dargestellt von Prof. Dr. Carl in München. Mit 110 Holzschnitten. München. 1871.

Der Gegenstand dieses Theils eignete sich vorzugsweise zur populären Behandlung. Die allgemeinen Hauptgesetze der Elektricität, des Magnetismus, des Galvanismus u. s. w. sind sehr fasslich, dabei aber mit wissenschaftlicher Genauigkeit dargestellt, und hieneben ist allen Anwendungen dieser Gesetze die sorgfältigste Aufmerksamkeit und Beachtung gewidmet worden. Ganz besonders hat uns die sehr vollständig behandelte und überall durch sehr schöne Illustrationen erläuterte Telegraphie interessirt, die Alles enthalten möchte, was namentlich auch für den Lehrer der Physik von Wichtigkeit sein dürfte, weshalb wir alle Lehrer nochmals auf dieses lehrreiche Buch aufmerksam machen.

Der andere Theil (VII) enthält: Die vulkanischen Erscheinungen. Von Dr. Friedrich Pfaff, o. ö. Professor an der Universität Erlangen. (Deutsche Originalausgabe.) Mit 37 Holzschnitten. München 1871.

Auf diesen Theil machen wir Alle, die von den auf dem Titel genannten grossartigen Naturerscheinungen, von den Ursachen, von denen dieselben hervorgebracht werden, und von den Orten der Erdoberfläche, wo dieselben hauptsächlich sich zeigen, sich eine genaue, fast vollständige Kenntniss erwerben wollen, ganz besonders aufmerksam, und gestehen gern, dass wir selbst dieser schönen Darstellung, deren Verständniss überall durch die trefflichsten Holzschnitte wesentlich unterstützt wird, die vielfachste Belehrung verdanken, weshalb wir sehr wünschen, das Buch in den Händen recht vieler Leser zu sehen, und dem Herrn Verfasser für dessen Abfassung besonders danken.

Vermischte Schriften.

Analectes ou Serie de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques. Par N. Nicolaïdes, Docteur ès Sciences mathématiques (Faculté de Paris.). I. Livraison. Deuxième Livraison. Athènes, Imprimerie nationale. 1871. 8°.

Diese Analecten betreffen vorzugsweise höhere Mechanik und höhere Geometrie, besonders die Theorie der Flächen, theilweise

auch die reine Analysis, dieselben enthalten in diesen Beziehungen theils neue Sätze, theils Erweiterungen älterer bereits bekannter Sätze, und verfolgen, wie es scheint, in Betreff der Mechanik vorzugsweise die Tendenz, die betreffenden Sätze mit der Geometrie in nähere Verbindung zu bringen und geometrisch zu deuten, was natürlich zur Erhöhung der Anschaulichkeit beiträgt. Wegen der Beschränktheit des Raumes können wir auf Einzelnheiten unmöglich eingehen, glauben aber die Schrift im Allgemeinen zur Beachtung empfehlen zu müssen, weil ihr Inhalt auf geringem Raume ein ziemlich reicher ist, namentlich in mechanischer Rücksicht an einzelnen bemerkenswerthen Sätzen. Die freilich nur sehr allgemein gehaltenen Ueberschriften der einzelnen Abtheilungen sind die folgenden: Mémoire sur le mouvement d'un point matériel. (Livr. I. pag. 5. und Livr. II. pag. 12.). — Sur la Théorie des surfaces. Livr. I. und Livr. II. pag. 31 — pag. 37. (Betrifft vorzüglich die Theorie der Krümmung der Flächen.) — Note sur la Théorie des nombres. Livr. II. p. 37. (Betrifft die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen und die Summen anderer Reihen, also nicht das, was man jetzt eigentlich „Theorie der Zahlen" zu nennen pflegt. Der Herr Verfasser bedient sich bei diesen Summirungen häufig der Differentialrechnung, und können dieselben daher zu zweckmässigen Uebungen von Anfängern in dieser Wissenschaft benutzt werden. Um zu einer recurrirenden Formel zur Bestimmung der Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen zu gelangen, setzt der Herr Verfasser:

$$S = 1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{(n-1)x},$$

woraus sich die Formel

$$e^{nx} - 1 = S(e^x - 1)$$

ergiebt, die, $p$mal nach x differentiirt, zu einem Ausdrucke von $n^p e^{nx}$ führt, welcher, wenn man $x = 0$ setzt, die gesuchte recurrirende Formel giebt. — Sur quelques Articles des nouvelles Annales. Livr. II. p. 57.

Möge die kleine Schrift nicht unbeachtet bleiben!

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CCX. S. 5.).

Anno IX. Luglio ed Agosto 1871. Sulle forme ternarie di grado qualunque; per G. Battaglini. p. 193. — Sulla forma delle funzioni razionali della radice d'un equazione algebrica; per

S. Realis. p. 206. — Alcune relazioni fra le mutue distanze di più punti; per E. d'Ovidio. p. 211. — Intorno alle curve gobbe razionali; per Em. Weyr. p. 217. — Su talune proprietà dei determinanti in ispecie di quelli a matrici composte con la serie dei numeri figurati; per E. Caldarera. p. 223. — Relazione dei corsi di Geometria superiore e d'Analisi superiore dati nell' Università di Napoli, negli anni 1870 e 1871; per G. De Berardinis e T. Fuortes. p. 233.

Anno IX. Settembre ed Ottobre 1871. Alcuni teoremi alla „Focale à Noeud"; per Em. Weyr. p. 259. — Sul numero delle soluzioni intere e positive dell' equazione $ax+by+cz=m$, dove a, b, c sono numeri interi e positivi; F. Gambardella. p. 262. — Sulle Serie triple; per V. Retali. p. 266. — Sulla trasformazione continua di una figura piana, la quale resta sempre omografica a sè stessa, e di cui quattro punti qualunque (tre dei quali non siano per dritto) descrivono quattro linee omografiche date; per V. Mollame. p. 269. — Esposizione della teorica delle sostituzioni; per G. Janni. p. 280.

Annali di Matematica pura ed applicata diretti da F. Brioschi e L. Cremona. (Presso il R. Istituto tecnico superiore di Milano) in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini. Milano. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCIX. S. 8.).

Serie II^a. Tomo IV°. — Fascicolo 4°. (Settembre 1871.). Bardelli: Alcuni teoremi di statica (continuazione e fine). p. 265. — Em. Weyr: Sopra la corrispondenza del secondo grado fra due sistemi semplicemente infiniti. p. 272. — Painvin: Détermination des plans osculateurs et des rayons de courbure en un point multiple d'une courbe gauche. p. 281. — Em. Weyr: Nota sopra alcune singolarità di second' ordine delle curve gobbe razionali. p. 328. — Zeuthen: Note sur les quadriques polaires. p. 331. — Du Bois-Reymond: Sur la grandeur relative des infinis des fonctions. p. 338.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, compilati dal Segretario. Anno XXIV. Roma 1871. 4°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CCXI. S. 5.).

Sessione V^a del 9 Luglio 1871. Dieses Heft enthält die folgenden hierher gehörenden Aufsätze: Sulla distribuzione delle

Protuberanze nel disco solare. Seconda comunicazione del P. A. Secchi. p. 211. — p. 231. (Sehr interessant und beachtenswerth.). — Rapporto della commissione per la misura del meridiano centrale europeo negli Stati Pontifici presentato a sua Em^za. Rev. il Sig. Cardinal Giuseppe Berardi. Relazione fatta all' Accademia dal P. A. Secchi, Presidente della medesima commissione. p. 232 — 258. (Sehr interessanter Bericht über die vorher bezeichneten Vermessungs-Arbeiten mit Rücksicht auf die europäische Gradmessung.). — Azzarelli, Prof. Mattia: Sul movimento dei fluidi. p. 262 — 270. (Sehr beachtenswerthe Bemerkungen über die Integration der Fundamental-Gleichungen der Hydrodynamik.). — Provenzali, P. E. S.: Sulle macchine elettriche ad influenza. p. 271 — p. 273. (Weitere Bemerkungen über verschiedene von dem Herrn Verfasser an der genannten Maschine angebrachte und in dem Journal „Les Mondes, Mai 1870. p. 53." beschriebene Modificationen.) — Astolfi, Prof. Ottaviano: Ricerche acustico-musicali sul sonometro equabile. p. 287 — p. 302. — Secchi, P. Angelo: Rettificazione alla Comunicazione della Sessione I^a del 5 Marzo. p. 303 — p. 304.

Berichtigung.

S. 508. Z. 1. Statt „Segmentes" s. m. „Kreis-Segmentes."

Taf. I.

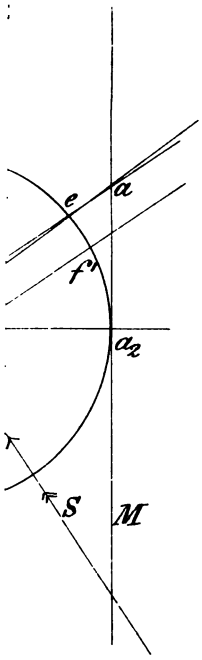
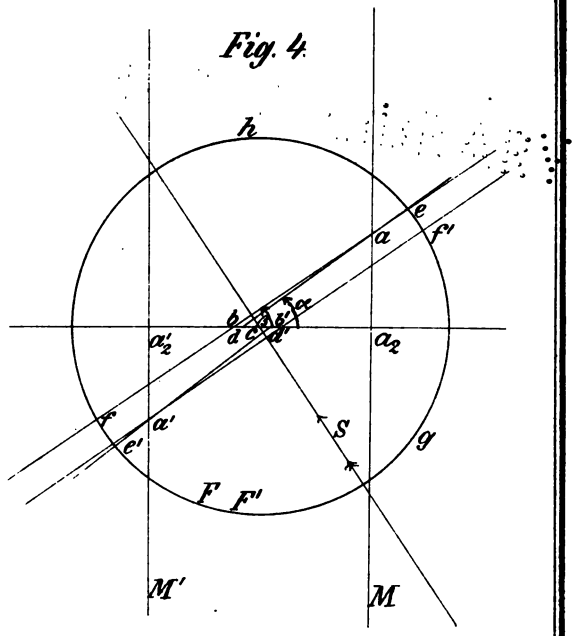
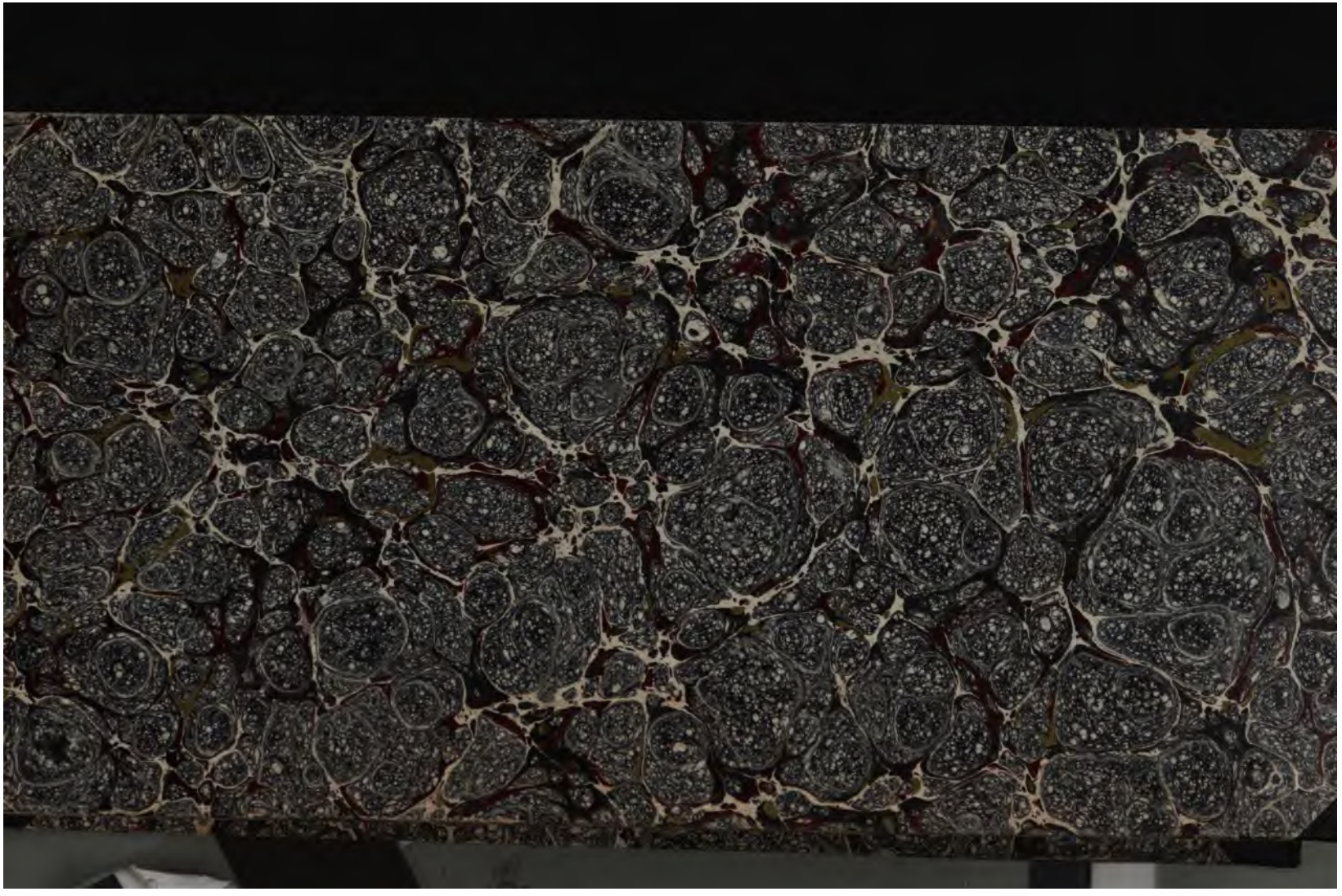


Fig. 4.



To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

5.10.5
Q673
U.35

STORAGE AR